

اگرچه نیت خوبی است زیستن ...
اما خوشا که دست به تصمیم بهتری بزنیم!

 www.konkursara.com

 ۰۲۱۵۵۷۵۶۵۰۰

دانلود بهترین جزوات در

کنکورسرا

کنکورسرا

مرجع تخصصی قبولی آزمون فرهنگیان و آزمون استخدامی آموزش و پرورش

فصل چهارم (مشتق)

شیب خط مماس بر منحنی تابع f در نقطه $A(a, f(a))$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{شیب خط مماس بر منحنی در نقطه } A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

به شرط آنکه این حد موجود و متناهی باشد.

حد بالا را (در صورت وجود) مشتق تابع f در نقطه a می‌نامند و با $f'(a)$ نمایش می‌دهند، یعنی:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

تمرین ۱:

اگر $f'(a)$ موجود باشد، ثابت کنید.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

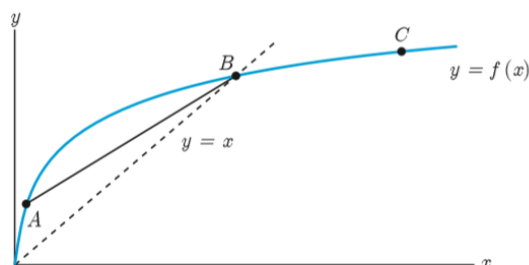
❁ **راهنمایی:** تغییر متغیر $x = a + h$ را به کار برید.

توجه کنید وقتی که $h \rightarrow 0$ آنگاه $x \rightarrow a$

تمرین ۲:

۳ برای نمودار $y = f(x)$ در شکل زیر شیب‌های داده شده از «الف»

تا «ج» را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.



الف) شیب نمودار در نقطه A

ب) شیب نمودار در نقطه B

پ) شیب نمودار در نقطه C

ت) شیب خط AB

ث) شیب خط $y = 2$

ج) شیب خط $y = x$

شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را به ترتیب m_1, m_2, \dots, m_6 و

در نظر بگیرید.

تمرین ۳:

۵ نقاطی مانند A, B, C, D, E, F و G را روی نمودار $y = f(x)$

مشخص کنید به طوری که :

الف) A ، نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

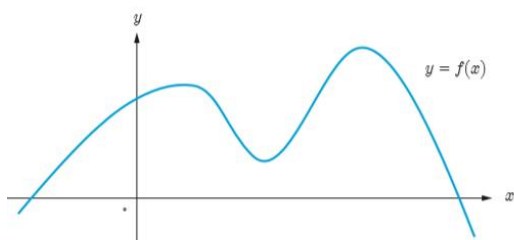
ب) B نقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.

پ) C نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آنجا صفر است ولی مقدار مشتق در آن مثبت است.

ت) D نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آنجا صفر است.

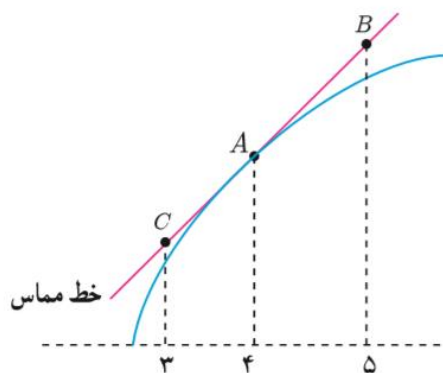
ث) نقاط E و F نقاط متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند.

ج) G نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آنجا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.



تمرین ۴:

برای تابع f در شکل زیر داریم : $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 25$ با توجه به شکل مختصات نقاط A, B, C را بیابید.



مشتق پذیری و پیوستگی:

قضیه: اگر تابع f در $x = a$ مشتق پذیر باشد آن گاه f در a پیوسته است.

