اگرچه نیت خوبی است زیستن ...
اما خوشا که دست به تصمیم بهتری بزنیم !

بسم الله الرحمن الرحیم

مقدمه

کتاب حاضر که براساس مطالب کتاب درسی، مبحث «کاربرد مشتق» نگارش شده است، دارای ویژگی های زیر است:

۱- باز کردن مفاهیمی که در کتاب درسی به علت محدودیت حجم، به آن کمتر پرداخته شده است.

۲- مطالب به صورت ساده و روان و به زبان دانش آموز ارائه شده است.

۳- مطالب و نکات، به گونه ایی است که خلأ بین مطالب ارائه شده در کتب درسی و سؤالات مطرح شده در کنکورهای سراسری را پر کند.

۴- در این کتاب با نگاهی عمیق‌تر و جامع‌تر از کتاب در سی، به مطالب پرداخته شده و به همین منظور از مثال‌ها و مسائل حل شده متنوعی بهره گرفته ایم.

۵- ایجاد تعادل نسبی بین مهارت های محاسبات صوری و درک مفهومی.

۶- استفاده از مسائل باز پاسخ.

۷-توجه به دانش قبلی دانش آموزان.

۸- ایجاد اتصال و ارتباط بین جنبه های متفاوت یک مفهوم و نیز بین یک مفهوم و دیگر مفاهیم کتاب.

در پایان امیدواریم که مطالعه ی دقیق این کتاب و بهره گیری از رهنمودهای دبیران فرهیخته و گران قدر بتواند موفقیت تحصیلی شما خوبان را تضمین و تثبیت نماید. ارائه ی نظرات شما دانش پژوهان، دبیران فرهیخته و گران قدر، موجب سپاس و امتنان است.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

درس دوم: بهینه سازی

مسائل بهینه سازی، مسائلی هستند که در آن‌ها، به دنبال یافتن ماگزیمم یا مینیمم (مطلق) یک کمیت مانند حجم، مساحت، محیط، هزینه و ... هستیم. به عنوان مثال، یک شرکت تولیدی همواره به دنبال کم کردن هزینه و بیش‌تر کردن سود است..

برای حل مسائل بهینه سازی ۵مرحله ی زیر را انجام می دهیم:

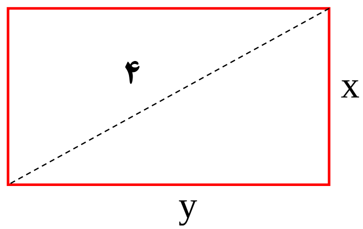
مرحله ۱: رسم شکل(در صورت امکان) و نوشتن معادله تابع هدف:

در صورت امکان شکل مناسبی برای مسئله رسم می‌کنیم روی شکل اطلاعات مسأله را پیاده کرده و مقادیر مجهول را با x و y یا ... نامگذاری می‌کنیم.

سپس کمیتی که قرار است ماگزیمم یا مینیمم آن را به دست آوریم را مشخص کرده و تابع مرتبط با آن کمیت را با توجه به مسأله می‌نویسیم. به این تابع ، **تابع هدف** می گوییم

مثلاً اگر بخواهیم مساحت یک مستطیل را ماگزیمم کنیم، کمیت موردهدف، مساحت مستطیل بوده که تابع آن با توجه به شکل زیر از دو متغیر xوy تشکیل شده است وبه صورت زیر است:

$$\text{مساحت} = S = xy$$



مرحله ۲: نوشتن معادله کمکی:

تابع هدف یک معادله دو متغیره است که بایستی به یک معادله یک متغیره تبدیل شود . برای این کار از معادله کمکی استفاده می کنیم

دقت کنیم :برای نوشتن معادله کمکی حالت های زیر وجود دارند

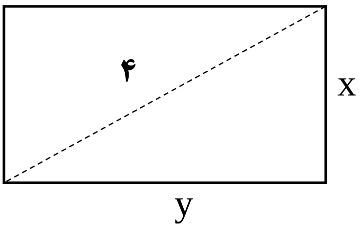
الف) در صورت مساله رابطه‌ای بین متغیرها داده شده باشد:

مثال :اگر $۲x + y = ۱۰۰$ باشد، ماگزیمم xy را به‌دست آورید. $(x,y>۰)$

در این مثال رابطه‌ی کمکی را خودِ مسأله داده که به صورت $۲x + y = ۱۰۰$ است.

ب) در شکلی که رسم نموده‌ایم رابطه‌ای بین متغیرها به وجود می‌آید.

مثل رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث‌های قائم الزاویه. خوبی این رابطه‌ی کمکی این است که دو متغیر را به هم مرتبط می‌کند **مثلاً** رابطه‌ی کمکی در شکل مقابل به صورت زیر است:



$$\Rightarrow \text{رابطه‌ی کمکی}:\ x^۲ + y^۲ = ۴^۲ \Rightarrow x^۲ + y^۲ = ۱۶$$

ج) از روابطی که قبل خوانده ایم استفاده می کنیم مانند رابطه بین سرعت – زمان $t = \frac{x}{v}$

مرحله ۳: نوشتن یک متغیر برحسب متغیردیگر در رابطه کمکی :

بعد از نوشتن رابطه‌ی کمکی، باید یک متغیر را بر حسب دیگر به دست آورد

$$\text{رابطه‌ی کمکی} \Rightarrow x^۲ + y^۲ = ۱۶ \Rightarrow \begin{cases} y^۲ = ۱۶ - x^۲ \xrightarrow{y>۰} y = \sqrt{۱۶ - x^۲} \\ \text{یا} \\ x^۲ = ۱۶ - y^۲ \xrightarrow{x>۰} x = \sqrt{۱۶ - y^۲} \end{cases}$$

پیشنهاد : برای راحتی کار بهتراست y را برحسب متغیر x بنویسیم.(کاری کنیم y تنها شود)

مرحله ۴:جایگذاری رابطه کمکی در تابع هدف

رابطه‌ی کمکی در مرحله قبل را در تابع هدف جایگذاری کنیم تا تابع هدف به یک معادله تک متغیره تبدیل شود.

$$\text{مساحت} = S = xy \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\text{رابطه کمکی } y=\sqrt{۱۶-x^۲}} S = x\sqrt{۱۶-x^۲} \quad \text{تابع هدف} \\ \xrightarrow{\text{رابطه کمکی } x=\sqrt{۱۶-y^۲}} S = \sqrt{۱۶-y^۲}\,.\,y \quad \text{تابع هدف} \end{cases}$$

پیشنهاد : برای راحتی کار بهتراست به جای y درتابع هدف، معادله کمکی راقرار دهیم تا تابع هدف برحسب متغیر x به دست آید.

مرحله ۵: به دست آوردن ماکزیمم یا مینیمم مطلق:

از معادله‌ی به دست آمده (معادله هدف با یک متغیر) مشتق گرفته و نقاط بحرانی را به دست آورده و ماگزیمم یا مینیمم مطلق تابع را به دست می‌آوریم.

مسایل مربوط به بهینه سازی را می توان به ۴دسته زیر تقسیم کرد :

دسته اول) مسایل مربوط به بیشترین و کمترین مقدار

مثال :اگر $2x + y = 100$ باشد، ماگزیمم *xy* را به‌دست آورید. *(x,y>۰)*

مرحله ۱:نوشتن معادله تابع هدف

می‌خواهیم ماگزیمم *xy* را به دست آوریم. پس فرض می‌کنیم *S=xy* باشد(تابع هدف)

مرحله ۲:نوشتن رابطه کمکی

در این مثال رابطه‌ی کمکی را خودِ مسأله داده، یعنی ۲*x*+*y*=۱۰۰ (معادله کمکی)

مرحله ۳:نوشتن یک متغیر برحسب متغیردیگر در رابطه کمکی

از معادله‌ی کمکی، *y* را بر حسب *x* می‌نویسیم (کاری می کنیم *y* تنها شود)

$$۲x + y = ۱۰۰ \Rightarrow y = ۱۰۰ - ۲x$$

مرحله ۴:جایگذاری معادله کمکی در تابع هدف

$$S = xy \xrightarrow{y=۱۰۰-۲x} S = -۲x^۲ + ۱۰۰x$$

مرحله۵: به دست آوردن مقدارماکزیمم یا مینیمم مطلق :

نقطه‌ی بحرانی را به دست می‌آوریم، (از $S(x)$ مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم)

$$S' = -۴x + ۱۰۰ \xRightarrow{S'=۰} -۴x + ۱۰۰ = ۰ \Rightarrow ۴x = ۱۰۰ \Rightarrow x = \frac{۱۰۰}{۴} = ۲۵$$

بنابر این با جای‌گذاری x به دست آمده در تابع S ماگزیمم آن را می‌یابیم:

$$S = -۲x^۲ + ۱۰۰x \xRightarrow{x=۲۵} S_{max} = -۲(۲۵)^۲ + ۱۰۰(۲۵)$$

$$\Rightarrow S_{max} = ۲ - (۶۲۵) + ۲۵۰۰ = ۱۲۵۰$$

مثال :اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت و $۳x+۴y=۱۲$ باشد، بیش‌ترین مقدار xy را به دست آورید.

