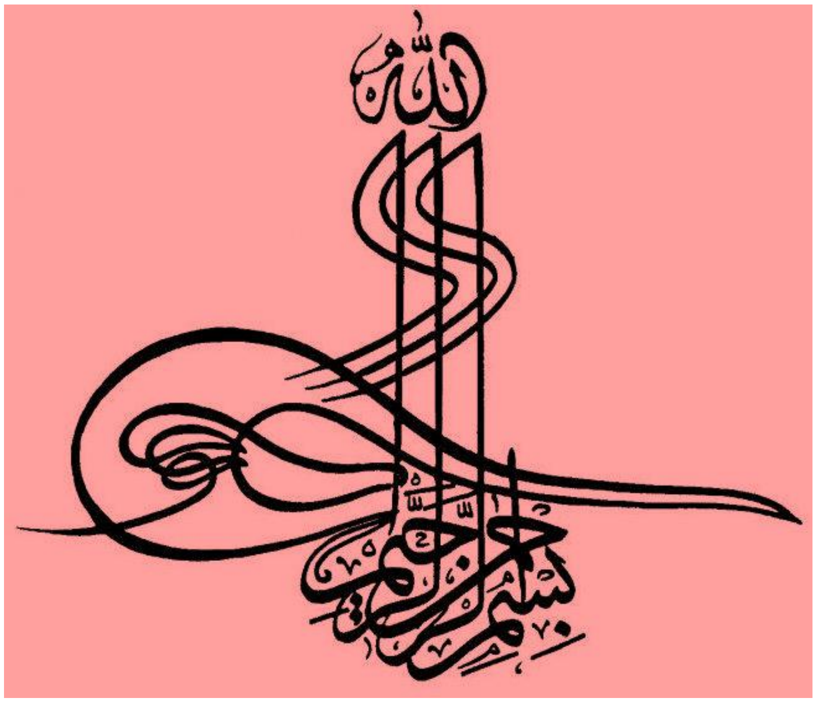
اگرچه نیت خوبی است زیستن ...
اما خوشا که دست به تصمیم بهتری بزنیم !



مقدمه

جزوه حاضر که براساس مطالب کتاب درسی ریاضی دوازدهم تجربی فصل هفتم ، مبحث « **قانون احتمال کل**» نگارش شده است، دارای ویژگی های زیر است:

۱- باز کردن مفاهیمی که در کتاب درسی به علت محدودیت حجم، به آن کمتر پرداخته شده است.

۲- مطالب به صورت ساده و روان و به زبان دانش آموز ارائه شده است.

۳- مطالب و نکات، به گونه ایی است که خلأ بین مطالب ارائه شده در کتب درسی و سؤالات مطرح شده در کنکورهای سراسری را پر کند.

۴- در این کتاب با نگاهی عمیق‌تر و جامع‌تر از کتاب درسی، به مطالب پرداخته شده و به همین منظور از مثال‌ها و مسائل حل شده متنوعی بهره گرفته ایم.

۵- ایجاد تعادل نسبی بین مهارت های محاسبات صوری و درک مفهومی.

۶- استفاده از مسائل باز پاسخ.

۷-توجه به دانش قبلی دانش آموزان.

۸- ایجاد اتصال و ارتباط بین جنبه های متفاوت یک مفهوم و نیز بین یک مفهوم و دیگر مفاهیم کتاب.

در پایان امیدواریم که مطالعه ی دقیق این کتاب و بهره گیری از رهنمودهای دبیران فرهیخته و گران قدر بتوانند موفقیت تحصیلی شما خوبان را تضمین و تثبیت نماید. ارائه ی نظرات شما دانش پژوهان، دبیران فرهیخته و گران قدر، موجب سپاس و امتنان است.

احتمال

یادآوری

پدیده‌ی تصادفی: پدیده یا آزمایشی است که نتیجه‌ی آن را نتوان قبل از انجام، به طور قطعی پیش‌بینی کرد.

فضای نمونه: مجموعه‌ی تمام نتایج ممکنِ یک پدیده‌ی تصادفی را فضای نمونه‌ی آن پدیده می‌نامیم و معمولاً آن را با S نمایش می‌دهیم.