اثبات: کافی است نشان دهیم: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

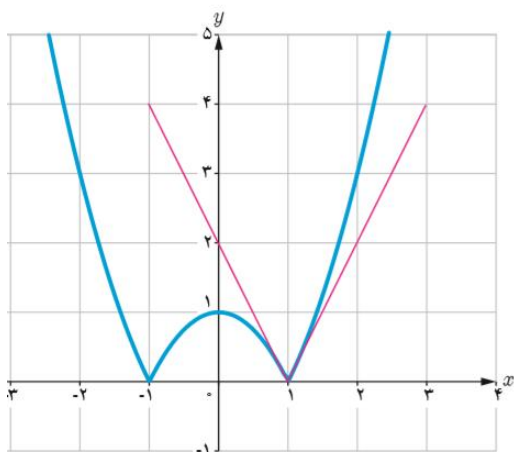
$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} \left((x - a) \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (x - a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) = 0 \cdot f'(a) = 0$$

بنابراین $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0$ و از آنجا $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ (چرا؟)

مثال بعد نشان می دهد که عکس قضیه درست نیست، یعنی حتی با وجود پیوستگی تابع در یک نقطه، لزوماً نمی توان مشتق پذیری تابع در آن نقطه را نتیجه گرفت.

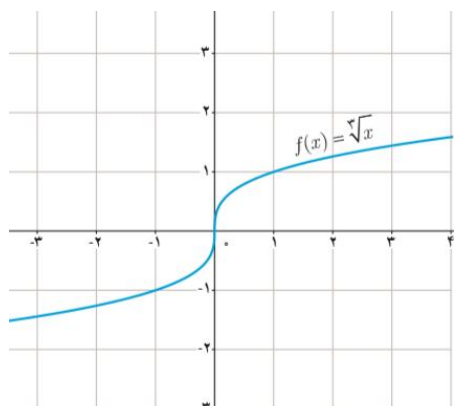
❁ **مثال:** مشتق پذیری تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ را در $x = 1$ بررسی کنید.



بنابراین $f'(1)$ موجود نیست. به عبارت دیگر خط مماس بر منحنی در نقطه $x = 1$ وجود ندارد. اما حدهای یک طرفه فوق را می توان با وجود نیم خط های مماس بر منحنی در نقطه $x = 1$ توجیه کرد. اگر از سمت راست به نقطه $x = 1$ نزدیک شویم، شیب نیم خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر ۲ و اگر از سمت چپ به $x = 1$ نزدیک شویم، شیب نیم خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر ۲- است. حدهای راست و چپ بالا را به ترتیب مشتق های راست و چپ f در $x = 1$ می نامیم و با $f'_+(1)$ و $f'_-(1)$ نمایش می دهیم.

اگر تابع f در $x = a$ پیوسته نباشد، آن گاه f در $x = a$ مشتق پذیر هم نیست.

حالت دیگر مشتق ناپذیری:



❖ **مثال:** تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ را در نظر می‌گیریم. مشتق‌پذیری این تابع را در $x = 0$ بررسی کنید.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

بنابراین تابع f در صفر مشتق‌پذیر نیست. شکل‌ها نشان می‌دهند که وقتی از سمت راست یا چپ به نقطه صفر نزدیک می‌شویم خط‌های قاطع به خط $x = 0$ نزدیک می‌شوند.

تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ در $x = 0$ مشتق‌پذیر نیست. خط $x = 0$ را «**مماس قائم**» منحنی می‌نامیم.

اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد و در این نقطه حد چپ یا راست نامتناهی داشته باشد در این صورت خط $x = a$ را «مماس قائم» بر منحنی f در نقطه $(a, f(a))$ می‌نامیم. بدیهی است $f'(a)$ در این حالت وجود ندارد.

اگر تابع f در $x = a$ هر یک از شرایط زیر را داشته باشد، در این صورت در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

۱ در f پیوسته نباشد.

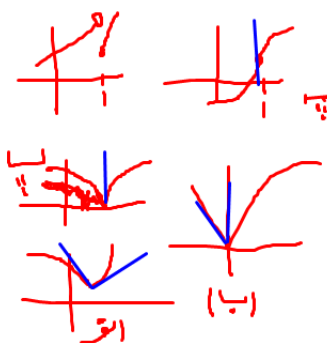
۲ در f پیوسته باشد و مشتق راست و مشتق چپ در $x = a$:

(الف) هر دو موجود (متناهی، ولی نابرابر باشند) (نقطه گوشه‌ای).

(ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد (نقطه گوشه‌ای).