مرحله ۱:نوشتن معادله تابع هدف

می‌خواهیم ماگزیمم xy را به دست آوریم. پس فرض می‌کنیم $S=xy$ باشد(تابع هدف

مرحله۲:نوشتن رابطه کمکی

در این مثال رابطه‌ی کمکی را خودِ مسأله داده، یعنی $۲x+y=۱۰۰$ (معادله کمکی)

مرحله۳:نوشتن یک متغیر برحسب متغیردیگر در رابطه کمکی

از معادله‌ی کمکی،y را بر حسب x می‌نویسیم (کاری می کنیم y تنها شود)

$$۳x+۴y=۱۲ \xrightarrow{\text{را بر حسب } x \text{ می‌نویسیم } y} ۴y=۱۲-۳x \xrightarrow{\div ۴}$$

$$y=\frac{۱}{۴}(۱۲-۳x)$$

مرحله۴:جایگذاری معادله کمکی در تابع هدف

$$S=xy \xRightarrow{y=\frac{۱}{۴}(۱۲-۳x)} S=x\times\frac{۱}{۴}(۱۲-۳x) \Rightarrow$$

$$S(x)=\frac{۱}{۴}(۱۲x-۳x^{۲}) \quad , \quad ۰<x<۴$$

مرحله۵: به دست آوردن مقدارماکزیمم یا مینیمم مطلق :

نقطه‌ی بحرانی را به دست می‌آوریم، (از $S(x)$ مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم)

$$S'(x) = \frac{۱}{۲}(۱۲ - ۶x) \xrightarrow{S'(x)=۰} ۱۲ - ۶x = ۰ \Rightarrow x = ۲$$

$$S(۲) = \frac{۱}{۴}(۲۴ - ۳(۲)^{۲}) = ۳$$

مثال : اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت و $۲x+y=۱۶$ باشد. بیش‌ترین مقدار xy را به دست آورید.

مرحله ۱:نوشتن معادله تابع هدف

می‌خواهیم ماگزیمم xy را به دست آوریم. پس فرض می‌کنیم $S=xy$ باشد(تابع هدف

مرحله۲:نوشتن رابطه کمکی

در این مثال رابطه‌ی کمکی را خودِ مسأله داده، یعنی $۲x+y=۱۶$ (معادله کمکی)

مرحله۳:نوشتن یک متغیر برحسب متغیردیگر در رابطه کمکی

از معادله‌ی کمکی،y را بر حسب x می‌نویسیم (کاری می کنیم y تنها شود)

$$۲x + y = ۱۶ \xrightarrow{\text{را بر حسب } x \text{ می‌نویسیم } y} y = ۱۶ - ۲x$$

مرحله۴:جایگذاری معادله کمکی در تابع هدف

$$S = xy \xrightarrow{y=۱۶-۲x} S(x) = x(۱۶ - ۲x) = -۲x^۲ + ۱۶x$$

مرحله۵: به دست آوردن مقدارماکزیمم یا مینیمم مطلق :

برای به دست آوردن مقدارماکزیمم مطلق ، نقطه‌ی بحرانی را به دست می- آوریم،بنابراین از $S(x)$ مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$S'(x) = -۴x + ۱۶ \xrightarrow{S'(x)=۰} -۴x + ۱۶ = ۰ \Rightarrow ۴x = ۱۶$$

$$\Rightarrow x = ۴ \longrightarrow S(۴) = -۲(۴)^۲ + ۱۶(۴) = ۳۲$$

مثال :مجموع دو عدد مثبت برابر ۱۸ است. بزرگ‌ترین مقدار ممکن برای حاصل ضرب آن‌ها را پیدا کنید. (نهایی – دی ۹۷)

مرحله ۱:نوشتن معادله تابع هدف

فرض کنیم x و y دو عدد مثبت باشند می‌خواهیم ماگزیمم xy را به دست آوریم. پس فرض می‌کنیم $S=xy$ باشد(تابع هدف)

مرحله۲:نوشتن رابطه کمکی

در این مثال رابطه‌ی کمکی برابر $x + y = ۱۸$ است. (معادله کمکی)

مرحله۳:نوشتن یک متغیر برحسب متغیردیگر در رابطه کمکی

از معادله‌ی کمکی،y را بر حسب x می‌نویسیم (کاری می کنیم y تنها شود)

$$x+y=۱۸ \xrightarrow{\text{را بر حسب } x \text{ می‌نویسیم } y} y=۱۸-x$$

مرحله۴:جایگذاری معادله کمکی در تابع هدف

$$S=xy \xRightarrow{y=۱۸-x} S(x)=x(۱۸-x)=۱۸x-x^{۲} \ ,$$
$$x\in(۰,۱۸)$$

مرحله۵: به دست آوردن مقدارماکزیمم یا مینیمم مطلق :

برای به دست آوردن مقدارماکزیمم مطلق ، نقطه‌ی بحرانی را به دست می-آوریم،بنابراین از $S(x)$ مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\Rightarrow S'(x)=۱۸-۲x \xRightarrow{S'(x)=۰} ۱۸-۲x=۰ \Rightarrow x=۹$$

$$\Rightarrow S(۹)=۱۸\times۹-۹^{۲}=۸۱$$

مثال : اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند به طوری که $xy=۲۴$ کم‌ترین مقدار عبارت $۳x+۸y$ را به‌دست آورید.

مرحله ۱:نوشتن معادله تابع هدف

می‌خواهیم مینیمم $۳x + ۸y$ را به دست آوریم. پس فرض می‌کنیم

$P = ۳x + ۸y$ باشد(تابع هدف)

مرحله ۲:نوشتن رابطه کمکی

در این مثال رابطه‌ی کمکی را خودِ مسأله داده، یعنی $xy = ۲۴$ (معادله کمکی)

مرحله ۳:نوشتن یک متغیر برحسب متغیردیگر در رابطه کمکی

از معادله‌ی کمکی، y را بر حسب x می‌نویسیم (کاری می کنیم y تنها شود)

$$xy = ۲۴ \xrightarrow{\text{می‌نویسیم } x \text{ را بر حسب } y} y = \frac{۲۴}{x}$$

مرحله ۴:جایگذاری معادله کمکی در تابع هدف

$$P = ۳x + ۸y \xrightarrow{y=\frac{۲۴}{x}} P(x) = ۳x + ۸ \times \frac{۲۴}{x} = ۳x + \frac{۱۹۲}{x}$$

مرحله ۵: به دست آوردن ماکزیمم یا مینیمم مطلق

برای به دست آوردن مقدارمینیمم مطلق ، نقطه‌ی بحرانی را به دست می-آوریم،بنابراین از $P(x)$ مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$P'(x) = ۳ - \frac{۱۹۲}{x^۲} \xRightarrow{P'(x)=۰} ۳ = \frac{۱۹۲}{x^۲} \Rightarrow x^۲ = ۶۴ \Rightarrow x = ۸$$

به ازای $x = ۸$، کم‌ترین مقدار $P(x)$ به دست می‌آید و داریم:

$$P_{min} = ۳(۸) + \frac{۱۹۲}{۸} = ۲۴ + ۲۴ = ۴۸$$

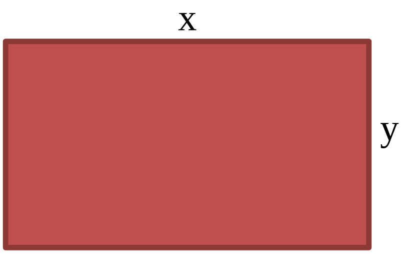
دسته دوم) مسایل مربوط به بیشترین و کمترین مقدار محیط و مساحت

مثال :ازبین تمام مستطیل‌های با محیط ۲۴ سانتی‌متر، مستطیل با بیش-ترین مقدار مساحت را مشخص کنید.

(مشابه مثال ۱ صفحه‌ی ۱۱۴ کتاب درسی)

مرحله ۱: رسم شکل و نوشتن معادله تابع هدف

فرض کنیم x و y به ترتیب طول و عرض مستطیل، مطابق شکل باشد:



می‌خواهیم مساحت مستطیل، یعنی $S=xy$ بیش‌ترین مقدار شود.(تابع هدف)

مرحله۲:نوشتن رابطه کمکی

طبق فرض، محیط مستطیل برابر ۲۴ سانتی متر است:(معادله کمکی)

$$P = ۲(x + y) = ۲۴$$

مرحله۳: نوشتن یک متغیر برحسب متغیردیگر در رابطه کمکی :

از معادله‌ی کمکی،y را بر حسب x می‌نویسیم (کاری می کنیم y تنها شود)

$$P = ۲(x + y) = ۲۴ \Rightarrow x + y = ۱۲ \xrightarrow{\text{را بر حسب } x \text{ می‌نویسیم } y}$$

$$y = ۱۲ - x$$

مرحله ۴:جایگذاری رابطه کمکی در تابع هدف

$$S = xy \xRightarrow{y=۱۲-x} S(x) = x(۱۲ - x) = ۱۲x - x^۲ \quad ,$$
$$x \in (۰,۱۲)$$

مرحله ۵: به دست آوردن ماکزیمم یا مینیمم مطلق:

برای به دست آوردن مقدارماکزیمم مطلق ، نقطه‌ی بحرانی را به دست می-آوریم،بنابراین از $S(x)$ مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$S'(x) = ۱۲ - ۲x \xRightarrow{S'(x)=۰} ۱۲ - ۲x = ۰ \Rightarrow ۲x = ۱۲ \Rightarrow x = ۶$$

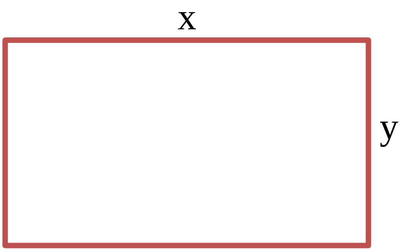
به ازای $x = ۶$, $S(x)$ بیش‌ترین مقدار را دارد و داریم:

$$S(۶) = ۱۲ \times ۶ - ۶^۲ = ۳۶$$

مثال :از بین تمام مستطیل‌ها با مساحت ۱۶، مستطیل با کم‌ترین محیط را مشخص کنید.

