اگرچه نیت خوبی است زیستن ...
اما خوشا که دست به تصمیم بهتری بزنیم !

www.konkursara.com
۰۲۱۵۵۷۵۶۵۰۰

دانلود بهترین جزوات در

کنکورســـــرا

کنکورسرا

مرجع تخصصی قبولی آزمون فرهنگیان و آزمون استخدامی آموزش و پرورش

این فایل متعلق به کنکورسرا می باشد. هر گونه استفاده غیر مجاز از آن شرعا حرام و غیر اخلاقی است.

ریاضی ۲

پایه‌ی یازدهم «رشته‌ی علوم تجربی»

فصل ۷ : آمار و احتمال

درس اوّل : احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل

قبل از ورود به مفهوم احتمال شرطی ، مفاهیم مقدماتی مربوط به احتمال را یادآوری می کنیم.

قسمت اوّل : یادآوری مفاهیم احتمال

مفاهیم مربوط به احتمال که در پایه های قبل با آنها آشنا شده اید به شرح زیر می باشند.

۱ : پدیده‌ی تصادفی

هر پدیده یا آزمایش که نتیجه‌ی آن را نتوان قبل از انجام به طور قطعی پیش بینی کرد را پدیده‌ی تصادفی می نامند.

۲ : فضای نمونه ای

مجموعه‌ی همه‌ی نتایج ممکن یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه ای می نامند و آن را با S نمایش می دهند.

۳ : برآمد

هر یک از اعضای فضای نمونه ای را برآمد می گویند.

۴ : پیشامد تصادفی

هر زیر مجموعه از فضای نمونه ای را پیشامد تصادفی نامیده می شود و آنرا نیز با یک حرف بزرگ لاتین مانند E نمایش می دهند.

۵ : اعمال روی پیشامدها

الف : اجتماع دو پیشامد A و B که با نماد $A \bigcup B$ نوشته می شود، پیشامدی است که با رخ دادن پیشامد A یا پیشامد B یا هر دو رخ دهد.

ب : اشتراک دو پیشامد A و B که با نماد $A \bigcap B$ نوشته می شود، پیشامدی است که با رخ دادن هر دو پیشامد A و B رخ دهد.

ج : تفاضل پیشامد B از پیشامد A که با نماد $A - B$ نوشته می شود، پیشامدی است که با رخ دادن A و رخ ندادن B رخ دهد.

د : اگر S فضای نمونه‌ای و E یک پیشامد تصادفی از آن باشد، پیشامدی را که متناظر با رخ ندادن E می باشد، مکمل E می نامند و آن را با E' یا E^C نمایش می دهند. بدیهی است که $E' = S - E$

۶ : پیشامدهای ناسازگار

دو پیشامد A و B را ناسازگار گویند، هرگاه هر دو با هم رخ ندهند. به عبارت دیگر اشتراک آنها تهی است.

$$A \bigcap B = \Phi$$

۷ : احتمال وقوع یک پیشامد تصادفی

اگر E یک پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشد. در این صورت ، خارج قسمت تعداد اعضای پیشامد تصادفی E بر تعداد اعضای فضای نمونه‌ای نظیر آن یعنی S را احتمال وقوع پیشامد تصادفی E می نامند.

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد حالت های مطلوب}}{\text{تعداد حالت های ممکن}}$$

مثال ۱ : در پرتاب یک تاس ، احتمال آن را حساب کنید که مضرب ۳ بیاید.

حل :

فضای نمونه ای $S = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \quad \rightarrow n(S) = ۶$

پیشامد تصادفی $E = \{۳,۶\} \quad \rightarrow n(E) = ۲$

احتمال آمدن مضرب ۳ $\quad P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$

مثال۲: از بین اعداد طبیعی از ۱۰ تا ۱۰۰ به تصادف یک عدد انتخاب می کنیم. احتمال آن را حساب کنید که عدد انتخاب شده مضرب ۸ باشد.

حل :

$$S = \{۱۰,۱۱,۱۲,...,۱۰۰\} \rightarrow n(S) = b - a + ۱ = ۱۰۰ - ۱۰ + ۱ = ۹۱$$

$$E = \{۱۶,۲۴,...,۹۶\} \rightarrow n(E) = \frac{b-a}{k} + ۱ = \frac{۹۶ - ۱۶}{۸} + ۱ = ۱۱$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{۱۱}{۹۱}$$

مثال۳ : تاسی را پرتاب می کنیم. اگر A پیشامد رخ دادن عدد بزرگتر از ۵ و B پیشامد رخ دادن عدد کمتر از ۳ باشد. نشان دهید که این دو پیشامد ناسازگارند.

حل :

فضای نمونه ای $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \rightarrow n(S)=۶$

عدد بزرگتر از ۵ $A=\{۶\}$ عدد کمتر از ۳ $B=\{۱,۲\}$

و چون $A \bigcap B=\{\}$ این دو پیشامد ناسازگارند.

۸ : اصول احتمال

برای هر پیشامد مانند E از فضای نمونه ای S، احتمال وقوع E، عددی حقیقی از بازه‌ی $[۰,۱]$ می باشد و آن را با $P(E)$ نمایش می دهند. اصول احتمال عبارتند از :

اصل ۱ : $P(S)=۱$

اصل ۲ : برای هر دو پیشامد B و A که $A \bigcap B=\Phi$ داریم، $P(A \bigcup B)=P(A)+P(B)$

اصل ۳ : برای هر دو پیشامد B و A که $A=B$ داریم، $P(A)=P(B)$

نتیجه :

الف : برای هر پیشامد مانند E از فضای نمونه ای S، ثابت کنید که $P(E')=۱-P(E)$

ب : $P(\Phi)=۰$

۹ : روابط اساسی احتمال

برای هر دو پیشامد A و B از فضای نمونه ای S می توان روابط زیر را نوشت:

الف) $P(A \bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A \bigcap B)$

ب) $P(A-B)=P(A)-P(A \bigcap B)$

مثال : اعداد طبیعی از ۱۱ تا ۱۰۰ را روی صد کارت می نویسیم و یک کارت به تصادف از میان آنها استخراج می کنیم. مطلوبست احتمال اینکه عدد روی این کارت:

الف : بر ۴ یا بر ۶ بخش پذیر باشد.

ب : بر ۴ بخش پذیر باشد ولی بر ۶ بخش پذیر نباشد.