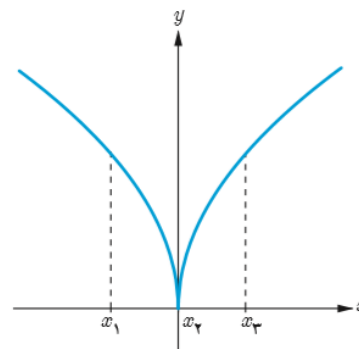
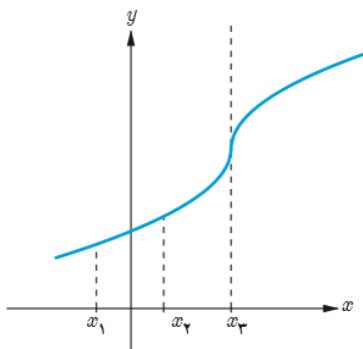
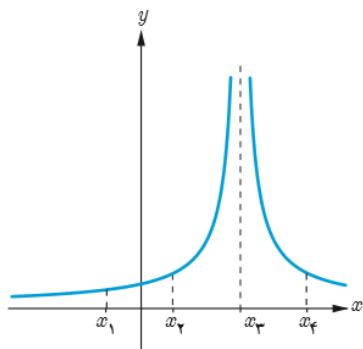
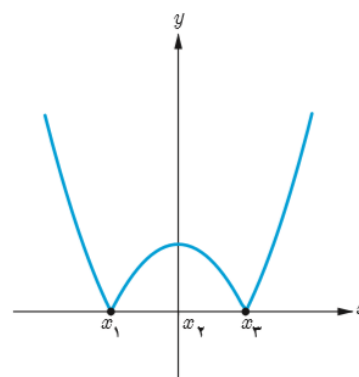
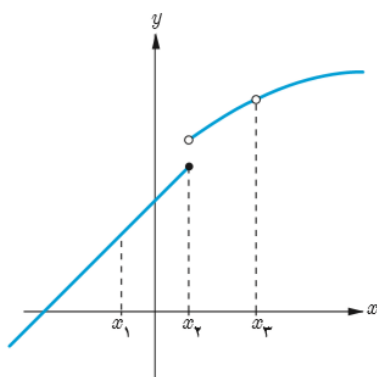
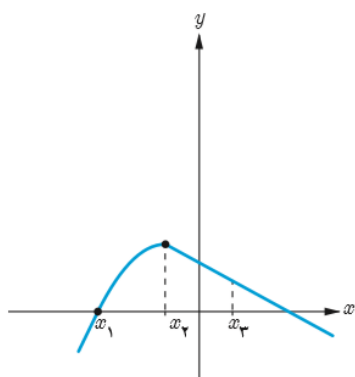
(پ) هر دو نامتناهی باشند.

به‌طور خلاصه می‌توان گفت:



تمرین:

در شکل‌های زیر مشخص کنید که هر تابع در کدام نقطه یا نقاط مشخص شده مشتق پذیر نیست.



تمرین:

دامنه f و دامنه f' را محاسبه کنید و ضابطه f' را به دست آورید. نمودار f و نمودار f' را رسم کنید.
 $f(x) = \begin{cases} 5x & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$ اگر

فرمول‌های مشتق‌گیری:

۱ اگر $f(x) = c$ آن‌گاه $f'(x) = 0$

به‌طور مثال اگر $f(x) = 7$ و $g(x) = -\frac{2}{5}$ آن‌گاه $f'(x) = 0$ و $g'(x) = 0$.

۳ به طور کلی اگر n یک عدد صحیح باشد و $f(x) = x^n$ آن گاه: $f'(x) = nx^{n-1}$.

❖ مثال: اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ و $x \neq 0$ قبلاً دیدیم که $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

همچنین با استفاده از دستور اخیر داریم: $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

* ۴ اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $x > 0$ آن گاه $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

۵ اگر $f(x) = \sqrt{ax+b}$ و $ax+b > 0$ آن گاه $f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

۶ اگر $f(x) = \sqrt[3]{x}$ آن گاه $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

۷ اگر توابع f و g در $x = a$ مشتق پذیر باشند، آن گاه توابع kf ($k \in \mathbb{R}$)، $f \pm g$ و $\frac{f}{g}$ ($g(a) \neq 0$) نیز در $x = a$ مشتق پذیرند و داریم:

الف) $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$

ب) $(kf)'(a) = kf'(a)$

پ) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

ت) $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{(g(a))^2}$

مثال:

الف) $f(x) = -\frac{2}{3}x^4 \Rightarrow f'(x) = -\frac{8}{3}x^3$

ب) $g(x) = x^5 + 4x^3 - \sqrt{2}x + 1 \Rightarrow g'(x) = 5x^4 + 12x^2 - \sqrt{2}$

پ) $h(x) = (2x^2+1)(-x^2+7x-2) \Rightarrow h'(x) = 6x^2(-x^2+7x-2) + (2x^2+1)(-2x+7)$

ت) $t(x) = \frac{x^2-4}{3x+1} \Rightarrow t'(x) = \frac{2x(3x+1) - 3(x^2-4)}{(3x+1)^2}$

اگر f و g دو تابع مشتق پذیر باشند، در این صورت تابع مرکب $f \circ g$ مشتق پذیر است و داریم:

$$(f \circ g)'(x) = g'(x)f'(g(x))$$

مثال: مشتق تابع $y = \left(\frac{x^2}{3x-1}\right)^5$ را به دست آورید.