مرحله ۱: رسم شکل و نوشتن معادله تابع هدف

فرض کنیم x و y به ترتیب طول و عرض مستطیل، مطابق شکل باشد:



می‌خواهیم محیط مستطیل، یعنی $P = ۲(x + y)$ کم‌ترین مقدار شود.(تابع هدف)

مرحله ۲:نوشتن رابطه کمکی

طبق فرض، مساحت مستطیل برابر ۱۶ است:(معادله کمکی)

$$S = xy \ = ۱۶$$

مرحله ۳: نوشتن یک متغیر برحسب متغیردیگر در رابطه کمکی :

از معادله‌ی کمکی،y را بر حسب x می‌نویسیم (کاری می کنیم y تنها شود)

$$xy = ۱۶ \Rightarrow y = \frac{۱۶}{x}$$

مرحله ۴:جایگذاری رابطه کمکی در تابع هدف

$$P = ۲(x + y) \xrightarrow{y=\frac{۱۶}{x}} P(x) = ۲\left(x + \frac{۱۶}{x}\right)$$

مرحله ۵: به دست آوردن ماکزیمم یا مینیمم مطلق:

برای به دست آوردن مقدار مینیمم مطلق ، نقطه‌ی بحرانی را به دست می-آوریم،بنابراین از $P(x)$ مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$P'(x) = ۲(۱ - \frac{۱۶}{x^۲}) \Rightarrow P'(x) = \frac{۲(x^۲ - ۱۶)}{x^۲} \xRightarrow{P'(x)=۰} x^۲ - ۱۶ = ۰ \xrightarrow{x>۰} \mathrm{x} = ۴$$

کم‌ترین مقدار $P(x)$ به ازای x=۴ به دست می‌آید و داریم:

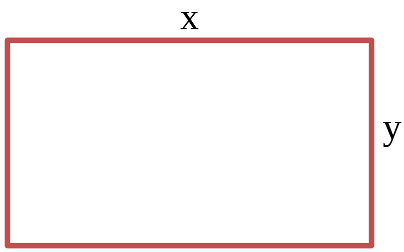
$$y = \frac{۱۶}{x} \xrightarrow{x=۴} y = \frac{۱۶}{۴} = ۴$$

$$P = ۲(x + y) \xRightarrow{x=۴ \text{ و } y=۴} P = ۲(۴ + ۴) = ۱۶$$

مثال :کم‌ترین محیط مستطیل که مساحت آن ۱۸ واحد مربع باشد، را به دست آورید.

مرحله ۱: رسم شکل و نوشتن معادله تابع هدف

فرض کنیم x و y به ترتیب طول و عرض مستطیل، مطابق شکل باشد:



می‌خواهیم محیط مستطیل، یعنی $P = ۲(x + y)$کم‌ترین مقدار شود.(تابع هدف)

مرحله ۲:نوشتن رابطه کمکی

طبق فرض، مساحت مستطیل برابر ۱۸ است:(معادله کمکی)

$$S = xy = ۱۸$$

مرحله۳: نوشتن یک متغیر برحسب متغیردیگر در رابطه کمکی :

از معادله‌ی کمکی،y را بر حسب x می‌نویسیم (کاری می کنیم y تنها شود)

$$xy = ۱۸ \Rightarrow y = \frac{۱۸}{x}$$

مرحله ۴:جایگذاری رابطه کمکی در تابع هدف:

$$P = ۲(x+y) \xrightarrow{y=\frac{۱۸}{x}} P(x) = ۲\left(x + \frac{۱۸}{x}\right)$$

مرحله ۵: به دست آوردن ماکزیمم یا مینیمم مطلق:

برای به دست آوردن مقدار مینیمم مطلق ، نقطه‌ی بحرانی را به دست می-آوریم،بنابراین از $P(x)$ مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

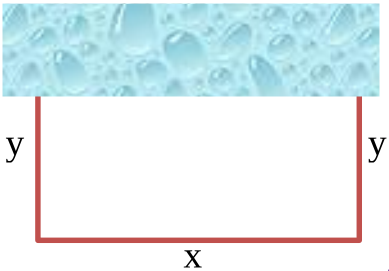
$$P'(x) = ۲(۱ - \frac{۱۸}{x^۲}) \Rightarrow P'(x) = \frac{۲(x^۲ - ۱۸)}{x^۲} \xRightarrow{P'(x)=۰} x^۲ - ۱۸ = ۰ \xrightarrow{x>۰} \mathrm{x} = ۳\sqrt{۲}$$

کم‌ترین مقدار $P(x)$ به ازای $\mathrm{x} = ۳\sqrt{۲}$ به دست می‌آید و داریم:

$$y = \frac{۱۸}{x} \xrightarrow{\mathrm{x}=۳\sqrt{۲}} y = \frac{۱۸}{۳\sqrt{۲}} = \frac{۶}{\sqrt{۲}} = ۳\sqrt{۲}$$

$$P = ۲(x+y) \xRightarrow{\mathrm{x}=۳\sqrt{۲} \text{ و } y=۳\sqrt{۲}} P = ۲\left(۳\sqrt{۲} + ۳\sqrt{۲}\right) = ۱۲\sqrt{۲}$$

مثال : بیش‌ترین مساحت زمینی مستطیل شکل را که می‌توان توسط یک طناب، از زمینی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود، ۶۴۸ متر مربع است. طول طناب چند متر است؟



مرحله ۱: رسم شکل و نوشتن معادله تابع هدف

با توجه به شکل، طول طناب برابر $x + ۲y$ است:

می‌خواهیم طول طناب برابر $x + ۲y$ کم‌ترین مقدار شود.(تابع هدف)

مرحله۲:نوشتن رابطه کمکی

طبق فرض، مساحت مستطیل برابر ۶۴۸ است:(معادله کمکی)

$$S = xy = ۶۴۸$$

مرحله۳: نوشتن یک متغیر برحسب متغیردیگر در رابطه کمکی :

از معادله‌ی کمکی،y را بر حسب x می‌نویسیم (کاری می کنیم y تنها شود)

$$xy = ۶۴۸ \Rightarrow y = \frac{۶۴۸}{x}$$

مرحله ۴:جایگذاری رابطه کمکی در تابع هدف

$$L = x + ۲y \xrightarrow{y=\frac{۶۴۸}{x}} L(x) = x + \frac{۲ \times ۶۴۸}{x}$$

مرحله ۵: به دست آوردن ماکزیمم یا مینیمم مطلق:

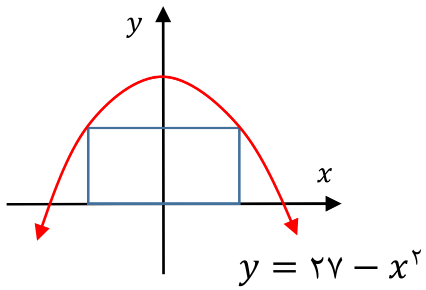
برای به دست آوردن مقدار مینیمم مطلق ، نقطه‌ی بحرانی را به دست می-آوریم،بنابراین از $L(x)$ مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$L'(x) = ۱ - \frac{۱۲۹۶}{x^۲} = \frac{x^۲ - ۱۲۹۶}{x^۲}$$

$$\xRightarrow{L'(x)=۰} x^۲ - ۱۲۹۶ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۱۲۹۶ \xrightarrow{x>۰} x = ۳۶ \Rightarrow L(۳۶)$$
$$= ۳۶ + \frac{۲ \times ۶۴۸}{۳۶} = ۷۲$$

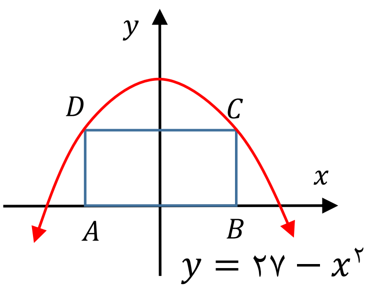
مثال : مستطیل در سهمی $y = 27 - x^2$ طوری محاط شده است که یک ضلع آن روی محور xها و دو رأس آن روی سهمی مطابق شکل می‌باشد. ماگزیمم مساحت این مستطیل را به‌دست آورید.

(مشابه تمرین ۳ صفحه‌ی ۱۶۰ کتاب درسی)



مرحله ۱: رسم شکل و نوشتن معادله تابع هدف

مطابق شکل، راس های مستطیل را با نقاط D , CوBوA مشخص می کنیم.



می‌خواهیم مساحت مستطیل، یعنی $S = AB \times BC$ بیشترین مقدار شود.(تابع هدف)

مطابق شکل، اگر طول نقطه‌ی B برابر x باشد، آن‌گاه طول مستطیل برابر $AB = ۲x$ است.