حل :

$$S=\{۱۱,۱۲,...,۱۰۰\}\rightarrow n(S)=b-a+۱=۱۰۰-۱۱+۱=۹۰$$

بخش پذیر بر۴ $A=\{۱۲,۱۶,...,۹۶,۱۰۰\}\rightarrow n(A)=\frac{b-a}{k}+۱=\frac{۱۰۰-۱۲}{۴}+۱=۲۳$

بخش پذیر بر۶ $B=\{۱۲,۱۸,...,۹۶\}\rightarrow n(B)=\frac{b-a}{k}+۱=\frac{۹۶-۱۲}{۶}+۱=۱۵$

بخش پذیر بر۱۲(ک م م ۴ و۶) $A\bigcap B=\{۱۲,۲۴,...,۹۶\}\rightarrow n(A\bigcap B)=\frac{b-a}{k}+۱=\frac{۹۶-۱۲}{۱۲}+۱=۸$

الف :

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)=\frac{۲۳}{۹۰}+\frac{۱۵}{۹۰}-\frac{۸}{۹۰}=\frac{۳۰}{۹۰}=\frac{۱}{۳}$$

ب :

$$P(A-B)=P(A)-P(A\bigcap B)=\frac{۲۳}{۹۰}-\frac{۸}{۹۰}=\frac{۱۵}{۹۰}=\frac{۱}{۶}$$

تمرین برای حل :

۱: احتمال اینکه دانش آموزی در درس آمار و احتمال قبول شود، ۰/۳۴ و در درس حسابان قبول شود، ۰/۲۳ و احتمال اینکه دست کم در یکی از این دو درس قبول شود، ۰/۳۸ است. احتمال اینکه این دانش آموز در هر دو درس قبول شود، چقدر است؟

۲: احتمال آن که خانه ای یخچال داشته باشد، برابر ۰/۸۵ و احتمال اینکه هم یخچال و هم تلویزیون باشد برابر ۰/۴۰ و احتمال آن که حداقل یکی از این دو وسیله باشند ۰/۹۶ می باشد. احتمال آن را بیابید که در این خانه :

الف : تلویزیون باشد. ب : فقط یخچال باشد.

۳ : عددی به تصادف از مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,...,۱۰۰۰\}$ انتخاب کنیم، احتمال اینکه :

الف : عدد انتخابی بر ۳ بخش پذیر باشد، امّا بر ۵ بخش پذیر نباشد، چقدر است؟

ب : عدد انتخاب نه بر ۳ و نه بر ۵ بخش پذیر باشد، چقدر است؟

***

قسمت دوّم: احتمال شرطی

نتایج بسیاری از آزمایش ها و اتفاق هایی که در آینده رخ می دهند، مشروط به نتایج آزمایش های دیگر می باشند. احتمال این چنین رخداد هایی را احتمال شرطی می نامند. برای مثال احتمال آسیب دیدن یک راننده در یک تصادف به شرط اینکه از کمربند ایمنی استفاده کرده باشد. یک احتمال شرطی است. در واقع در احتمال شرطی با دو پیشامد مختلف سروکار داریم و فرض می کنیم یکی از آنها رخ داده است و می خواهیم بدانیم احتمال رخ دادن دیگری چه تغییری کرده است.

تعریف : فرض کنید B و A دو پیشامد باشند، به قسمی که $P(B)>\cdot$ در این صورت اگر B رخ داده باشد، احتمال وقوع A را با نماد $P(A|B)$ نشان می دهیم و آنرا احتمال شرطی A به شرط وقوع B (یعنی B قبل از A رخ داده باشد) می گوییم و به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

مثال : در یک مسابقه‌ی اتومبیل رانی، احتمال اینکه یک اتومبیل دچار نقص فنی نشود و به خط پایان نیز برسد، برابر ۰/۷ است و احتمال اینکه یک اتومبیل دچار نقص فنی نشود، برابر ۰/۸ است. اگر بدانیم یک اتومبیل دچار نقص فنی نشده است، با چه احتمالی به خط پایان رسیده است؟

حل : اگر A پیشامد دچار نقص فنی نشدن اتومبیل و B پیشامد رسیدن به خط پایان تعریف کنیم. در این صورت داریم: $P(A\cap B)=\cdot/\text{۷}$ و $P(B)=\cdot/\text{۸}$ لذا:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\cdot/\text{۷}}{\cdot/\text{۸}}=\frac{\text{۷}}{\text{۸}}$$

نتیجه ۱: فرض کنید B و A دو پیشامد باشند، به قسمی که $B\neq\Phi$ در این صورت طبق تعریف احتمال شرطی داریم:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}}=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$$

نتیجه ۲: در حالتی که فضای نمونه ای احتمال هم شانس است، شرطی کردن یک پیشامد مانند A نسبت به پیشامد دیگر مثل B این است که فضای نمونه ای یعنی S را کنار گذاشته و B را فضای نمونه ای تلقی می کنیم. احتمال روی این فضای نمونه ای نیز هم شانس است. به این رویکرد « کاهش فضای نمونه ای » گفته می شود.

مثال : دو تاس پرتاب می شوند، اگر مجموع شماره ها ۶ باشد، احتمال آنکه اقلاً یکی از دو تاس ۲ باشد را حساب کنید.

حل:

$A=\{(۱,۲),(۲,۲),(۳,۲),(۴,۲),(۵,۲),(۶,۲),(۲,۱),(۲,۳),(۲,۴),(۲,۵),(۲,۶)\}$ اقلاً یکی از دو عدد ۲ باشد.

$B=\{(۱,۵),(۲,۴),(۳,۳),(۴,۲),(۵,۱)\}$ مجموع دو عدد ۶ باشد.

$A\bigcap B=\{(۲,۴),(۴,۲)\}$

$$P(A|B)=\frac{n(A\bigcap B)}{n(B)}=\frac{۲}{۵}$$

مثال : سکه ای را سه بار پرتاب می کنیم. می دانیم که دست کم یک بار رو آمده است. در این صورت ، احتمال اینکه هر سه بار رو آمده باشد، چقدر است؟

حل : سه بار رو آمدن سکه را A و دست کم یک بار رو آمدن سکه را B می نامیم. در این صورت:

$S=\{RRR.RRP,RPR,PRR,PPR,PRP,RPP,PPP\}$

$B=\{RRR.RRP,RPR,PRR,PPR,PRP,RPP\}$

$A=\{RRR\}$

$A\bigcap B=\{RRR\}$

$$P(A|B)=\frac{n(A\bigcap B)}{n(B)}=\frac{۱}{۷}$$

مثال : اعداد ۱ تا ۹ را روی نُه کارت می نویسیم و سه کارت را به تصادف انتخاب می کنیم. مطلوب است احتمال اینکه هر سه عدد زوج باشند، به شرط اینکه مجموع آنها زوج باشد.

حل : برای اینکه مجموع سه عدد زوج باشند یا هر سه باید زوج باشند و یا اینکه دو عدد فرد و یکی زوج باشند. امّا اعداد زوج در این مسئله چهارتا و اعداد فرد پنج تا هستند. حال اگر A پیشامد اینکه هر سه عدد زوج و B پیشامد زوج بودن مجموع اعداد سه کارت، تعریف کنیم. داریم.

$$n(A\bigcap B)=\binom{۴}{۳}=۴ \quad و \quad n(B)=\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۱}+\binom{۵}{۰}\binom{۴}{۳}=۴۰+۴=۴۴$$

$$P(A|B)=\frac{n(A\bigcap B)}{n(B)}=\frac{۴}{۴۴}=\frac{۱}{۱۱}$$

تمرین ۳: دو تاس سبز و قرمز را پرتاب می کنیم.