پیشامد تصادفی: هر زیر مجموعه از S را یک پیشامد تصادفی در فضای S مینامیم.

رابطه‌ی محاسبه‌ی احتمال وقوع یک پیشامد: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همه‌ی حالت‌های ممکن}}$

پیشامدهای ناسازگار: دو پیشامد A و B را ناسازگار می‌گوییم، هرگاه A و B با هم رخ ندهند؛ به بیان دیگر $A\cap B=\emptyset$

پیشامدهای مستقل: دو پیشامد A و B از هم مستقل‌اند هرگاه وقوع هر یک بر احتمال وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد.

اعمال روی پیشامدها:

فرض کنیم A و B پیشامدهیی از فضای نمونه‌ای S باشند.

اشتراک دو پیشامد: پیشامد $A \cap B$ وقتی رخ می‌دهد که هر دو پیشامد A و B رخ دهند.

نکته: اگردو پیشامد A و B مستقل باشندآنگاه: $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

نکته: اگردو پیشامد A و B ناسازگار باشندآنگاه: $P(A \cap B) = ۰$

اجتماع دو پیشامد: پیشامد $A \cup B$ وقتی رخ می‌دهد که حداقل یکی از پیشامدهای A و B رخ دهد.

رابطه‌ی محاسبه‌ی احتمال اجتماع دو پیشامد $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

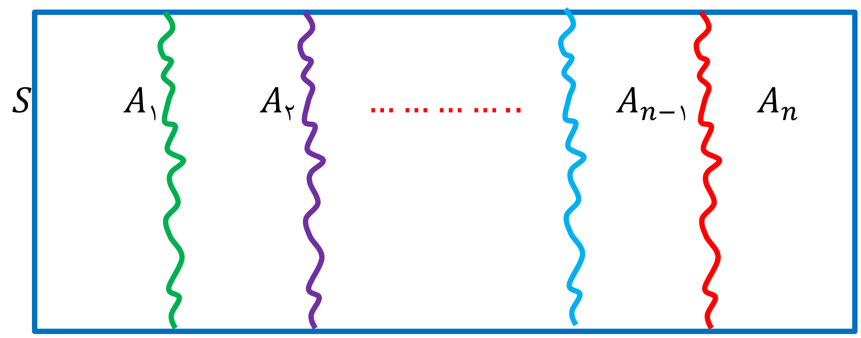
تفاضل دو پیشامد: پیشامد $A - B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد، ولی پیشامد B رخ ندهد.

متمم یک پیشامد: پیشامد A' (یاA^o) وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد. $P(A') = ۱ - P(A)$

احتمال شرطی: منظور از ((احتمالA به شرطB)) که آن را با $P(A|B)$ نمایش می‌دهیم، احتمال وقوع پیشامد A است، به شرط آنکه بدانیم پیشامدB رخ داده است و داریم: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

افراز یک مجموعه

فرض کنیم A_1 و A_2 و … و A_n زیر مجموعه‌هایی نا تهی از مجموعه‌ی S باشند، به گونه‌ای که اجتماع همه‌ی آنها برابر S، و اشتراک هر دو تای آنها برابر $\emptyset$ باشد، در این صورت می‌گوییم این مجموعه‌ها یک افراز روی S درست کرده‌اند.



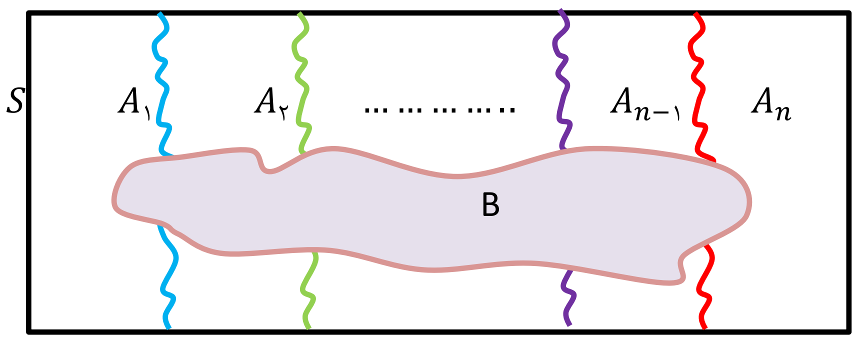
مثال: کشوری ایران به ۳۱ استان افراز شدده است.