اگر عرض نقطه‌ی C برابر y باشد،، آن‌گاه عرض مستطیل برابر $BC = y$ است.

بنابراین

$$S = AB \times BC \xRightarrow{AB=۲x \text{ و } BC=y} S = ۲x.y$$

مرحله۲:نوشتن رابطه کمکی

طبق فرض،معادله سهمی برابر $y = ۲۷ - x^۲$ است:(معادله کمکی)

مرحله۳: نوشتن یک متغیر برحسب متغیردیگر در رابطه کمکی :

از معادله‌ی کمکی،y را بر حسب x می‌نویسیم (کاری می کنیم y تنها شود)

(در این سوال y برحسبx داده شده است)

$$y = ۲۷ - x^۲$$

مرحله ۴:جایگذاری رابطه کمکی در تابع هدف

$$S = ۲x \times y \xrightarrow{y=۲۷-x^۲} \Rightarrow S(x) = ۲x \times (۲۷ - x^۲)$$
$$= ۵۴x - ۲x^۳$$

مرحله ۵: به دست آوردن ماکزیمم یا مینیمم مطلق:

برای به دست آوردن مقدار ماکزیمم مطلق ، نقطه‌ی بحرانی را به دست می-آوریم،بنابراین از $S(x)$ مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

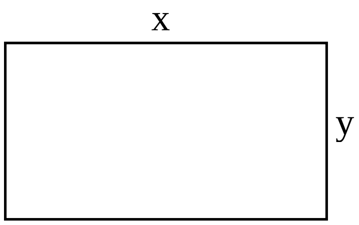
$$S'(x) = ۵۴ - ۶x^۲ \xrightarrow{S'(x)=۰} ۵۴ - ۶x^۲ = ۰ \Rightarrow ۶x^۲ = ۵۴ \Rightarrow x^۲$$
$$= \frac{۵۴}{۶} = ۹ \xrightarrow{x>۰} x = ۳ \Rightarrow$$

$$S(۳) = ۵۳ \times ۳ - ۲ \times (۳)^۳ = ۱۵۹ - ۵۴ = ۱۰۵$$

مثال : کشاورزی می‌خواهد در مزرعه‌ی خود، زمینی مستطیل شکل به مساحت ۳۰۰۰ متر مربع را جدا کند و آن را دیوارکشی کند. اگر هزینه‌ی هر متر دیوارهای شمالی و جنوبی دویست و پنجاه هزارتومان و هزینه‌ی هر متر دیوارهای شرقی و غربی یک میلیون تومان باشد، کم‌ترین هزینه‌ی دیوارکشی چند هزار تومان است؟(مشابه تمرین ۱ صفحه‌ی ۱۲۰ کتاب درسی)

مرحله ۱: رسم شکل و نوشتن معادله تابع هدف

اگر x و y به ترتیب طول و عرض مستطیل باشد، آن‌گاه:



می‌خواهیم هزینه دیوارکشی ، کمترین مقدار شود.(تابع هدف)

هزینه کل = (اندازه ضلع شمالی + اندازه ضلع جنوبی) × (هزینه یک متر) +
(اندازه ضلع شرقی + اندازه ضلع غربی) × (هزینه یک متر)

$$C = (x + x) \times ۲۵۰۰۰۰ + (y + y) \times ۱۰۰۰۰۰۰ \Rightarrow$$

$$C = ۵۰۰۰۰۰x + ۲۰۰۰۰۰۰y$$

مرحله۲:نوشتن رابطه کمکی

طبق فرض، مساحت مستطیل برابر ۳۰۰۰ است:(معادله کمکی)

$$S = xy \ = ۳۰۰۰$$

مرحله۳: نوشتن یک متغیر برحسب متغیردیگر در رابطه کمکی :

از معادله‌ی کمکی،y را بر حسب x می‌نویسیم (کاری می کنیم y تنها شود)

$$xy = ۳۰۰۰ \Rightarrow y = \frac{۳۰۰۰}{x}$$

مرحله ۴:جایگذاری رابطه کمکی در تابع هدف

$$C = ۵۰۰۰۰۰x + ۲۰۰۰۰۰۰y \xrightarrow{y=\frac{۳۰۰۰}{x}} C(x)$$
$$= ۵۰۰۰۰۰x + ۲۰۰۰۰۰۰ \times \frac{۳۰۰۰}{x}$$
$$= ۵۰۰۰۰۰\left(x + \frac{۱۲۰۰۰}{x}\right)$$

مرحله ۵: به دست آوردن ماکزیمم یا مینیمم مطلق:

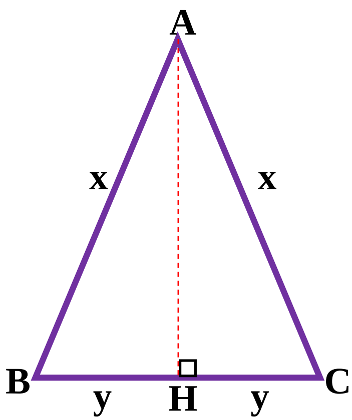
برای به دست آوردن مقدار مینیمم مطلق ، نقطه‌ی بحرانی را به دست می-آوریم،بنابراین از $C(x)$ مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$C'(x) = ۰ \Rightarrow ۵۰۰۰۰۰\left(۱ + \frac{-۱۲۰۰۰}{x^۲}\right) = ۵۰۰۰۰۰\left(\frac{x^۲ - ۱۲۰۰۰}{x^۲}\right) = ۰$$
$$\Rightarrow x^۲ - ۱۲۰۰۰ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۳۰ \times ۲۰^۲ \Rightarrow x = ۲۰\sqrt{۳۰}$$
$$\Rightarrow C(۲۰\sqrt{۳۰}) = ۵۰۰۰۰۰\left(۲۰\sqrt{۳۰} + \frac{۱۲۰۰۰}{۲۰\sqrt{۳۰}}\right)$$

مثال : می‌خواهیم کنار یک رودخانه یک محوطه را به شکل مثلث متساوی الساقین در بیاوریم به طوری که بیش‌ترین مساحت ممکن را داشته باشد.اگر تنها، هزینه‌ی ۱۲۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، ماگزیمم مساحت این مثلث کدام است؟ (مشابه تمرین ۲ صفحه‌ی ۱۲۰کتاب درسی)

مرحله ۱: رسم شکل و نوشتن معادله تابع هدف

در مثلث متساوی الساقین زیر ، ارتفاع وارد بر قاعده را رسم کرده‌ایم:



می‌خواهیم مثلث بیشترین مساحت را داشته باشد(تابع هدف)

مساحت مثلث برابر است با: $S = \frac{AH \times BC}{۲}$

طول ارتفاع AH را بر حسب x و y می‌نویسیم:

$$\xrightarrow{\text{رابطه فیثاغورس}} AH^{۲} = x^{۲} - y^{۲} \Rightarrow AH = \sqrt{x^{۲} - y^{۲}}$$

$$BC = ۲y$$

در نتیجه:

$$S = \frac{AH \times BC}{۲} \xrightarrow{AH=\sqrt{x^{۲}-y^{۲}} \text{ و } BC=۲y} S = \frac{\sqrt{x^{۲} - y^{۲}} \times (۲y)}{۲}$$

$$\Rightarrow S = y\sqrt{x^{۲} - y^{۲}}$$

مرحله۲:نوشتن رابطه کمکی

طبق فرض، محیط مثلث برابر ۱۲۰ می‌باشد(معادله کمکی)

بنابر این:

$$۲y + ۲x = ۱۲۰$$

مرحله۳: نوشتن یک متغیر برحسب متغیردیگر در رابطه کمکی :

از معادله‌ی کمکی،y را بر حسب x می‌نویسیم (کاری می کنیم y تنها شود)

$$\Rightarrow y + x = ۶۰ \Rightarrow y = ۶۰ - x$$

مرحله ۴:جایگذاری رابطه کمکی در تابع هدف

$$S = y\sqrt{x^{۲} - y^{۲}} \xRightarrow{y=۶۰-x} S = (۶۰ - x)\sqrt{x^{۲} - (۶۰ - x)^{۲}}$$

$$\Rightarrow S(x) = (۶۰ - x)\sqrt{x^{۲} - (۳۶۰۰ - ۱۲۰x + x^{۲})}$$
$$= (۶۰ - x)\sqrt{۱۲۰x - ۳۶۰۰}$$

مرحله ۵: به دست آوردن ماکزیمم یا مینیمم مطلق:

برای به دست آوردن مقدار ماکزیمم مطلق ، نقطه‌ی بحرانی را به دست می-آوریم،بنابراین از $S(x)$ مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$S'(x) = (-۱)\left(\sqrt{۱۲۰x - ۳۶۰۰}\right) + \frac{۱۲۰}{۲\sqrt{۱۲۰x - ۳۶۰۰}}(۶۰ - x)$$

$$\xRightarrow{\text{مخرج مشترک}} S'(x) = \frac{-۱۲۰x + ۳۶۰۰ + ۳۶۰۰ - ۶۰x}{\sqrt{۱۲۰x - ۳۶۰۰}}$$

$$= \frac{-۱۸۰x + ۷۲۰۰}{\sqrt{۱۲۰x - ۳۶۰۰}} = ۰ \Rightarrow -۱۸۰x + ۷۲۰۰ = ۰ \Rightarrow x = ۴۰$$

$$\Rightarrow S(۴۰) = (۶۰ - ۴۰)\sqrt{۴۰^{۲} - (۶۰ - ۴۰)^{۲}} = ۲۰\sqrt{۱۶۰۰ - ۴۰۰}$$
$$= ۲۰\sqrt{۱۲۰۰} = ۴۰۰\sqrt{۳}$$

مثال : هر صفحه‌ی یک کتاب شامل یک متن با ۷۲ سانتی متر مربع است. هنگام طراحی این کتاب، باید حاشیه‌های بالا و پایین برای هر صفحه به اندازه‌ی ۲ سانتی متر و حاشیه‌های کناری هر کدام به اندازه‌ی یک سانتی متر در نظر گرفته شود. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کم‌ترین مقدار ممکن شود.