الف) اگر بدانیم مجموع دو تاس ۱۰ شده است، احتمال اینکه تاس سبز ۶ آمده است باشد، چقدر است؟

ب) اگر بدانیم که تاس سبز ۶ آمده است، احتمال اینکه مجموع دو تاس ۱۰ باشد، چقدر است؟

حل :

الف :

$A=\{(۶,۱),(۶,۲),(۶,۳),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\}$ تاس سبز باشد.

$B=\{(۴,۶),(۵,۵),(۶,۴)\}$ مجموع دو تاس ۱۰ باشد.

$$A\bigcap B=\{(۶,۴)\}$$

$$P(A|B)=\frac{n(A\bigcap B)}{n(B)}=\frac{۱}{۳}$$

ب :

$A=\{(۴,۶),(۵,۵),(۶,۴)\}$ مجموع دو تاس ۱۰ باشد.

$B=\{(۶,۱),(۶,۲),(۶,۳),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\}$ تاس سبز باشد.

$$A\bigcap B=\{(۶,۴)\}$$

$$P(A|B)=\frac{n(A\bigcap B)}{n(B)}=\frac{۱}{۶}$$

مثال : فرض کنید احتمال اینکه یک تیم فوتبال اصلی ترین رقیبش را ببرد، $\frac{1}{6}$. احتمال قهرمانی ایـن تـیم در حال حاضر $\frac{1}{4}$ و در صورتی که اصلی ترین رقیبش را ببرد، این احتمال به $\frac{1}{3}$ افزایش خواهد یافت. با چه احتمالی حداقل یکی از دو اتفاقِ « قهرمان شدن» یا «بردن اصلی ترین رقیب» برای این تیم اتفـاق خواهـد افتاد؟

حل : اگر A پیشامد قهرمان شدن و B پیشامد بر اصلی ترین رقیب تعریف کنیم. در این صورت داریم.

$$P(A)=\frac{1}{4} \text{ و } P(B)=\frac{1}{6} \text{ و } P(A|B)=\frac{1}{3}$$

واضح است که هدف این مسئله تعیین $P(A\bigcup B)$ است. لذا بر اساس اطلاعات داده شده داریم.

$$P(A|B)=\frac{P(A\bigcap B)}{P(B)} \rightarrow P(A\bigcap B)=P(A|B)\times P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$$

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{18}=\frac{9+6-2}{36}=\frac{13}{36}$$

مثال : اگر $P(A-B)=\frac{1}{4}$ و $P(A)=\frac{3}{4}$ باشد. مقدار $P(B|A)$ را بدست آورید.

حل :

$$P(A-B)=P(A)-P(A\bigcap B)\rightarrow \frac{1}{4}=\frac{3}{4}-P(A\bigcap B)\rightarrow P(A\bigcap B)=\frac{1}{2}$$

$$P(B|A)=\frac{P(A\bigcap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}$$

تمرین برای حل :

۴ : تساوی های زیر را ثابت کنید.

الف) $P(A|A)=1$ ب) $P(A|A')=0$

۵ : اگر $P(A)=\frac{1}{4}$ و $P(B)=\frac{1}{6}$ و $P(A|B)=\frac{1}{3}$ باشد. $P(A\bigcup B)$ را بدست آورید.

۶ : یک سکه را سه بار پرتاب می کنیم. احتمال رو آمدن سکه در پرتاب سوّم را به دسـت آوریـد، بـه شـرط اینکه در پرتاب اوّل و دوّم پشت ظاهر شده باشد.

قسمت سوّم : پیشامد های مستقل و وابسته

گاهی نتایج یک آزمایش تصادفی وابسته به نتیجه‌ی یک آزمایش دیگر است و گاهی مستقل از آن می باشد. در این درس به معرفی پیشامد های مستقل و وابسته می پردازیم.

تعریف : اگر B و A دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، بطوری که $P(A),P(B)>0$، آنگاه این دو پیشامد را مستقل گوییم، هرگاه احتمال وقوع یکی از آنها بر احتمال وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد.

اگر دو پیشامد B و A مستقل نباشند، آنها را وابسته می گوییم.

نتیجه :

۱) اگر B و A دو پیشامد مستقل باشند، در این صورت:

$$P(A|B)=P(A)$$
$$P(B|A)=P(B)$$
$$P(A\cap B)=P(A).P(B)$$

۲) اگر B و A دو پیشامد وابسته باشند، در این صورت:

$$\begin{aligned}P(A\cap B)&=P(A).P(B|A)\\&=P(B).P(A|B)\end{aligned}$$

توجه : اگر حداقل یکی از دو پیشامد A و B تهی باشد. این دو پیشامد مستقل هستند.

توجه : مستقل بودن دو پیشامد، در بسیاری از موارد، نیاز به بررسی ندارد. به عنوان مثال قبولی در درس فیزیک برای دو دانش آموز ، دو پیشامد مستقل می باشند. زیرا قبولی یا عدم قبولی یکی هیچ تأثیری روی دیگری ندارد و لذا نیازی به بررسی مستقل بودن این دو پیشامد نیست.

مثال : جعبه ای محتوی۱۲ لامپ است و می دانیم که ۳ تای آنها معیوب اند. از این جعبه به تصادف یک لامپ بر می داریم، سپس بدون جایگذاری لامپ اوّل، لامپ دیگری به تصادف بر می داریم. احتمال اینکه هر دو لامپ معیوب باشند، چقدر است؟

حل: تعریف می کنیم:

$B=$ پیشامد لامپ دوّم معیوب   و $A=$ پیشامد لامپ اوّل معیوب

چون معیوب یا غیر معیوب بودن لامپ اوّل هیچ تأثیری بر معیوب یا غیر معیوب بودن لامپ دوّم ندارد، پس دو پیشامد B و A مستقل هستند. در این صورت:

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)=\frac{۳}{۱۲}\times\frac{۲}{۱۱}=\frac{۱}{۲۲}$$

مثال : ۷۵ درصد افراد جامعه ای چشم میشی و ۴۰ درصد گروه خونی A دارند، یک فرد به تصادف انتخاب می کنیم.احتمال آنکه این فرد چشم میشی یا گروه خونی A داشته باشند، کدام است؟

۱)۰/۷۸ ۲) ۰/۸۲ ۳) ۰/۸۵ ۴) ۰/۹۵

حل: دو پیشامد چشم میشی بودن و گروه خونی A داشتن مستقل هستند،پس:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=P(A)+P(B)-P(A).P(B)=\frac{۳}{۴}+\frac{۲}{۵}-(\frac{۳}{۴}\times\frac{۲}{۵})=\frac{۱۷}{۲۰}=۰/۸۵$$

مثال : اگر $P(B)=\frac{۱}{۴}$ و $P(A|B)=\frac{۱}{۶}$ و دو پیشامد B و A مستقل باشند. $P(A\cup B)$ را بدست آورید.