با فرض $\frac{x^2}{3x-1} = u$ داریم: $y = u^5$ و از آنجا:

$$y' = u' \cdot 5u^4 = \frac{2x(3x-1) - 3x^2}{(3x-1)^2} \cdot 5 \left(\frac{x^2}{3x-1}\right)^4 = 5 \left(\frac{3x^2 - 2x}{(3x-1)^2}\right) \left(\frac{x^2}{3x-1}\right)^4$$

تمرین:

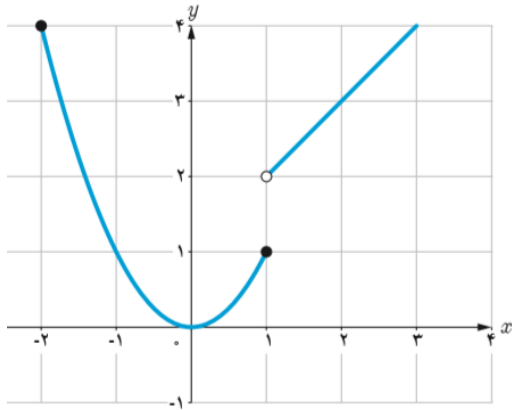
مشتق تابع های زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = (x^2+1)^2(5x-1)$

ب) $g(x) = \left(\frac{-3x-1}{x^2+5}\right)^8$

مشتق پذیری روی یک بازه

تابع f روی بازه (a, b) مشتق پذیر است هرگاه، در هر نقطه این بازه مشتق پذیر باشد.
 تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است، هرگاه f در بازه (a, b) مشتق پذیر باشد و در نقطه a مشتق راست و در b مشتق چپ داشته باشد.



اگر $D_f = \mathbb{R}$ و f در هر عدد حقیقی مشتق پذیر باشد،
گوییم f روی بازه $(-\infty, +\infty)$ مشتق پذیر است.

❖ مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & -2 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$ را در نظر
می‌گیریم.

f روی بازه‌های $[-2, 1]$ و $(1, \infty)$ مشتق پذیر است. ولی
روی بازه $[1, 2]$ مشتق پذیر نیست (چرا؟)

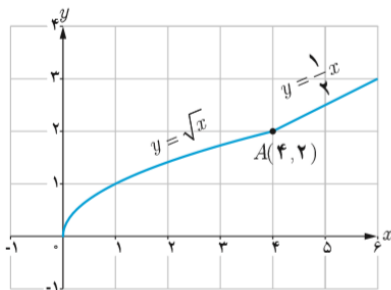
مشتق مرتبه دوم

مشتق تابع $y = f(x)$ با نماد $y' = f'(x)$ نمایش داده شد. به همین ترتیب اگر تابع مشتق، مشتق پذیر باشد، مشتق مرتبه دوم
 $y = f(x)$ را به $y'' = f''(x)$ نمایش می‌دهیم و برای محاسبه آن از تابع $y' = f'(x)$ نسبت به x مشتق می‌گیریم.

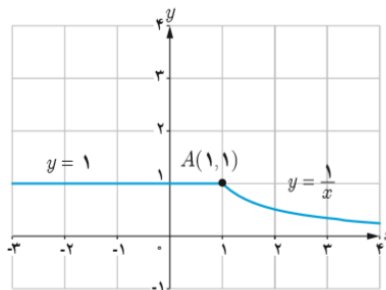
❖ مثال: اگر $y = 3x^3 + 2x^2 - 1$ آن گاه:

$$y' = 12x^2 + 4x, \quad y'' = 36x + 4$$

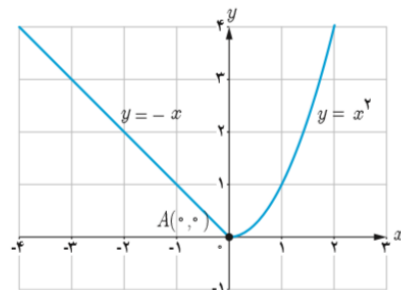
❑ با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ توابع داده شده در نقطه A ، نشان دهید که این توابع در نقطه A مشتق پذیر نیستند.