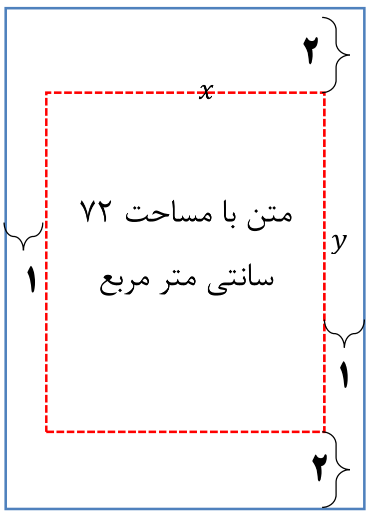
(مشابه تمرین ۴ صفحه‌ی ۱۲۰کتاب درسی)

مرحله ۱: رسم شکل و نوشتن معادله تابع هدف

می خواهیم مساحت کل صفحه(مستطیل بزرگ) کم‌ترین مقدار شود.(تابع هدف)

$$S = \left(\text{طول}\right)\left(\text{عرض}\right)$$

طبق شکل، داریم:



$$\text{عرض صفحه} = x + ۱ + ۱ = x + ۲$$

$$\text{طول صفحه} = y + ۲ + ۲ = y + ۴$$

بنابراین:

$$S = (x + ۲)(y + ۴) = xy + ۴x + ۲y + ۸$$

مرحله۲:نوشتن رابطه کمکی

با توجه به فرض سوال مساحت مستطیل کوچک برابر ۷۲ است.(معادله کمکی)

$$\text{مساحت مستطیل کوچک} = ۷۲ \Rightarrow xy = ۷۲$$

مرحله۳: نوشتن یک متغیر برحسب متغیردیگر در رابطه کمکی :

از معادله‌ی کمکی،y را بر حسب x می‌نویسیم (کاری می کنیم y تنها شود)

$$xy = ۷۲ \Rightarrow y = \frac{۷۲}{x}$$

مرحله ۴:جایگذاری رابطه کمکی در تابع هدف:

$$S = xy + ۴x + ۲y + ۸ \xrightarrow{y=\frac{۷۲}{x}} S = ۷۲ + ۴x + ۲ \times \left(\frac{۷۲}{x}\right) + ۸$$

$$\Rightarrow S(x) = ۸۰ + ۴x + \frac{۱۴۴}{x}$$

مرحله ۵: به دست آوردن ماکزیمم یا مینیمم مطلق:

برای به دست آوردن مقدار مینیمم مطلق ، نقطه‌ی بحرانی را به دست می-آوریم،بنابراین از $S(x)$ مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$S'(x) = ۴ - \frac{۱۴۴}{x^۲} = \frac{۴x^۲ - ۱۴۴}{x^۲}, S'(x) = ۰ \Rightarrow ۴x^۲ - ۱۴۴ = ۰$$

$$\Rightarrow ۴x^۲ = ۱۴۴ \Rightarrow x^۲ = ۳۶ \Rightarrow x = ۶$$

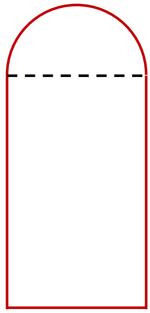
$$y = \frac{۷۲}{x} \xrightarrow{x=۶} y = \frac{۷۲}{۶} = ۱۲$$

بنابر این:

$$\text{طول صفحه} = y + ۴ \xrightarrow{y=۱۲} \text{طول صفحه} = ۱۲ + ۴ = ۱۶$$

$$\text{عرض صفحه} = x + ۲ \xrightarrow{x=۶} \text{عرض صفحه} = ۶ + ۲ = ۸$$

مثال : در پنجره‌ی شکل مقابل، قطر نیم دایره با عرض مستطیل برابر است. اگر محیط پنجره برابر ۶ متر باشد، ابعاد آن را طوری به دست آورید که پنجره بیش‌ترین نوردهی را داشته باشد.

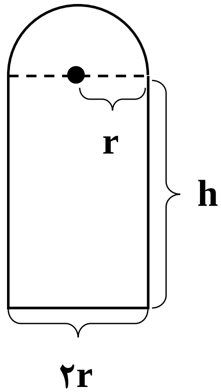


(مشابه مثال ۴ صفحه‌ی ۱۱۶کتاب درسی)

مرحله ۱: رسم شکل و نوشتن معادله تابع هدف

هرچه مساحت پنجره بیش‌تر باشد، نوردهی بیش‌تر است:

می‌خواهیم مساحت پنجره ماکزیمم شود (تابع هدف)



مساحت پنجره مطابق شکل بالابرابر است با:

$S =$(مساحت مستطیل) + (مساحت نیم دایره) $= (۲r)h + \frac{۱}{۲}(\pi r^{۲})$

مرحله۲:نوشتن رابطه کمکی

با توجه به فرض داریم محیط پنجره برابر ۶ متراست(معادله کمکی):

$$\text{محیط پنجره} = ۲r + ۲h + \frac{۱}{۲}\underbrace{(۲\pi r)}_{\text{محیط دایره}} = ۲r + ۲h + \pi r = ۶$$

مرحله۳: نوشتن یک متغیر برحسب متغیردیگر در رابطه کمکی :

از معادله‌ی کمکی، h را بر حسب r می‌نویسیم(کاری می کنیمh تنها شود)

$$۲r + ۲h + \pi r = ۶ \Rightarrow ۲h = ۶ - ۲r - \pi r = ۶ - r(\pi + ۲)$$

$$\Rightarrow h = ۳ - \frac{۱}{۲}(\pi + ۲)r$$

مرحله ۴:جایگذاری رابطه کمکی در تابع هدف

$$S = (۲r)h + \frac{۱}{۲}(\pi r^{۲}) \xRightarrow{h=۳-\frac{۱}{۲}(\pi+۲)r}$$

$$\begin{aligned} S(r) &= ۲r \times \left(۳ - \frac{۱}{۲}(\pi + ۲)r\right) + \frac{۱}{۲}\pi r^{۲} \\ &= ۶r - (\pi + ۲)r^{۲} + \frac{۱}{۲}\pi r^{۲} \end{aligned}$$

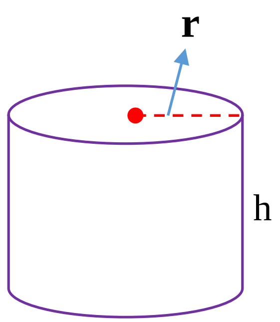
مرحله ۵: به دست آوردن ماکزیمم یا مینیمم مطلق:

برای به دست آوردن مقدارماکزیمم مطلق ، نقطه‌ی بحرانی را به دست می-آوریم،بنابراین از $S(r)$ مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$S'(r) = ۶ - ۲(\pi + ۲)r + \pi r = ۶ + \mathrm{r}\overbrace{\left(\pi - ۲(\pi + ۲)\right)}^{-\pi-۴} = ۰$$

$$\Rightarrow (\pi + ۴)r = ۶ \Rightarrow r = \frac{۶}{\pi + ۴}$$

مثال : برای ساخت یک قوطی فلزی استوانه‌ای شکل و در باز به حجم 64π، ارتفاع قوطی کدام باشد تا مقدار فلز به کار رفته در تولید آن مینیمم شود. (مشابه کار در کلاس ۱ صفحه‌ی ۱۱۸کتاب درسی)



مرحله ۱: رسم شکل و نوشتن معادله تابع هدف

برای آن که مقدار فلز به کار رفته در تولید قوطی مینیمم شود باید مساحت کل این قوطی در باز، کم‌ترین مقدار شود.(تابع هدف)

مساحت جانبی + مساحت قاعده =مساحت کل قوطی (استوانه‌ی درباز)

بنابر این:

$$S = \pi r^{۲} + ۲\pi r h$$

مرحله۲:نوشتن رابطه کمکی

با توجه به فرض سوال حجم استوانه برابر ۶۴π است.(معادله کمکی)

ارتفاع × مساحت قاعده = حجم استوانه ⇒ حجم استوانه = ۶۴π ⇒ $\pi r^{۲} h = ۶۴\pi$

مرحله۳: نوشتن یک متغیر برحسب متغیردیگر در رابطه کمکی :

از معادله‌ی کمکی، h را بر حسب r می‌نویسیم(کاری می کنیم h تنها شود)

$$\pi r^{۲} h = ۶۴\pi \ \Rightarrow h = \frac{۶۴\pi}{\pi r^{۲}} = \frac{۶۴}{r^{۲}}$$