حل :

$$P(A|B)=P(A)=\frac{۱}{۶}$$
$$P(A\cap B)=P(A).P(B)=\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۲۴}$$
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲۴}=\frac{۳}{۸}$$

تمرین۷ : اگر دو پیشامد B و A ناتهی و مستقل باشند، نشان هید که:

الف) دو پیشامد B' و A' نیز مستقل هستند.

ب) دو پیشامد B و A' نیز مستقل هستند.

ج) دو پیشامد B' و A نیز مستقل هستند.

حل:

الف:

$$P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=۱-P(A\cup B)=۱-(P(A)+P(B)-P(A\cap B))$$
$$=۱-P(A)-P(B)+P(A\cap B)=۱-P(A)-P(B)+P(A).P(B)$$
$$=(۱-P(A))-P(B)(۱-P(A))=P(A')-P(B).P(A')$$
$$=P(A')(۱-P(B))=P(A').P(B')$$

$$P(A'|B')=\frac{P(A'\cap B')}{P(B')}=\frac{P(A')\times P(B')}{P(B')}=P(A')$$

$$P(B'|A')=\frac{P(A'\cap B')}{P(A')}=\frac{P(A')\times P(B')}{P(A')}=P(B')$$

ب:

$$\begin{aligned}P(A'\cap B)&=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)\\&=P(B)-P(A).P(B)=P(B)(1-P(A))\\&=P(B).P(A')\end{aligned}$$

$$P(A'|B)=\frac{P(A'\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A')\times P(B)}{P(B)}=P(A')$$

$$P(B|A')=\frac{P(A'\cap B)}{P(A')}=\frac{P(A')\times P(B)}{P(A')}=P(B)$$

ج: مانند ب حل می شود و حل آن به فراگیران محترم واگذار می شود.

***

تمرین برای حل :

۸ : در پرتاب یک تاس فرض کنید پیشامد A ظاهر شدن عدد زوج ، پیشامد B ظاهر شدن عددی با مضرب ۳ و پیشامد C ظاهر شدن عددی بزرگتر از ۲ باشد. مستقل بودن یا نبودن هر دو پیشامد را بررسی کنید.

۹ : یک سکه و یک تاس را پرتاب می کنیم. احتمال آن را حساب کنید که سکه پشت و تاس عددی زوج بیاید.

۱۰ : احتمال قبولی زهرا در درس فیزیک ۹۰ درصد و احتمال قبولی ریحانه ۷۰ درصد است، احتمال اینکه حداقل یکی از آنها در این درس قبول شود را به دست آورید.

۱۱: خانواده ای دارای دو فرزند است. مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه هر دو فرزند آنها پسر باشند.

۱۲ : فرض کنید در یک سال احتمال قهرمانی تیم ملّی فوتبال ایران در آسیا برابر ۰/۵ و احتمال قهرمانی تیم ملّی والیبال ایران در آسیا برابر ۰/۸ باشد. تعیین کنید با چه حداقل یکی از این تیم ها قهرمان خواهد شد.

۱۳ : احمد به احتمال ۰/۷ در تیم کوهنوردی مدرسه شان و به احتمال ۰/۸ در تـیم ملّـی فوتبـال نوجوانـان انتخاب می شود. احتمال های زیر را محاسبه کنید.

الف : در هر دو تیم مورد نظر انتخاب شود.

ب : در هیچکدام از تیم ها انتخاب نشود.

پ : فقط در تیم فوتبال انتخاب شود.

ت : فقط در یکی از تیم ها انتخاب شود.

ث : حداقل در یکی از تیم ها انتخاب شود.

۱۴ : احتمال اینکه رؤیا در درس ریاضی قبول شود، دو برابر احتمال قبول شدن دوستش در این درس مـی باشد. اگر احتمال اینکه حداقل یکی از آنها در درس ریاضی قبول شوند برابر ۰/۶۲۵ باشد. حساب کنید با چـه احتمالی رؤیا در این درس قبول خواهد شد.

۱۵ : اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، ثابت کنید که : $P(A \cup B) = 1 - P(A').P(B')$

***

درس دوّم : آمار توصیفی

آمار توصیفی به خلاصه کردن داده ها در قالب نمودار و جدول و یا با محاسبه ی معیارهای مختلف گرایش به مرکز یا معیارهای پراکندگی می پردازد. به عبارتی دیگر، آمار به کمک معیارهای عددی و هندسی، اطلاعاتی مناسب از داده های جمع آوری شده از نمونه یا جامعه برای نتیجه گیری می دهد.

قسمت اوّل : معیارهای گرایش به مرکز

هر عدد که معرف مرکز مجموعه داده ها باشد را معیار مرکزی یا شاخص مرکزی (پارامتر مرکزی) می نامند. به کمک معیار های مرکزی می توان موقعیت کلی داده ها را تعیین کرد، لذا برای مقایسه‌ی دو یا چند جامعه یک روش مناسب، محاسبه‌ی معیار های مرکزی آنها است. معیار های مرکزی دارای سه نوع مهم هستند. در اینجا فقط به دو نوع از آنها یعنی ، میانگین ($\bar{x}$) و میانه ($\tilde{x}$) می پردازیم. میانگین مهمترین معیار مرکزی محسوب می شود.

میانگین

در یک مجموعه‌ی داده های آماری، عدد متمایل به وسط آنها را میانگین (میانگین حسابی) می نامند. میانگین یا متوسط داده ها، با خارج قسمت مجموع اندازه‌ی داده ها بر تعداد آنها برابر است.

$$\bar{x} = \frac{x_۱ + x_۲ + x_۳ + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum x_i}{n}$$

مثال: میانگین داده های زیر را بدست آورید.

x_i : ۵و ۸و۱۰و۱۲و۱۴و۱۷

حل:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{۵+۸+۱۰+۱۲+۱۴+۱۷}{۶} = \frac{۶۶}{۶} = ۱۱$$

تمرین برای حل :

۱ : میانگین نمرات یک کلاس۱۶ نفری در درس ریاضی برابر ۱۲/۵ است. جمع نمرات دانش آموزان این کلاس را بدست آورید.

۲ : میانگین دادهای زیر برابر ۲۲ است. مقدار a را بدست آورید.