(ب)



(ب)



(الف)

❑ تابع $f(x) = \begin{cases} 5x - 4 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 3 \\ x + 6 & x > 3 \end{cases}$ داده شده است.

(ب) با توجه به نمودار تابع f بگویید که چرا $f'(0)$ و $f'(3)$ وجود ندارند؟
(ت) نمودار تابع f' را رسم کنید.

(الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

(ب) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.

۴ نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن

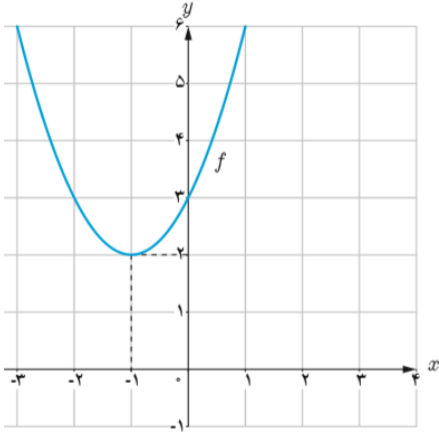
(الف) در یک نقطه برابر صفر شود.

(ب) در تمام نقاط مثبت باشد.

(ث) در تمام نقاط منفی باشد.

(ب) در $x=2$ برابر ۳ شود.

(ت) در تمام نقاط یکسان باشد.



۵

(الف) با استفاده از نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x + 3$ (شکل مقابل) مقادیر زیر را به ترتیب صعودی مرتب کنید.

$$f'(2) \text{ و } f'(-1) \text{ و } f'(0) \text{ و } f'(3)$$

(ب) صحت ادعای خود در (الف) را با محاسبه مشتق تابع

$$f(x) = x^2 + 2x + 3 \text{ بررسی کنید.}$$

(پ) تابع مشتق را رسم کنید.

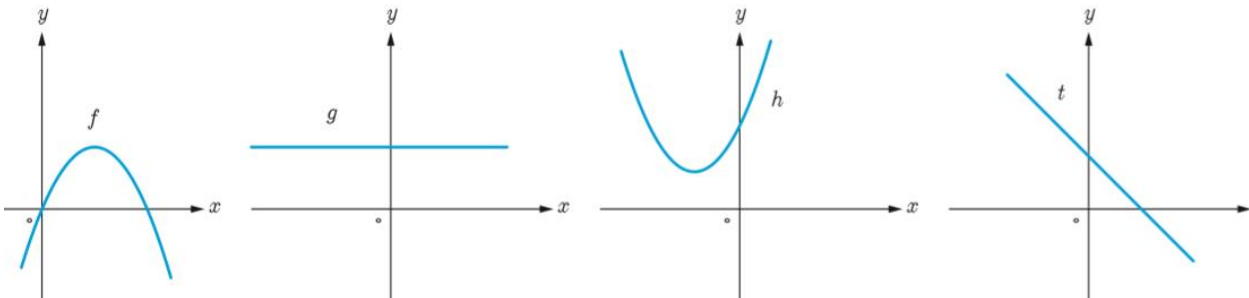
۶ مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$ را در نقطه $x=1$ بررسی کنید.

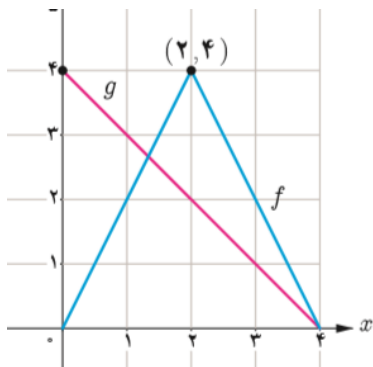
۷ سه تابع مختلف مثال بزنید که مشتق آنها با هم برابر باشند.

۸ اگر $f(x) = |x^2 - 4|$ به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری f را در نقاط به طول های ۲ و -۲ بررسی کنید.

۹ مشتق تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ را به دست آورده و مشخص کنید در چه نقطه ای مماس قائم دارد؟

۱۰ نمودار توابع f و g و h و t را به نمودار مشتق آنها، نظیر کنید.