مرحله ۴:جایگذاری رابطه کمکی در تابع هدف

$$S = \pi r^{۲} + ۲\pi r h \xrightarrow{h=\frac{۶۴}{r^{۲}}} S(r) = \pi r^{۲} + ۲\pi r\left(\frac{۶۴}{r^{۲}}\right)$$

$$= \pi r^{۲} + \frac{۱۲۸\pi}{r} = \pi\left(r^{۲} + \frac{۱۲۸}{r}\right)$$

مرحله ۵: به دست آوردن ماکزیمم یا مینیمم مطلق:

برای به دست آوردن مقدار مینیمم مطلق ، نقطه‌ی بحرانی را به دست می‌آوریم،

بنابراین از $S(r)$مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

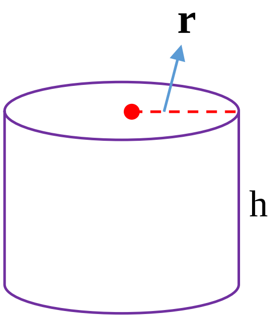
$$\Rightarrow S' = \pi\left(۲r - \frac{۱۲۸}{r^{۲}}\right) = \pi \times \frac{۲r^{۳} - ۱۲۸}{r^{۲}} = ۰ \Rightarrow ۲r^{۳} - ۱۲۸ = ۰$$

$$\Rightarrow r^{۳} = ۶۴ \Rightarrow r = ۴$$

$$h = \frac{۶۴}{r^{۲}} \xrightarrow{r=۴} h = \frac{۶۴}{۱۶} = ۴$$

مثال :حجم یک قوط استوانه‌ای شکل 54π واحد مکعب است. اگر هزینه‌ی فلز به کار رفته در تولید این قوطی کم‌ترین مقدار ممکن باشد. کم‌ترین مساحت فلز به کار رفته را به دست آورید.

مرحله ۱: رسم شکل و نوشتن معادله تابع هدف



برای آن که مقدار فلز به کار رفته در تولید قوطی مینیمم شود باید مساحت کل این قوطی در باز، کم‌ترین مقدار شود.(تابع هدف)

مساحت جانبی + مساحت قاعده × ۲ =مساحت کل قوطی (استوانه‌ی)

بنابر این:

$$S = ۲ \times \pi r^{۲} + ۲\pi r h$$

مرحله۲:نوشتن رابطه کمکی

با توجه به فرض سوال حجم استوانه برابر ۵۴π است.(معادله کمکی)

حجم استوانه = مساحت قاعده × ارتفاع ⇒ حجم استوانه = ۵۴π ⇒ $\pi r^{۲} h = ۵۴\pi$

مرحله۳: نوشتن یک متغیر برحسب متغیردیگر در رابطه کمکی :

از معادله‌ی کمکی، h را بر حسب r می‌نویسیم(کاری می کنیمh تنها شود)

$$\pi r^۲ h = ۶۴\pi \Rightarrow h = \frac{۵۴\pi}{\pi r^۲} = \frac{۵۴}{r^۲}$$

مرحله ۴:جایگذاری رابطه کمکی در تابع هدف

$$S = ۲\pi r^۲ + ۲\pi r h \xRightarrow{h=\frac{۵۴}{r^۲}} S(r) = ۲\pi r^۲ + ۲\pi r\left(\frac{۵۴}{r^۲}\right)$$

$$= ۲\pi r^۲ + \frac{۱۰۸\pi}{r} = ۲\pi\left(r^۲ + \frac{۵۴}{r}\right)$$

مرحله ۵: به دست آوردن ماکزیمم یا مینیمم مطلق:

برای به دست آوردن مقدار مینیمم مطلق ، نقطه‌ی بحرانی را به دست می‌آوریم،

بنابراین از $S(r)$مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\Rightarrow S' = ۲\pi\left(۲r - \frac{۵۴}{r^۲}\right) = ۲\pi \times \frac{۲r^۳ - ۵۴}{r^۲} = ۰ \Rightarrow ۲r^۳ - ۵۴ = ۰$$

$$\Rightarrow r^۳ = ۲۷ \Rightarrow r = ۳ \Rightarrow$$

$$= S(r) = ۲\pi\left(r^۲ + \frac{۵۴}{r}\right) \xRightarrow{r=۳} S(۳) = ۲\pi((۳)^۲ + \frac{۵۴}{۳}) = ۵۴\pi$$

مثال : در ساخت یک مخزن به شکل مکعب مستطیل در باز به حجم ۱۵۰ متر مکعب که طول کف مخزن ۳ برابر عرض آن است، در صورتی که هزینه-ی هر متر مربع برای کف ۴۵ هزار تومان و برای دیواره‌ها ۲۵ هزار تومان باشد. ارتفاع کدام باشد تا هزینه کم‌ترین مقدار شود؟

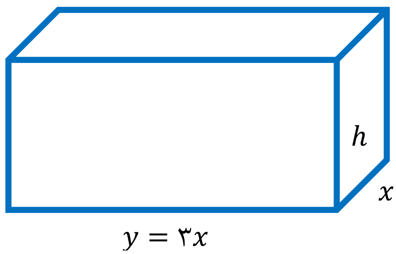
(مشابه مثال ۳ صفحه‌ی ۱۱۵کتاب درسی)

مرحله ۱: رسم شکل و نوشتن معادله تابع هدف

حل)برای آنکه هزینه کمترین شود باید مساحت کمترین شود (تابع هدف)

۲۵۰۰۰ × (مساحت جانبی مکعب مستطیل) + ۴۵۰۰۰ × (مساحت کف مکعب مستطیل) = هزینه

باتوجه به شکل زیر:



مساحت کف مکعب مستطیل $= ۳x \times x = ۳x^{۲}$

ارتفاع × محیط قاعده = مساحت جانبی مکعب مستطیل

$$= \big(۲(۳x + x)\big) \times h = ۸xh$$

بنابراین:

$$\text{هزینه}C = (۳x^۲) \times ۴۵۰۰۰ + (۸xh) \times ۲۵۰۰۰ = ۱۳۵۰۰۰x^۲ + ۲۰۰۰۰۰xh$$

مرحله۲:نوشتن رابطه کمکی

با توجه به فرض سوال حجم مکعب مستطیل برابر ۱۵۰ متر مکعب است.(معادله کمکی)

$$۱۵۰ = \text{حجم مکعب مستطیل} \Rightarrow \text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} = \text{حجم مکعب مستطیل}$$

$$\Rightarrow ۳x \times x \times h = ۱۵۰ \quad \Rightarrow ۳x^۲h = ۱۵۰$$

مرحله۳: نوشتن یک متغیر برحسب متغیردیگر در رابطه کمکی :

از معادله‌ی کمکی، h را بر حسب x می‌نویسیم(کاری می کنیمh تنها شود)

$$۳x^۲h = ۱۵۰ \quad \Rightarrow h = \frac{۱۵۰}{۳x^۲} = \frac{۵۰}{x^۲}$$

مرحله ۴:جایگذاری رابطه کمکی در تابع هدف

$$C = ۱۳۵۰۰۰x^۲ + ۲۰۰۰۰۰xh \xrightarrow{h=\frac{۵۰}{x^۲}} C = ۱۳۵۰۰۰x^۲ + ۲۰۰۰۰۰x\left(\frac{۵۰}{x^۲}\right)$$

$$= ۱۳۵۰۰۰x^۲ + \left(\frac{۱۰۰۰۰۰۰۰}{x}\right)$$

$$= ۱۰۰۰\left(۱۳۵x^۲ + \frac{۱۰۰۰۰}{x}\right)$$

مرحله ۵: به دست آوردن ماکزیمم یا مینیمم مطلق:

برای به دست آوردن مقدار مینیمم مطلق ، نقطه‌ی بحرانی را به دست می‌آوریم،

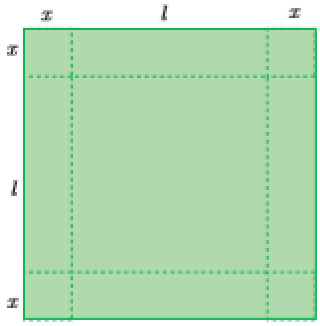
بنابراین از $C(x)$ مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$C'(x) = ۱۰۰۰(۲۷۰x - \frac{۱۰۰۰۰}{x^۲}) = ۱۰۰۰(\frac{۲۷۰x^۳ - ۱۰۰۰۰}{x^۲})$$

$$C'(x) = ۰ \Rightarrow ۲۷۰x^۳ = ۱۰۰۰۰ \Rightarrow x^۳ = \frac{۱۰۰۰}{۲۷} = \left(\frac{۱۰}{۳}\right)^۳ \Rightarrow x = \frac{۱۰}{۳}$$

دسته سوم) مسایل مربوط به بیشترین وکمترین مقدارحجم

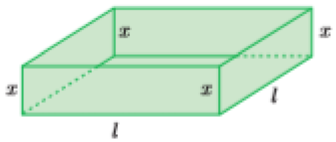
مثال : ورق فلزی مربع شکل به طول ۳۰ سانتی‌متر را در نظر بگیرید. مطابق شکل می‌خواهیم از چهار گوشه‌ی آن مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آن‌ها را کنار بگذاریم. سپس با تا کردن ورق در امتداد خط چین‌های مشخص شده در شکل، یک قوطی در باز بسازیم. مقدار x چقدر باشد تا حجم قوطی، حداکثر مقدار ممکن گردد؟



(مثال ۲ صفحه‌ی ۱۱۵ کتاب درسی)

مرحله ۱: رسم شکل و نوشتن معادله تابع هدف

مطابق شکل، طول و عرض قاعده‌ی مکعب مستطیل برابر l و ارتفاع آن مساوی x است.