۲۰ و ۲۵ و۳۰ و ۲۲ و a و ۲۵ و ۲۴ و ۲۱ و ۲۰ و ۱۵

۳ : میانگین ۵ داده‌ی آماری ۱۷ است. اگر دو عدد ۱۷ و ۱۱ را به داده های قبلی اضافه کنیم. میانگین جدید چه عددی خواهد شد؟

۴ : ثابت کنید که مجموع تفاضل هر یک از داده های یک مجموعه آماری از میانگین آنها برابر صفر است.

$$\sum_{i=۱}^{n}(x_i - \overline{x}) = ۰$$

***

خواص میانگین

اگر $(x_۱$ و $x_۲$ و $x_۳$ و ... و $x_n)$ و $(y_۱$ و $y_۲$ و $y_۳$ و ... و $y_n)$ دو مجموعه‌ی عددی و k یک عدد حقیقی باشد. در این صورت خواص زیر را می توان برای میانگین بررسی کرد.

الف : میانگین حاصل جمع داده های یک مجموعه‌ی آماری با یک عدد ثابت با حاصل جمع آن عدد و میانگین آن داده ها برابر است.

$$z_i = x_i + k \rightarrow \overline{z} = \overline{x} + k$$

ب : میانگین حاصل ضرب داده های یک مجموعه‌ی آماری در یک عدد ثابت با حاصل ضرب آن عدد و میانگین آن داده ها برابر است.

$$z_i = k.x_i \rightarrow \overline{z} = k.\overline{x}$$

ج : میانگین حاصل جمع داده های متناظر ازدو مجموعه داده های آماری با حاصل جمع میانگین های آنها برابر است.

$$z_i = x_i + y_i \rightarrow \overline{z} = \overline{x} + \overline{y}$$

مثال : داده های زیر وزن پنج نفر از دوستان نیلوفر برحسب کیلوگرم می باشند.

۵۵ و ۶۱ و ۵۷ و ۵۵ و ۶۲

الف : میانگین داده ها را به دست آورید.

ب : به هر کدام از این داده ها ۳ واحد اضافه کنید، سپس میانگین داده های جدید را به دست آورده و با میانگین داده های اصلی مقایسه کنید.

ج : هر کدام از این داده ها را در ۲ ضرب کنید، سپس میانگین داده های جدید را به دست آورده و با میانگین داده های اصلی مقایسه کنید.

حل :

الف :

$$x_i : ۶۲ \text{ و } ۵۵ \text{ و } ۵۷ \text{ و } ۶۱ \text{ و } ۵۵$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{۶۲ + ۵۵ + ۵۷ + ۶۱ + ۵۵}{۵} = \frac{۲۹۰}{۵} = ۵۸ \quad kg$$

ب:

$$y_i : ۶۵ \text{ و } ۵۸ \text{ و } ۶۰ \text{ و } ۶۴ \text{ و } ۵۸$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{۶۵ + ۵۸ + ۶۰ + ۶۴ + ۵۸}{۵} = \frac{۳۰۵}{۵} = ۶۱ \quad kg$$

نتیجه : میانگین نیز ۳ واحد افزایش یافت .

ج :

$$z_i : ۱۲۴ \text{ و } ۱۱۰ \text{ و } ۱۱۴ \text{ و } ۱۲۲ \text{ و } ۱۱۰$$

$$\bar{z} = \frac{\sum z_i}{n} = \frac{۱۲۴ + ۱۱۰ + ۱۱۴ + ۱۲۲ + ۱۱۰}{۵} = \frac{۵۸۰}{۵} = ۱۱۶ \quad kg$$

نتیجه : میانگین نیز در۲ ضرب شده است.

تمرین برای حل :

۴ : هر یک از خواص فوق را اثبات کنید.

۵ : ثابت کنید که میانگین داده های مساوی، برابر هر یک از آنها است.

۶ : اگر میانگین وزن دوستان محسن بر حسب کیلوگرم برابر۵۸ باشد. این میانگین بر حسب گرم،چقدر است؟

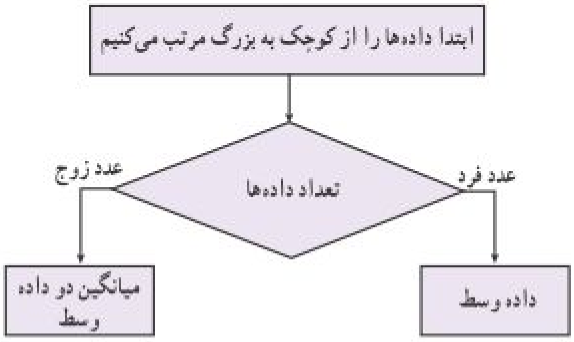
۷ : دمای هوای اهواز در یک هفته از شهریور سال۹۶ برابر ۴۵ سانتی گراد باشد. این میانگین را برحسب فارنهایت بدست آورید. $(F = \frac{۹}{۵}C + ۳۲)$

۸ : هرگاه میانگین داده های آماری$(x_۱ \text{ و } x_۲ \text{ و } x_۳ \text{ و ... و } x_n)$ برابر۱۷ باشد. میانگین داده های $(۲x_۱ + ۱ \text{ و } ۲x_۲ + ۱ \text{ و } ۲x_۳ + ۱ \text{ و ... و } ۲x_n + ۱)$ را بدست آورید.

***

میانه

در یک مجموعه از داده های آماری، میانه داده ای است که نصف داده از آن بیشتر و نصف داده ها از آن کمتر است. به عبارت دیگر در یک مجموعه‌ی داده های آماری که به صورت غیر نزولی (از کوچک به بزرگ) مرتب شده باشند، عدد وسط این داده ها را میانه می نامند. برای محاسبه‌ی میانه ابتدا داده ها را به صورت غیر نزولی مرتب می‌کنیم، آنگاه



الف) اگر تعداد داده ها فرد باشد، داده‌ی وسط میانه است.

ب) اگر تعداد داده ها زوج باشد، میانگین دو داده‌ی وسط میانه است.

مثال: میانه‌ی هریک از مجموعه های زیر را بیابید.

الف) ۵ و ۸ و ۵ و ۱۰ و ۹ و ۸ و ۷ و ۵ و ۳

ب) ۶۰ و ۲۲ و ۲۱ و ۲۰ و ۱۹ و ۱۷ و ۱۷ و ۱۶ و ۱۵ و ۱۳

حل: ابتدا داده ها را از کوچک به بزرگ مرتب می کنیم.

الف:

۱۰ و ۹ و ۸ و ۸ و ۷ و ۵ و ۵ و ۵ و ۳

چون تعداد داده ها فرد است، پس داده‌ی وسط میانه است. لذا میانه برابر $\tilde{x} = ۷$ می باشد.

ب :

۶۰ و ۲۲ و ۲۱ و ۲۰ و $\underbrace{۱۹ \text{ و } ۱۷}$ و ۱۷ و ۱۶ و ۱۵ و ۱۳

چون تعداد داده ها زوج است، میانگین دو داده‌ی وسط میانه است است. لذا میانه برابر $\tilde{x} = \frac{۱۷ + ۱۹}{۲} = ۱۸$ می باشد.