۱۱ نمودار توابع f و g را در شکل مقابل در نظر بگیرید.

الف) اگر $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ مطلوب است $h'(1)$ ، $h'(2)$ و $h'(3)$

ب) اگر $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است، $k'(1)$ ، $k'(2)$ و $k'(3)$

۱۲ اگر $f'(1) = 3$ و $g'(1) = 5$ مطلوب است، $(f+g)'(1)$ و $(3f+2g)'(1)$

۱۳ اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست.

۱۴ مشتق توابع داده شده را به دست آورید.

الف) $f(x) = (3x^2 - 4)(2x - 5)^2$

پ) $f(x) = (\sqrt{3x+2})(x^3 + 1)$

ب) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{-3x + 2}$

ت) $f(x) = \frac{9x - 2}{\sqrt{x}}$

۱۵ اگر $f(x) = 5x^3 - 4x^2 - 3x$ مقدار $f''(-1)$ را به دست آورید.

آهنگ تغییر متوسط و لحظه‌ای

به طور کلی آهنگ متوسط تغییر یک تابع را در بازه‌ای مانند $[a, a+h]$ به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع } f \text{ در بازه } [a, a+h] = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

همچنین آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع } f \text{ در نقطه } x=a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

آهنگ متوسط تغییر با شیب خط قاطع و آهنگ لحظه‌ای تغییر با مقدار مشتق و شیب خط مماس در آن نقطه برابرند.

مثال:

آهنگ رشد: همان‌گونه که در حسابان (۱) ملاحظه کردید تابع $f(x) = \sqrt{x} + 50$ قد متوسط کودکان را بر حسب سانتی‌متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد، که در آن x مدت زمان پس از تولد (بر حسب ماه) است. آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی $[0, 60]$ چنین است:

$$\frac{f(60) - f(0)}{60 - 0} = \frac{\sqrt{60} + 50 - 50}{60} \approx 0.09 \frac{\text{سانتی‌متر}}{\text{ماه}}$$

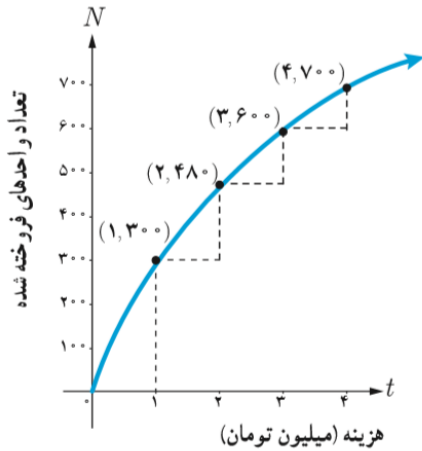
یعنی در طی ۵ سال، رشد متوسط قد حدود ۰/۹ سانتی‌متر در هر ماه است.

الف) آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی $[0, 25]$ چقدر است؟

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر قد کودک را در ۲۵ ماهگی و ۴۹ ماهگی، با هم مقایسه کنید. کدام یک بیشتر است؟

پ) اگر قد علی در ۱۶ ماهگی، ۸۰ سانتی‌متر و در ۳۶ ماهگی، ۹۵ سانتی‌متر باشد، آهنگ متوسط تغییر رشد او را در این فاصله حساب کنید و با نمودار بالا مقایسه کنید.

تمرین:



۳ نمودار روبه‌رو نمایش میزان فروش تعداد نوعی کالا (N) پس از صرف t میلیون تومان هزینه برای تبلیغ است. الف) آهنگ تغییر N بر حسب t را وقتی t از ۱ تا ۲، ۲ تا ۳ و ۳ تا ۴ تغییر می‌کند به دست آورید.

ب) به نظر شما چرا آهنگ تغییرات، وقتی که مقادیر t افزایش می‌یابند، در حال کاهش است؟

۴ معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 1$ بر حسب متر در بازه زمانی $[0, 5]$ (بر حسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 5]$ با هم برابرند؟

۷ یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + 2t^3$ گرم است.

الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $3 \leq t \leq 4$ چند گرم افزایش می‌یابد؟
ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t=3$ چقدر است؟

۸ گنجایش ظرفی 40 لیتر مایع است. در لحظه $t=0$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V = 40 \left(1 - \frac{t}{10}\right)^2$ به دست آید:

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[0, 10]$ چقدر است؟
ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0, 10]$ می‌شود؟