می خواهیم حجم قوطی، بیشترین مقدار ممکن گردد.(تابع هدف)

ارتفاع × مساحت قاعده = حجم مکعب مستطیل

مطابق شکل:

حجم مکعب مستطیل $V = (l \times l) \times x = l^{۲} x$

مرحله ۲:نوشتن رابطه کمکی

با توجه به فرض سوال طول ضلع مربع برابر ۳۰است.(معادله کمکی)

۳۰= طول ضلع مربع

$\Rightarrow x + l + x = ۳۰ \Rightarrow ۲x + l = ۳۰$

مرحله۳: نوشتن یک متغیر برحسب متغیردیگر در رابطه کمکی :

از معادله‌ی کمکی، l را بر حسب xمی‌نویسیم (کاری می کنیمl تنها شود)

$$۲x + l = ۳۰ \Rightarrow l = ۳۰ - ۲x \quad , \quad x \in (۰,۱۵)$$

مرحله ۴:جایگذاری رابطه کمکی در تابع هدف

$$V = l^{۲} x \xRightarrow{l=۳۰-۲x} V = (۳۰ - ۲x)^{۲}\, x$$

مرحله ۵: به دست آوردن ماکزیمم یا مینیمم مطلق:

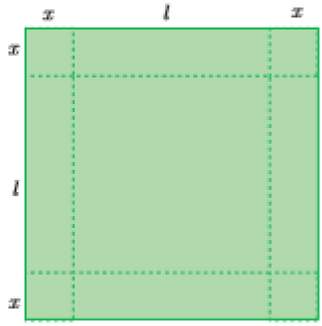
برای به دست آوردن مقدار ماکزیمم مطلق ، نقطه‌ی بحرانی را به دست می‌آوریم،

بنابراین از $V(x)$ مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} V'(x) &= \big(۲(۳۰ - ۲x)(-۲)\big) \times x + ۱(۳۰ - ۲x)^{۲} \\ &= (۳۰ - ۲x)(-۴x + ۳۰ - ۲x) \\ &= (۳۰ - ۲x)(۳۰ - ۶x) = ۰ \\ &\Rightarrow \begin{cases} ۳۰ - ۲x = ۰ \Rightarrow x = ۱۵ & (\text{غ. ق. ق}) \\ ۳۰ - ۶x = ۰ \Rightarrow x = ۵ \end{cases} \end{aligned}$$

به ازای $x = ۵$، بیش‌ترین حجم مکعب مستطیل به دست می‌آید.

تمرین : ورق فلزی مربع شکل به طول ۳۶ سانتی‌متر را در نظر بگیرید. مطابق شکل می‌خواهیم از چهار گوشه‌ی آن مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آن‌ها را کنار بگذاریم. سپس با تا کردن ورق در امتداد خط چین‌های مشخص شده در شکل، یک قوطی در باز بسازیم. مقدار x چقدر باشد تا حجم قوطی، حداکثر مقدار ممکن گردد. جواب: $x = ۶$

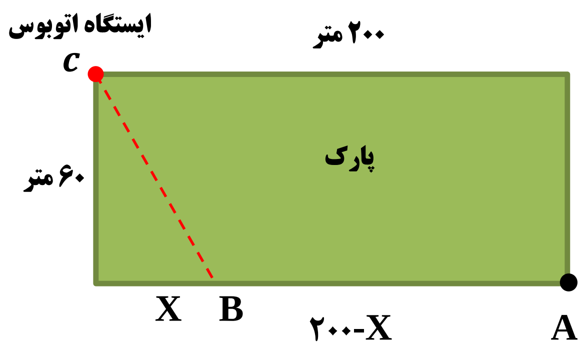


تمرین :ورق فلزی مربع شکل به طول ضلع یک متر را در نظر بگیرید. می‌خواهیم از چهار گوشه‌ی آن مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آن‌ها را کنار بگذاریم. سپس لبه جعبه را به اندازه x برمی گردانیم تا یک جعبه در باز ساخته شود. مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه، حداکثر مقدار ممکن گردد. جواب: $x = \frac{۱}{۶}$ (امتحان نهایی خرداد ۹۸)

دسته چهارم) مسایل مربوط به بیشترین و کمترین مقدارمکان و زمان و سرعت

مثال : ابوالفضل می خواهد به ایستگاه اتوبوسی برود که در ۲۰۰ متری غرب و ۶۰ متری شمال موقعیت فعلی او بعد از پارک قرار دارد. او می تواند با سرعت ۳ متر بر ثانیه از پیاده رو کنار پارک به سمت غرب برود.همچنین،می تواند از درون پارک و تنها با سرعت ۲متر بر ثانیه عبورکند.با توجه به شکل،مقدارx را طوری تعیین کنیدکه اودر کمترین زمان ممکن به ایستگاه برسد. (تمرین۵ صفحه‌ی ۱۲۰ کتاب درسی)

مرحله ۱: رسم شکل و نوشتن معادله تابع هدف



می خواهیم در کمترین زمان ممکن به ایستگاه برسد(تابع هدف)

زمان رسیدن ابوالفضل از نقطه‌ی A به C برابر است با:

زمان رسیدن ابوالفضل از نقطه ی A به C = زمان رسیدن ابوالفضل از نقطه ی A به B + زمان رسیدن ابوالفضل از نقطه ی B به C

می دانیم اگر x مسافت طی شده با سرعت ثابت V در مدت زمان t باشد. آن‌گاه

$$x = vt \Rightarrow t = \frac{x}{v}$$

اگر $t_۱$ زمان رسیدن ابوالفضل از نقطه‌ی A(موقیت کنونی ابوالفضل) به B با سرعت ۳ متر بر ثانیه باشد، آن‌گاه $t_۱ = \frac{۲۰۰-x}{۳}$

اگر $t_۲$ زمان رسیدن ابوالفضل از نقطه‌ی B به نقطه‌ی C با سرعت ۲ متر بر ثانیه باشد، آن‌گاه :

$$t_۲ = \frac{BC}{۲}$$

اگر t زمان رسیدن ابوالفضل از نقطه‌ی A به C باشد، آن‌گاه:

زمان رسیدن ابوالفضل از نقطه ی A به C = زمان رسیدن ابوالفضل از نقطه ی A به B + زمان رسیدن ابوالفضل از نقطه ی B به C

$$t = t_۱ + t_۲ \Rightarrow t(x) = \frac{(۲۰۰ - x)}{۳} + \frac{BC}{۲}$$

مرحله۲:نوشتن رابطه کمکی

با توجه به رابطه فیثاغورس داریم: $BC^{۲} = ۶۰^{۲} + x^{۲}$. (معادله کمکی)

مرحله۳: نوشتن یک متغیر برحسب متغیردیگر در رابطه کمکی :

از معادله‌ی کمکی، BC را بر حسب xمی‌نویسیم

$$BC^{۲} = ۶۰^{۲} + x^{۲} \Rightarrow BC = \sqrt{۶۰^{۲} + x^{۲}}$$

مرحله ۴:جایگذاری رابطه کمکی در تابع هدف

$$t(x) = \frac{(۲۰۰-x)}{۳} + \frac{BC}{۲}$$

$$\xRightarrow{BC=\sqrt{۶۰^{۲}+x^{۲}}} t(x) = \frac{(۲۰۰-x)}{۳} + \frac{\sqrt{۶۰^{۲}+x^{۲}}}{۲}$$

مرحله ۵: به دست آوردن ماکزیمم یا مینیمم مطلق:

برای به دست آوردن مقدار مینیمم مطلق ، نقطه‌ی بحرانی را به دست می‌آوریم،

بنابراین از $t(x)$ مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

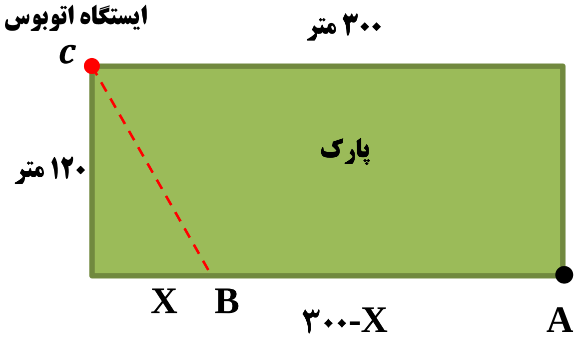
$$t'(x) = -\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۲x}{۲\sqrt{۶۰^{۲} + x^{۲}}} = \frac{-۲\sqrt{۶۰^{۲} + x^{۲}} + ۳x}{۶\sqrt{۶۰^{۲} + x^{۲}}}$$

$$t'(x) = ۰ \Rightarrow ۳x - ۲\sqrt{۶۰ + x^{۲}} = ۰$$

$$\Rightarrow ۳x = ۲\sqrt{۶۰^۲ + x^۲} \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} ۹x^۲ = ۴(۶۰^۲ + x^۲)$$

$$\Rightarrow ۵x^۲ = ۶۰^۲ \Rightarrow \sqrt{۵}x = ۶۰ \Rightarrow x = \frac{۶۰}{\sqrt{۵}} \times \frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}} = ۱۲\sqrt{۵}$$