نتیجه: اگر تمام داده های یک مجموعه‌ی داده های آماری برابر باشند، میانه نیز برابر هر یک از آنها است.

توجه: اگر در یک مجموعه‌ی داده های آماری داده‌ی دور افتاده‌ای وجود داشته باشند. چون میانه تحت تأثیر داده های دور افتاده قرار نمی گیرد، نسبت به میانگین، معیار مناسبتری محسوب می شود. داده‌ی دور افتـاده، داده‌ای است که نسبت به سایر داده ها تفاوت بسیار دارد.

تمرین برای حل :

۹ : تعداد حمله های یک تیم فوتبال در شش ماه گذشته به صورت ۴۲ و ۴۴ و ۴۷ و ۱۰ و ۴۳ و ۴۸ اسـت. میانگین و میانه‌ی تعداد حملات این تیم را در این شش ماه به دست آورید. به نظر شما کدام معیار با معنا تـر است؟ چرا؟

۱۰ : میانگین و میانه‌ی داده های زیر را تعیین کنید.

۱۵ و ۱۸ و ۲۲ و ۱۶ و ۹ و ۱۱ و ۵ و ۴

***

قسمت دوّم : معیار های پراکندگی

در فعالیت آماری، گاهی لازم می شود که میزان پراکندگی (دوری و نزدیکی) داده را نسبت بـه همـدیگر یـا نسبت به میانگین محاسبه شود. برای اینکار از معیارهای پراکندگی استفاده می شود.

هر عدد که میزان پراکندگی داده ها نسبت به همدیگر یا نسبت به میانگین را نشان دهد، را معیار پراکندگی یا شاخص پراکندگی (پارامتر پراکندگی) می نامند. مهمترین معیارهای پراکندگی عبارتند از ، دامنه‌ی تغییـرات ، واریانس ، انحراف معیار و ضریب تغییرات می باشند.

از بین این معیارها، دامنه‌ی تغییرات پراکندگی داده ها را نسبت به همدیگر و بقیه، پراکندگی را نسبت به میانگین نشان می دهند.

دامنه‌ی تغییرات

در یک مجموعه‌ی داده های آماری تفاضل کمترین داده از بیشترین آنها را دامنه‌ی تغییـرات مـی نامنـد. بـه عبارتی دیگر دامنه‌ی تغییرات، طول بازه ای اسـت کـه داده هـا در آن قـرار دارنـد. در ایـن صـورت، اگـر a کوچکترین و b بزرگترین داده یک مجموعه‌ی داده های آماری باشند. دامنه‌ی تغییرات به شکل زیر است.

$$R = b - a$$

دامنه‌ی تغییرات را می توان به بیشترین اختلاف بین داده های یک مجموعه‌ی داده های آماری تعبیر کرد.

مثال: دامنه‌ی تغییرات داده های زیر را حساب کنید و تعبیر آن را بنویسید.

۱۳ و ۸ و ۱۴ و ۱۵ و۱۰

حل:

$$R = b - a = ۱۵ - ۸ = ۷$$

تعبیر: بیشترین اختلاف بین داده های این مجموعه برابر ۷ است.

نتیجه:

۱ : بزرگی دامنه‌ی تغییرات نشان دهنده‌ی تفاوت زیاد در جامعه است، هر چه قدر این دامنه بیشتر باشد، تفاوت بین داده ها زیاد است و هر چه قدر این دامنه کمتر باشد، داده ها به هم نردیکترند. اگر دامنه‌ی تغییرات صفر باشد، تمام داده های برابر هستند و جامعه همگون است.

۲ : دامنه‌ی تغییرات ضعیف ترین شاخص پراکندگی است و معرف خوبی برای پراکندگی داده ها نمی باشد، زیرا برای محاسبه‌ی آن فقط از بزرگترین و کوچکترین داده استفاده می شود و تعداد یا مقادیر بقیه‌ی داده‌ها تأثیری بر مقدار آن ندارند.

❋❋❋

واریانس و انحراف معیار

میانگین توان دوّم تفاضل داده ها از میانگین آنها را واریانس (پراش) می نامند. در این صورت

$$\sigma^{۲} = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^{۲}}{n}$$

توجه داشته باشید که واریانس در ضمن داشتن اهمیت زیاد دارای دو اشکال عمده است.

الف : تحت تأثیر داده های بزرگ قرار می گیرد.

ب : واحد اندازه گیری واریانس مجذور واحد اصلی متغیر داده ها است. مثلاً اگر واحد اندازه گیری داده ها سانتی متر باشد، واحد اندازه گیری واریانس سانتی متر مربع خواهد بود.

برای رفع این دو اشکال از انحراف معیار استفاده می شود. ریشه‌ی دوّم واریانس را انحراف معیار (انحراف استاندارد) می نامند.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^{۲}}$$

بنابراین طبق این تعریف بدیهی است که انحراف معیار دارای همان واحدی خواهد بود که داده ها بر حسب آن محاسبه شده اند.

مثال : واریانس و انحراف معیار داده های زیر را بدست آورید.

۹ و۴ و۷ و ۳ و ۲

حل:

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^{۲}$
۲	$-$۳	۹
۳	$-$۲	۴
۷	۲	۴
۴	$-$۱	۱
۹	۴	۱۶
جمع = ۲۵	-	۳۴

میانگین $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i}{n} = \dfrac{۲۵}{۵} = ۵$

واریانس $\sigma^{۲} = \dfrac{\sum (x_i - \bar{x})^{۲}}{n} = \dfrac{۳۴}{۵} = ۶/۸$

انحراف معیار $\sigma = \sqrt{\sigma^{۲}} = \sqrt{۶/۸} = ۲/۶$

***

تمرین برای حل :

۱۱ : واریانس و انحراف معیار داده های زیر را محاسبه کنید.

۷ و ۹ و۶ و ۵ و۳

۱۲ : ثابت کنید که واریانس داده های مساوی برابر صفر است.

خواص واریانس

اگر (x_1 و x_2 و x_3 و... و x_n) یک مجموعه‌ی عددی و k یک عدد حقیقی باشد. در این صورت خواص زیر را می توان برای واریانس آنها بررسی کرد.

۱ : واریانس حاصل جمع داده ها با یک عدد ثابت ، با واریانس آن داده ها برابراست.

$$y_i = x_i + k \rightarrow \sigma_y^2 = \sigma_x^2$$

۲ : واریانس حاصل ضرب داده ها در یک عدد ثابت ، با حاصل ضرب مربع آن عدد در واریانس آن داده ها برابر است.

$$y_i = k.x_i \rightarrow \sigma_y^2 = k^2.\sigma_x^2$$

***

خواص انحراف معیار

مشابه آنچه که برای واریانس داشتیم. می توان نوشت خواص زیر را برای انحراف معیار نیز بیان کرد.

۱ : انحراف معیارحاصل جمع داده ها با یک عدد ثابت با انحراف معیارآن داده ها برابراست.

$$y_i = x_i + k \rightarrow \sigma_y = \sigma_x$$

۲ : انحراف معیار حاصل ضرب داده ها در یک عدد ثابت، با حاصل ضرب قدر مطلق آن عدد در انحراف معیارآن داده ها برابر است.

$$y_i = k.x_i \rightarrow \sigma_y = |k|.\sigma_x .$$

تمرین برای حل :

۱۳ : اگر واریانس داده های یک مجموعه‌ی داده های آماری برابر ۱۸ و میانگین آنها ۸ باشد و تمام داده ها را دو برابر کنیم. میانگین و واریانس داده های جدید را تعیین کنید.

۱۴ : هرگاه واریانس داده های آماری(x_1 و x_2 و x_3 و... و x_n) برابر۱۶ باشد. انحراف معیار داده های ($2x_1+1$ و $2x_2+1$ و $2x_3+1$ و... و $2x_n+1$) را محاسبه کنید.

***

ضریب پراکندگی

خارج قسمت انحراف معیار داده های یک مجموعه‌ی داده های آماری بر میانگین آنها را ضریب پراکندگی (ضریب تغییرات) گویند.

$$CV_x = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

توجه کنید که طبق تعریف ، ضریب پراکندگی داده ها فاقد واحد اندازه گیری می‌باشد، لذا اغلب در موارد زیر استفاده می شود.

الف : برای مقایسه‌ی دو یا چند جامعه‌ی آماری که واحد اندازه گیری داده‌های آنها متفاوت باشد.

مثلاً: مقایسه‌ی سود دو شرکت که سود یکی برحسب ریال و سود دیگری بر حسب دلار باشد.

ب : برای مقایسه‌ی دو یا چند جامعه‌ی که واریانس های آنها برابر باشند ولی میانگین‌های متفاوت دارند.

مثلاً: باتوجه به اطلاعات زیر دو شرکت x و y دارای انحراف معیار برابر هستند ولی میانگین مساوی دارند، لذا شرکت y از پراکندگی شرکت بهتری در مقایسه با شرکت x محسوب می شود.

ضریب پراکندگی	انحراف معیار	میانگین	–
۰/۲	۲	۱۰	شرکت x
۰/۱	۲	۲۰	شرکت y

مثال : ضریب پراکندگی داده های زیر را محاسبه کنید.

۶ و ۸ و ۳ و ۹ و ۴

$(x_i - \bar{x})^۲$	$x_i - \bar{x}$	x_i
۴	۲−	۴
۹	۳	۹
۹	۳−	۳
۴	۲	۸
۰	۰	۶
۲۶	---	جمع = ۳۰

میانگین $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{۳۰}{۵} = ۶$

$$\sigma^{۲} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^{۲}}{n} = \frac{۲۶}{۵} = ۵/۲$$ واریانس

$$\sigma = \sqrt{۵/۲} = ۲/۲۸$$ انحراف معیار

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۲/۲۸}{۶} = ۰/۳۸$$ ضریب تغییرات

نتیجه: اگر تمام داده های آماری برابر باشند، ضریب تغییرات آنها صفر است.

***

تمرین برای حل :

۱۵ : برای داده های زیر ضریب تغییرات را محاسبه کنید.

۱۲ و ۱۵ و ۳ و ۶ و ۹

۱۶ : اگر ضریب تغییرات ۱۰ داده برابر ۲ و میانگین آنها برابر ۴ باشد، واریانس داده ها را به دست آورید.

۱۷ : نشان دهید که اگر تمام داده های یک مجموعه‌ی داده های آماری را در عدد مثبت k ضرب کنیم، ضریب تغییرات آنها تغییری نمی کند.

۱۸ : توضیح دهید که اگر تمام داده های یک مجموعه‌ی داده های آماری را با عدد مثبت k جمع کنیم، ضریب تغییرات آنها چه تغییری می کند؟

۱۹ : داده های یک مجموعه ی داده های آماری بر حسب متر اندازه گیری شده اند. واحد اندازه گیری معیارهای میانگین ، واریانس ، انحراف معیار و ضریب تغییرات را مشخص کنید.

۲۰ : اگر همه‌ی داده های یک مجموعه‌ی داده های آماری مساوی باشند. درباره‌ی میانگین و واریانس آن مجموعه چه می توان گفت؟

۲۱ : اگر تمام داده های یک مجموعه‌ی آماری مساوی و میانگین آنها ۵ باشد. مقدار هر یک از شاخص های زیر را بنویسید.　　　الف : میانه　　　ب: انحراف معیار

۲۲ : میانگین یک مجموعه‌ی داده های آماری ۵ و واریانس آنها ۱۲ است. در صورتی که تمام داده ها را سه برابر کنیم، میانگین و واریانس داده های جدید را بنویسید.

۲۳ : امتیازات مهارت کاری دو نفر از پرسنل یک آزمایشگاه در ۵ روز کاری به صورت زیر است. تعیین کنید که دقت عمل کدام یک بیشتر است.

A : ۲۰ و ۲۳ و ۲۴ و ۲۶ و ۲۷ و B : ۲۱ و ۲۲ و ۲۳ و ۲۶ و ۲۸

۲۴ : نمرات ریاضی و هندسه یک تیم پنج نفره از دانش آموزان برای شرکت در یک آزمون علمی بـه شـرح جدول زیر است. خانه های جدول را کامل کنید و سپس تعیین کنید که این تیم در کـدام آزمـون ریاضـی یـا هندسه بهتر است شرکت نماید. چرا؟

ردیف	نام دانش آموز	ریاضی	هندسه
۱	محسن احمدی	۱۵	۱۲
۲	علی رضایی	۱۱	۱۶
۳	رضا اکبری	۱۲	۱۰
۴	احمد علوی	۱۸	۱۷
۵	حسین صادقی	۱۹	۲۰
میانگین			
واریانس			
انحراف معیار			
ضریب تغییرات			

***

چارک ها

در یک مجموعه‌ی داده های آماری که داده های آن به صورت غیر نزولی مرتب شده باشند، عدد وسط ایـن داده ها را میانه یا چارک دوّم می نامند و آنرا با $Q_۲$ نمایش می دهند. از طرفی میانه‌ی نیمه‌ی اوّل داده ها را چارک اوّل ($Q_۱$) و میانه‌ی نیمه‌ی دوّم آنها را چارک سوّم ($Q_۳$) می نامند.

مثال: چارک های اوّل تا سوّم داده های زیر را تعیین کنید.