مثال: اگر A مجوعه‌ی اعداد طبیعی اول و b مجموعه‌ی اعداد طبیعی مرکب و $C = \{1\}$ باشند، در این صورت C ,A,B یک افراز روی مجموعه‌ی اعداد طبیعی هستند.

مثال: مجموعه‌ی اعداد گویا و مجموعه‌ی اعداد اصم یک افراز روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی تشکیل می‌دهند.

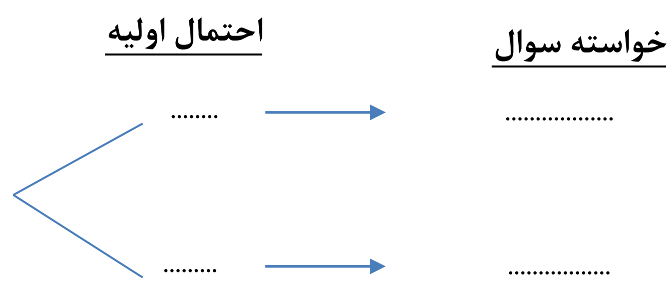
قانون احتمال کل(احتمال های اولیه –ثانویه)

گاهی در تست‌ها، فضای نمونه‌ای به مجموعه‌های $A_1, A_2, \dots, A_n$ افراز می‌شود که هیچ کدام از آن ها اشتراکی با هم ندارند و حتماً یکی از آن ها رخ می‌دهد. به بیان دیگر فضای نمونه‌ای به پیشامدهای دو به دو ناسازگار تقسیم می‌شود. حال برای به‌دست آوردن احتمال وقوع پیشامد B که در درون پیشامدهای فوق واقع است، از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم.



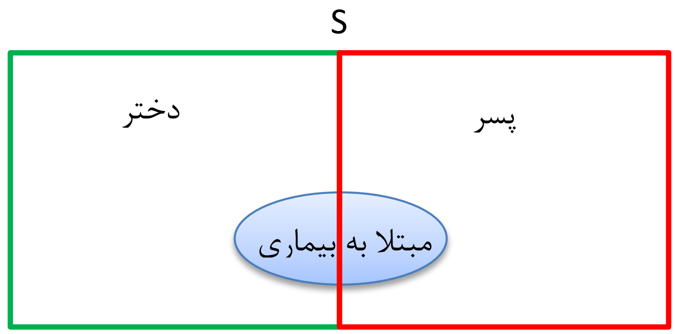
$$P(B) = P(A_1).P(B|A_1) + P(A_2).P(B|A_2) + \cdots + P(A_n).P(B|A_n)$$

روش کنکوری: در این نوع مسائل با دو احتمال سروکار داریم؛ احتمال اولیه و احتمال ثانویه (احتمال ثانویه همان خواسته مسئله است). ابتدا احتمال اولیه و احتمال ثانویه (خواسته سوال) را مشخص کرده و آن ها را به صورت درختی در نظرمی‌گیریم. سپس احتمال‌های هر شاخه را در هم ضرب کرده و در نهایت احتمال‌های شاخه‌های مختلف را با هم جمع کنیم.



مثال: اگر احتمال انتقال نوعی بیماری خاص به نوزاد پسر ۰/۰۸ و نوزاد دختر ۰/۳۰ باشد و خانواده‌ای قصد بچه‌دار شدن داشته باشد، به چه احتمالی نوزاد آنها به بیماری مذکور مبتلا خواهد شد؟

حل:

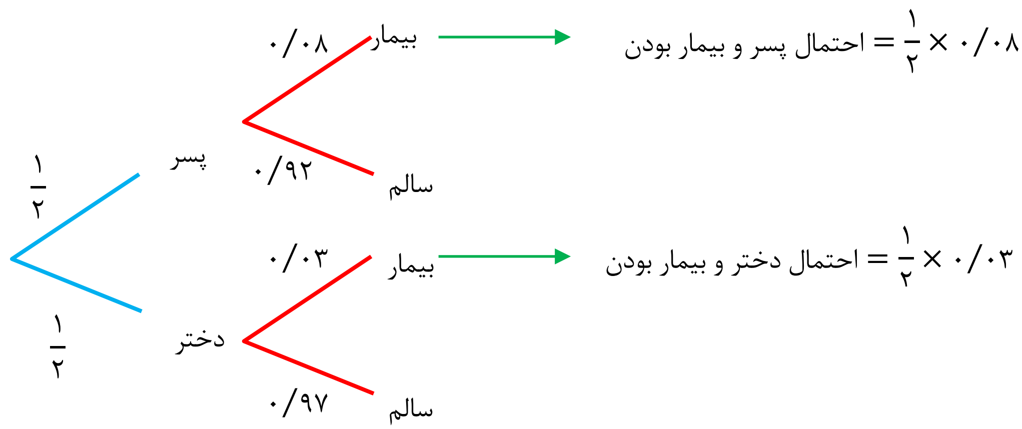


با توجه به قانون احتمال‌کل خواهیم داشت:

p(بیمار بودن) = p(پسربودن) . p(بیماربودن|پسربودن) + p(دختر بودن) . p(بیمار بودن|دختر بودن)

$$P\left(\text{بودن بیمار}\right) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۸}{۱۰۰} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۱۰۰} = \frac{۱۱}{۲۰۰}$$

روش دوم: استفاده از نمودار درختی

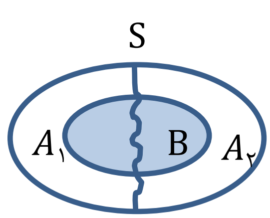


حال اگر شاخه‌هایی را که با وضعیت بیمار ختم می‌شوند، مشخص کنیم و احتمال‌های روی آن شاخه را در هم ضرب و با نتیجه‌ی حاصل از شاخه‌های دیگر جمع کنیم، خواهیم داشت:

$$\underbrace{\frac{۱}{۲}\times ۰/۰۸}_{\text{شاخه ی اول}}+\underbrace{\frac{۱}{۲}\times ۰/۰۳}_{\text{شاخه ی دوم}}=۰/۰۵۵$$

مثال: فرض کنید انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزندان پسر ۰/۱ و به دختر ۰/۰۷ باشد. والدینی که حاصل این نوع بیماری هستند انتظار فرزندی را دارند. مطلوب است احتمال آن که این فرزند سالم باشد.

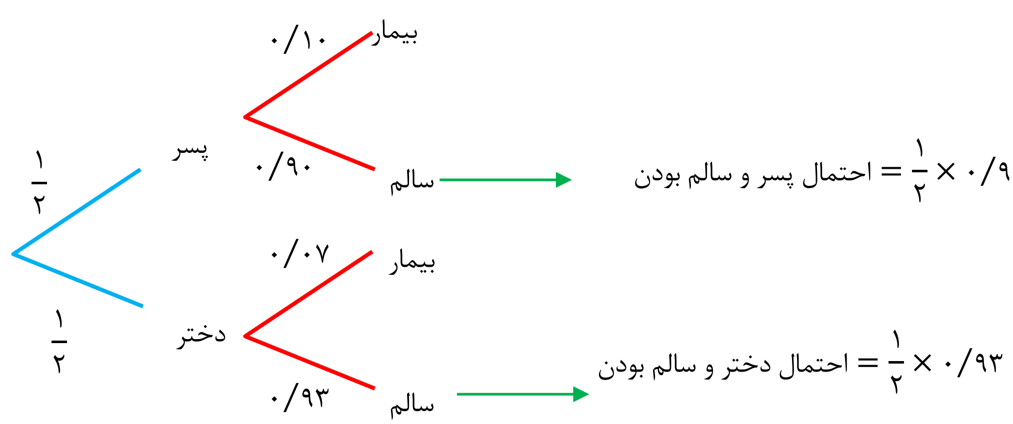
پاسخ:



فرزندی که به دنیا خواهد آمد یا پسر است یا دختر. پس اگر پسر بودن فرزند را با $A_۱$ و دختر بودن آن را با $A_۲$ نشان دهیم، آن‌گاه $A_۱$ و $A_۲$ ناسازگارند و حتماً یکی از آن‌ها رخ خواهد داد. سالم بودن فرزند را با B نشان می‌دهیم. میخواهیم P(B) را حساب کنیم. با استفاده از فرمول قانون احتمال کال داریم:

$$P(B)=P(A_۱)P(B|A_۱)+\cdots+P(A_۲)P(B|A_۲)=\frac{۱}{۲}\times(۱-۰/۱)+\frac{۱}{۲}(۱-۰/۰۷)$$
$$=۰/۴۵+۰/۴۶۵=۰/۹۱۵$$

روش دوم: استفاده از نمودار درختی

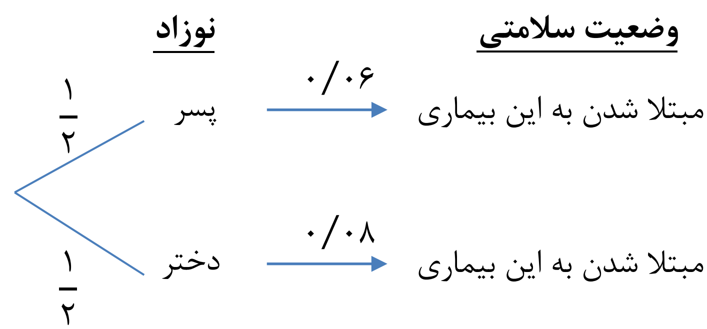


حال اگر شاخه‌هایی را که با وضعیت سالم ختم می‌شوند، مشخص کنیم و احتمال‌های روی آن شاخه را در هم ضرب و با نتیجه‌ی حاصل از شاخه‌های دیگر جمع کنیم، خواهیم داشت:

$$\underbrace{\frac{۱}{۲} \times ۰/۹}_{\text{شاخه ی اول}} + \underbrace{\frac{۱}{۲} \times ۰/۹۳}_{\text{شاخه ی دوم}} = ۰/۹۱۵$$

مثال: اگر احتمال به دنیا آمدن یک نوزاد پسر مبتلا به نوعی بیماری خاص ۰/۰۶ و همین احتمال برای یک دختر نوزاد ۰/۰۸ باشد. والدینی انتظار فرزندی را دارند با چه احتمالی نوزاد آن‌ها به بیماری مورد نظر مبتلا خواهد بود؟

حل) فرزندی که به دنیا می‌آید، یا پسر است یا دختر. از نمودار درختی برای به‌دست آوردن احتمال مورد نظر استفاده می‌کنیم:



$$P\left(\text{مبتلا شدن به این بیماری}\right) = \frac{۱}{۲} \times ۰/۰۶ + \frac{۱}{۲} \times ۰/۰۸ = ۰/۰۷$$

تست: انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر ۱۰ درصد و به فرزند دختر ۶ درصد است. با کدام احتمال فرزندی که به دنیا می‌آید این نوع بیماری را ندارد؟ (سراسری تجربی)

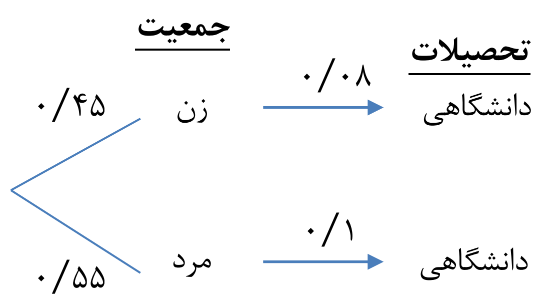
۱) ۰/۹۱   ۲) ۰/۹۲ ✓   ۳) ۰/۹۳   ۴) ۰/۹۴

تمرین: در خانواده ای ۶۰ درصد دختران و ۲۴ درصد فرزندان پسر، با هوش به دنیا می آیند. احتمال این‌که در این خانواده فرزندی باهوش متولد شود کدام است؟

جواب ۰/۴۲

مثال: ۴۵درصد جمعیت کشوری را زنان و ۵۵ درصد بقیه را مردان تشکیل می‌دهند. اگر ۸ درصد زنان و ۱۰ درصد مردان تحصیلات دانشگاهی داشته باشند. چند درصد جمعیت این کشور تحصیلات دانشگاهی دارد؟

حل) نمودار درختی اطلاعات داده شده به صورت زیر می باشد.