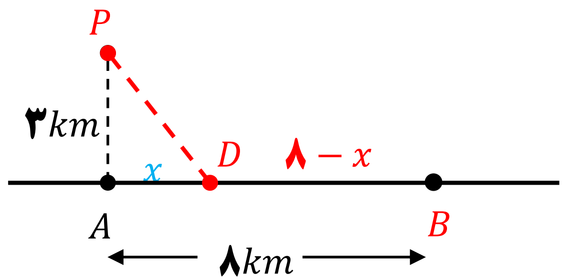
تمرین : در شکل مقابل، شخصی در نقطه‌ی *A* قرار دارد. او می‌خواهد به ایستگاه اتوبوس برسد. این شخص می‌تواند با سرعت ۴ متر بر ثانیه از نقطه‌ی *A* به سمت غرب برود و هم چنین می‌تواند از درون پارک و تنها با سرعت ۲ متر بر ثانیه عبور کند. مقدار *x* کدام باشد تا این شخص در کمترین زمان ممکن به ایستگاه برسد؟



مثال :کیان درون قایقی در نقطه‌ی P قرار دارد که فاصله‌ی آن از نزدیک-ترین نقطه‌ی ساحل یعنی نقطه‌ی A معادل ۳کیلومتر است. او می‌خواهد به نقطه‌ی B در ساحل برسد که در ۸کیلومتری A قرارد دارد فرض کنید سرع حرکت قایق ۲km/h و سرعت پیاده روی کیان در ساحل ۴km/h باشد. اگر او بخواهد در کوتاه‌ترین زمان ممکن به B برسد، در چه نقطه‌ای از ساحل باید پیاده شده و به سوی B پیاده روی کند؟

مرحله ۱: رسم شکل و نوشتن معادله تابع هدف

(مثال ۵ صفحه‌ی ۱۱۷ کتاب درسی)



نقطه‌ای از ساحل را که شخص پیاده می‌شود، D می‌نامیم.

می خواهیم در کمترین زمان ممکن به نقطه B ایستگاه برسد(تابع هدف)

زمان رسیدن کیان از نقطه‌ی P به B برابر است با:

زمان پیاده روی مسیر D تا B + زمان پارو زدن مسیر P تا D = زمان رسیدن کیان از نقطه ی P به B

می دانیم اگر x مسافت طی شده با سرعت ثابت V در مدت زمان t باشد. آن‌گاه

$$x = Vt \Rightarrow t = \frac{x}{V}$$

اگر $t_۱$ زمان پارو زدن مسیر از نقطه‌ی P(موقیت کنونی کیان) به D با سرعت ۲ کیلومتربر ساعت باشد، آن‌گاه

$$\text{زمان پارو زدن مسیر } P \text{ تا } D : t_۱ = \frac{PD}{۲}$$

اگر $t_۲$ زمان پیاده روی از نقطه‌ی D به نقطه‌ی B با سرعت ۴ کیلومتر بر ساعت باشد، آن‌گاه :

$$\text{زمان پیاده روی مسیر } D \text{ تا } B : t_۲ = \frac{DB}{۴} = \frac{۸ - x}{۴} = ۲ - \frac{۱}{۴}x$$

اگر t کل زمان رسیدن کیان از نقطه‌ی P به B برابر است با:

زمان پیاده روی مسیر D تا B + زمان پارو زدن مسیر P تا D = زمان رسیدن کیان از نقطه ی P به B

$$\text{کل زمان رسیدن از } P \text{ به } B : t = t_۱ + t_۲ \Rightarrow t = \frac{PD}{۲} + ۲ - \frac{۱}{۴}x$$

مرحله۲:نوشتن رابطه کمکی

با توجه به رابطه فیثاغورس داریم: $(PD^{۲} = ۹ + x^{۲})$. (معادله کمکی)

مرحله۳: نوشتن یک متغیر برحسب متغیردیگر در رابطه کمکی :

از معادله‌ی کمکی، PD را بر حسب x می‌نویسیم

$$(PD^{۲} = ۹ + x^{۲}) \Rightarrow PD\ = \sqrt{x^{۲} + ۹}$$

مرحله ۴:جایگذاری رابطه کمکی در تابع هدف

$$t(x) = \frac{PD}{۲} + ۲ - \frac{۱}{۴}x \xRightarrow{PD = \sqrt{x^{۲}+۹}} t(x) = \frac{\sqrt{x^{۲} + ۹}}{۲} + \left(۲ - \frac{۱}{۴}x\right), x \in [۰,۸]$$

مرحله ۵: به دست آوردن ماکزیمم یا مینیمم مطلق:

برای به دست آوردن مقدار مینیمم مطلق ، نقطه‌ی بحرانی را به دست می‌آوریم،

بنابراین از $t(x)$ مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$t'(x) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۲x}{۲\sqrt{x^{۲} + ۹}} - \frac{۱}{۴} = \frac{۲x - \sqrt{x^{۲} + ۹}}{۴\sqrt{x^{۲} + ۹}}$$

$$t'(x) = ۰ \Rightarrow ۲x - \sqrt{x^{۲} + ۹} = ۰ \Rightarrow ۴x^{۲} = x^{۲} + ۹ \Rightarrow x = \sqrt{۳}$$

مثال : هزینه‌ی سوخت یک اتومبیل در هر ساعت برای حرکت با سرعت ثابت V کیلومتر بر ساعت، برابر $35V^2$ تومان است. اگر سایر هزینه‌ها برای هر ساعت به طور ثابت برابر ۲۸۳۵ تومان باشد، اتومبیل با چه سرعتی حرکت کند تا هزینه‌ی آن در یک کیلومتر، کم‌ترین مقدار ممکن باشد؟

(مشابه کاردر کلاس ۲ صفحه‌ی ۱۱۸کتاب درسی)

مرحله ۱: نوشتن معادله تابع هدف

هزینه‌ی در یک کیلومتر، کم‌ترین مقدار ممکن باشد(تابع هدف)

$(\text{مدت زمان}) \times (\text{هزینه ثابت}) + \left(\text{مدت زمان}\right) \times \left(\text{هزینه سوخت}\right) = \text{هزینه اتومبیل}$

بنابراین:

هزینه‌ی t ساعت حرکت اتومبیل: $C = (۳۵V^{۲})t + (۲۸۳۵)t$

مرحله۲:نوشتن رابطه کمکی

فرمول $\mathrm{t} = \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{V}}$ را داریم: .(معادله کمکی)

مرحله۳: نوشتن یک متغیر برحسب متغیردیگر در رابطه کمکی :

معادله‌ی کمکی، $t=\frac{x}{V}$ برحسب t داده شده است :

$$t=\frac{x}{V}\xrightarrow{x=۱\ \text{هزینه یک کیلومتر حرکت}}t=\frac{۱}{V}$$

مرحله ۴:جایگذاری رابطه کمکی در تابع هدف

$$C=(۳۵V^{۲})t+(۲۸۳۵)t\overset{t=\frac{۱}{V}}{\Longrightarrow}$$

$$C(V)=(۳۵V^{۲})\times(\frac{۱}{V})+(۲۸۳۵)\times(\frac{۱}{V})=۳۵V+\frac{۲۸۳۵}{V}$$

مرحله ۵: به دست آوردن ماکزیمم یا مینیمم مطلق:

برای به دست آوردن مقدار مینیمم مطلق ، نقطه‌ی بحرانی را به دست می‌آوریم،

بنابراین از تابع $C(V)$ مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$C'(V)=۳۵-\frac{۲۸۳۵}{V^{۲}}=\frac{۳۵V^{۲}-۲۸۳۵}{V^{۲}}=۰\Rightarrow ۳۵V^{۲}-۲۸۳۵=۰$$

$$\Rightarrow V^{۲}=۸۱\Rightarrow V=۹km/h$$

تذکر:**اگر تابع هدف داده شده بر حسب یک متغیر باشد کافیست از تابع هدف مشتق گرفته و مساوی صفر قرار دهیم** مانند مثال زیر

مثال : غلظت یک داروی شیمیایی در خون، t ساعت پس از تزریق در ماهیچه از رابطه‌ی $C(t)=\frac{۳t}{t^۳+۱۲۸}$ به‌دست می‌آید. چند ساعت پس از تزریق این دارو، غلظت آن در خون، بیش‌ترین مقدار ممکن خواهد بود؟

حل)در این مثال تابع هدف C بر حسب یک متغیر داده شده است برای به دست آوردن مقدارماکزیمم مطلق ، نقطه‌ی بحرانی را به دست می‌آوریم،بنابراین از $C(t)$ مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$C'(t)=\frac{۳(t^۳+۱۲۸)-۳t^۲(۳t)}{(t^۳+۱۲۸)^۲}=\frac{-۶t^۳+۳\times ۱۲۸}{(t^۳+۱۲۸)^۲}$$

$$\xrightarrow{C'(t)=۰} ۳\times ۱۲۸-۶t^۳=۰ \Rightarrow t^۳=۶۴ \Rightarrow t=۴ \ (\text{ساعت})$$