۱۹ و ۳۱ و ۲۵ و ۱۸ و ۳۲ و ۴۳ و ۴۱ و ۳۴ و ۱۸ و ۲۷ و ۱۴ و ۲۳ و ۱۵ و۱۰ و۱۲

حل:

۴۳ و۴۱ و ۳۴ و۳۲ و۳۱ و۲۷ و ۲۵ و ۲۳ و ۱۹ و۱۸ و۱۸ و۱۵ و۱۴ و ۱۲ و ۱۰

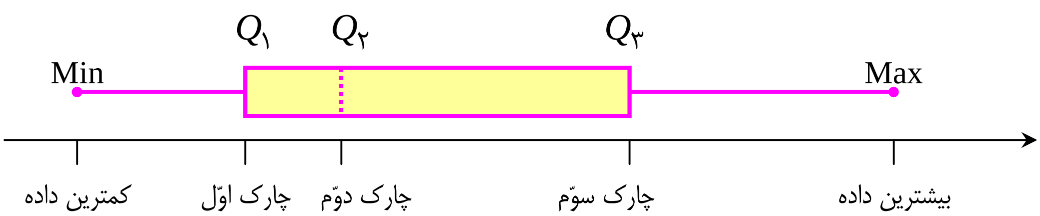
$Q_۳$ $Q_۲$ $Q_۱$

لذا چارک اوّل $Q_۱ = ۱۵$ و چارک دوّم (میانه) $Q_۲ = ۲۳$ و چارک سوّم $Q_۳ = ۳۲$

توجه : برای تعیین چارک ها، ابتدا میانه را محاسبه می کنیم ولی برای تعیین چارک های اوّل و سوّم، میانـه شرکت داده نمی شود.

نمودار جعبه ای و دامنه‌ی میان چارکی

نموداری که معیارهای پراکندگی داده را می توان به کمک آن تعیین کرد. نموداری موسوم به نمودار جعبه ای است. این نمودار پراکندگی داده را در اطراف میانه و قبل و بعد از چارک اوّل و سوّم را به تصویر می کشد. این نمودار به کمک کمترین و بیشترین داده و چارک های اوّل تا سوّم داده های یک مجموعه‌ی آمـاری ترسـیم می شود.



در نمودار جعبه ای ممکن است، میانه وسط جعبه نباشد. میانه به هر سمت متمایل شود، در آن سمت داده ها به هم نزدیکترند و در سمت دیگر داده ها پراکنده تر هستند.

یک معیار دیگر که در صورت وجود داده های دور افتاده (پَرت) مورد استفاده قرار مـی گیـرد. دامنـه‌ی میـان چارکی است. تفاضل چارک اوّل از چارک سوّم را دامنه‌ی میان چارکی می نامند و آن را با IQR نمایش می دهند.

$$IQR = Q_{۳} - Q_{۱}$$

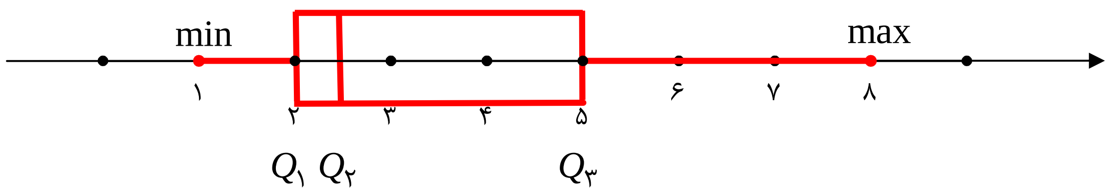
مثال: حسین تعداد گلهای ۲۲ بوته‌ی گل قرمز یک باغ را شمرده است. نمودار جعبه ای این داده ها را ترسیم نموده و دامنه‌ی میان چارکی را محاسبه کنید.

۸ و ۷ و ۷ و ۶ و ۵ و ۵ و ۵ و ۴ و ۴ و ۴ و ۳ و ۳ و ۲ و ۲ و ۲ و ۲ و ۲ و ۲و ۱ و ۱ و ۱ و۱ و ۱ و ۱

حل :

۸ و ۷ و ۷ و ۶ و ۵ و ۵ و ۴ و ۴ و ۴ و ۳ و ۳ | و | ۲ و ۲ و ۲ و ۲ و ۲ و ۲و ۱ و ۱ و ۱ و۱ و ۱ و ۱

$$\min = ۱ \text{ و } Q_{۱} = ۲ \text{ و } Q_{۲} = \frac{۲+۳}{۲} = ۲/۵ \text{ و } Q_{۳} = ۵ \text{ و } \max = ۸$$



دامنه‌ی میان چارکی $IQR = Q_{۳} - Q_{۱} = ۵ - ۲ = ۳$

تمرین برای حل :

۲۴ : داده های زیر را در نظر بگیرید.

۱۹و ۳۱ و ۲۵ و ۱۸ و ۳۲ و ۴۳ و ۴۱ و ۳۴ و ۱۶ و ۲۷ و ۱۴ و ۲۳ و ۱۵ و ۱۰ و ۱۲

الف : چارک های اوّل تا سوّم داده های زیر را تعیین کنید.

ب : دامنه‌ی میان چارکی را محاسبه کنید.

ج : نمودار جعبه ای ترسیم کنید.

۲۵ : چارک های اوّل تا سوّم و دامنه‌ی میان چارکی داده های زیر را محاسبه کنید.

۴۱ و ۱۷ و ۱۶ و ۱۹ و ۱۳ و ۱۴و ۱۸ و ۱۶ و ۱۵ و ۱۷

۲۶: داده های زیر را در نظر بگیرید.

۲۶ و ۲۲ و ۴۱ و ۳۱ و ۲۵ و۲۲ و ۲۸ و۳۰ و ۲۴ و ۲۰

الف: میانگین، میانه را محاسبه کنید.

ب: دامنه‌ی میان چارکی را تعیین کنید.

ج: نمودار جعبه ای مربوط به این داده ها را رسم کنید.

۲۷ : در هر مورد جای خالی را کامل کنید.

الف : تفاضل بیشترین و کمترین داده را .... گویند.

ب : در نمودار جعبه ای ۵۰ درصد داده ها قبل از و ۵۰ درصد داده ها بعد از .... قرار دارند.

پ : در نمودار یک مجموعه‌ی داده های آماری ...... درصد داده ها قبل از چارک اوّل و ..... درصد داده ها قبل از چارک دوّم و ...... درصد داده ها قبل از چارک سوّم قرار می گیرند.

ت : معیارهای پراکندگی که میانگین در آنها نقش دارد .... و....... هستند.

ث : اگر داده های آماری k برابر شوند، ضریب تغییرات .... (عدد k مثبت است.)

ج : واحد اندازه گیری واریانس ، .... واحد اندازه گیری داده ها است.

ح : هر قدر انحراف معیار کمتر باشد، میزان .... داده ها، کمتر است.

***