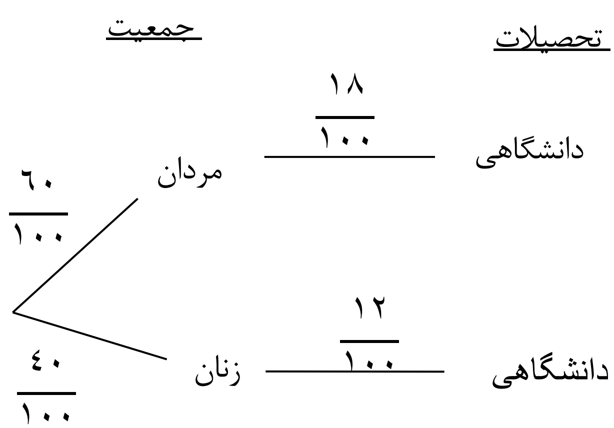


احتمال مورد نظر برابر است با: $P = ۰/۴۵ \times ۰/۰۸ + ۰/۵۵ \times ۰/۱ = ۰/۰۹۱$

بنابر این ۹/۱=۱۰۰×۰/۰۹۱ درصد جمعیت این کشور تحصیلات دانشگاهی دارند.

تست:در یک شهر صنعتی ۶۰ درصد جمعیت مرد و ۴۰ درصد آن زن هستند. اگر ۱۸ درصد مردان و ۱۲ درصد زنان تحصیلات دانشگاهی داشته باشند، چند درصد این جمعیت تحصیلات دانشگاهی دارند؟ (سراسری تجربی داخل ۹۶)

۱) ۱۵/۲ ۲) ۱۵/۶ ۳) ۱۵/۸ ۴) ۱۶/۲



جواب : $\frac{۶۰}{۱۰۰} \times \frac{۱۸}{۱۰۰} + \frac{۴۰}{۱۰۰} \times \frac{۱۲}{۱۰۰} = \frac{۱۵۶}{۱۰۰۰} \times ۱۰۰ = ۱۵/۶$

تست: احتمال ابتلا به کم خونی در مردان ۲ درصد و در زنان ۸ درصد است. ۵۵ درصد جامعه‌ای زنان هستند احتمال ابتلای یک فرد به کم خونی کدام است؟

۱) ۰/۰۵۱ ۲) ۰/۰۵۲ ۳)√ ۰/۰۵۳ ۴) ۰/۰۵۴

تست: ۵۵ درصد دانشجویان سال اول دختر و بقیه پسر هستند. ۶۰ درصد دختران و ۶۴ درصد پسران، تمام واحدهای درسی خود را گذرانده‌اند. چند درصد کل دانشجویان تمام واحدهای درسی را گذرانده‌اند؟ (سراسری تجربی ۸۸ خارج از کشور)

۱) ۶۱/۴ ۲)√ ۶۱/۸ ۳) ۶۲/۴ ۴) ۶۲/۸

تست: در کارخانه ای $\frac{۳}{۴}$ کارگران مرد و بقیه زن هستند، می‌دانیم $\frac{۳}{۵}$ کارگران مرد باسواد و $\frac{۱}{۵}$ کارگران زن نیز باسواد هستند. چند درصد کارگران کارخانه باسوادند؟

۱) ٪ ۳۰ ۲) ٪ ۴۰ ۳)√ ٪ ۵۰ ۴) ٪ ۶۰

تست: در یک دانشگاه ۱۰درصدپسران و ۲۰درصددختران عضو کتابخانه نیستند و ۴۰درصد کل دانشجویان را پسران تشکیل می‌دهند، یک دانشجو انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که این دانشجو عضو کتابخانه باشد؟

۱) ۰/۳۶ ۲) ۰/۴۸ ۳)√ ۰/۸۴ ۴) ۰/۱۶

تست: احتمال انتقال بیماری مسری به افرادی که واکسن زده‌اند ۰/۰۲۵ و احتمال انتقال به افراد دیگر ۰/۲ است. $\frac{۲}{۵}$ کارگران یک کارگاه واکسن

توجه: