اگرچه نیت خوبی است زیستن ...
اما خوشا که دست به تصمیم بهتری بزنیم !

ریاضی ۲

پایه‌ی یازدهم «رشته‌ی علوم تجربی»

فصل ۶ : حد و پیوستگی

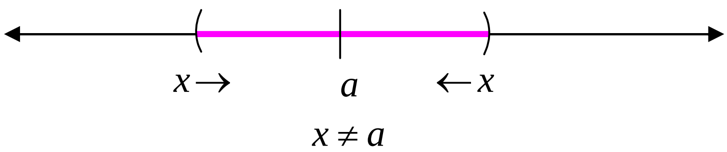
درس اوّل : مفهوم حد و فرآیندهای حدی

مفهوم حد، یکی از مفاهیم اساسی در ریاضیات است. آشنایی با این مفهوم منجر به شناخت دقیق رفتار تابع می گردد. به همین جهت است این مفهوم در بسیاری از شاخه های علوم، از جمله فیزیک، ریاضی و اقتصاد کاربردهای فراوان دارد. با وجود پیچیدگی در تعریف حد در این درس فقط به درک شهودی آن می پردازیم.

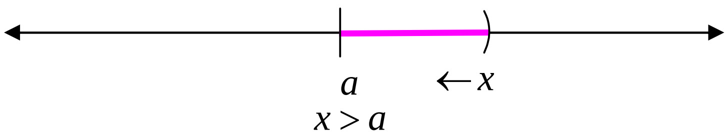
امّا قبل از ورود به بحث، نماد های زیر را معرفی می کنیم.

در ابتدا مفاهیم اوّلیه‌ی زیر را برای درک، مفهوم حد، معرفی کنیم.

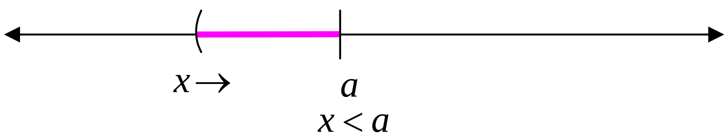
۱) منظور از نماد $x \to a$ (می خوانند x میل می کند، به سمت a) ، یعنی متغیر x از دو طرف محور طول ها به عدد a نزدیک می شود ولی هیچگاه روی آن منطبق نمی شود. بنابراین اختلاف x و a بسیار کوچک است ولی $x \neq a$



۲) منظور از نماد $x \to a^+$ (می خوانند x میل می کند، به سمت a از راست) ، یعنی متغیر x فقط از طرف راست محور طول ها به عدد a نزدیک می شود ولی هیچگاه روی آن منطبق نمی شود. بنابراین اختلاف x و a بسیار کوچک است ولی $x > a$



۳) منظور از نماد $x \to a^-$ (می خوانند x میل می کند، به سمت a از چپ) ، یعنی متغیر x فقط از طرف چپ محور طول ها به عدد a نزدیک می شود ولی هیچگاه روی آن منطبق نمی شود. بنابراین اختلاف x و a بسیار کوچک است ولی $x < a$

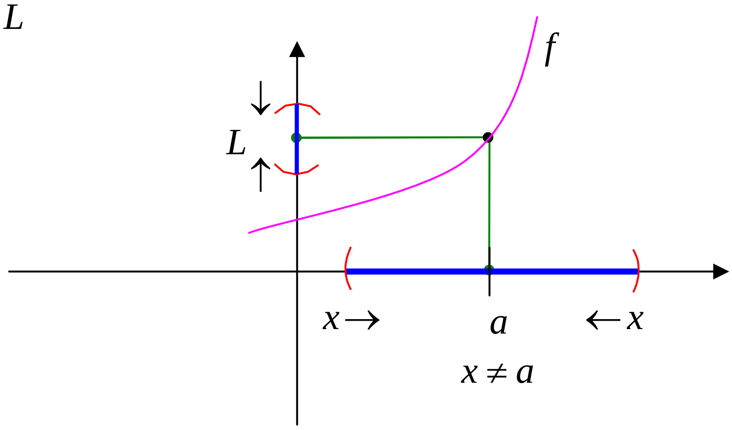


***

قسمت اوّل : مفهوم شهودی حد تابع در یک نقطه

وقتی متغیر x از دو طرف محور طول ها به سمت عدد a میل کند و مقدار $f(x)$ نزدیک به عدد L شود، گویند حد تابع f در $x=a$ برابر L است و می نویسند.

$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$



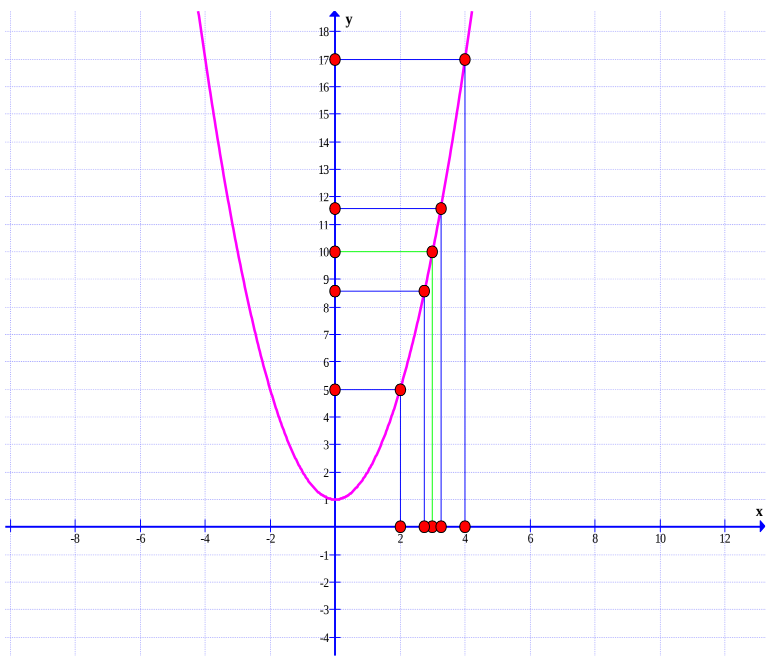
مثال : در تابع $f(x)=x^{۲}+۱$ اگر متغیر x از دو طرف به عدد ۳ نزدیک شود. آنگاه مقادیر تابع بـه عـدد ۱۰ نزدیک می شوند. در این صورت $\lim_{x\to ۳} f(x)=۱۰$. به جدول و نمودار زیر توجه کنید.

جدول

x	۲	۲/۵	۲/۷۵	۲/۹	۲/۹۹	۳	۳/۰۱	۳/۱	۳/۲۵	۳/۵	۴
$f(x)$	۵	۷/۲۵	۸/۵۶۲۵	۹/۴۱	۹/۹۴۰۱	۱۰	۱۰/۰۶۰۱	۱۰/۶۱	۱۱/۵۶۲۵	۱۳/۲۵	۱۷

$$\lim_{x\to ۳} f(x)=۱۰$$

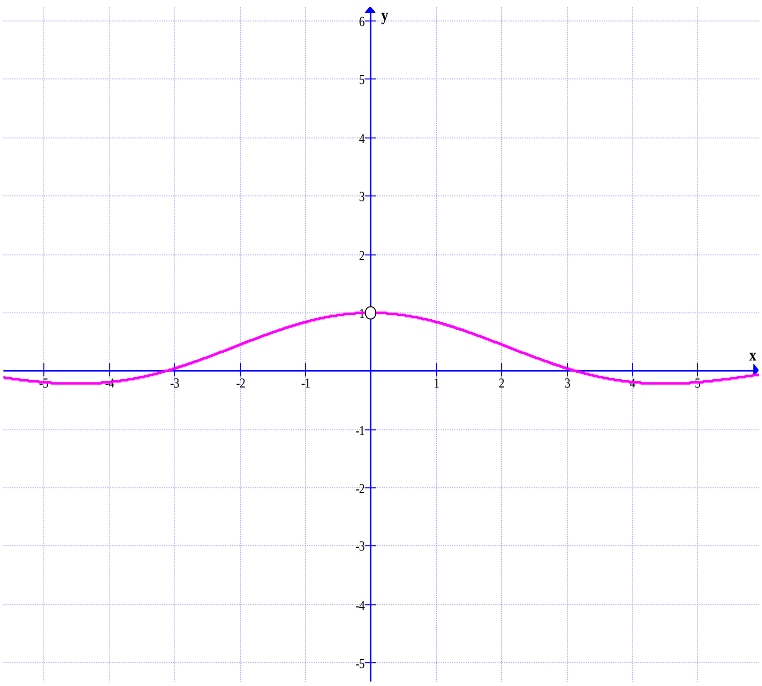
نمودار



تمرین ۱) با تشکیل جدول مقدار حد تابع $f(x)=\frac{x^{۲}-۱}{x-۱}$ در نقطه‌ی $x=۱$ محاسبه کنید.

تمرین ۲) در شکل زیر نمودار تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ رسم شده است. با توجه به این شـکل حـد مقابـل را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}=$$



نتیجه : حد تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ وقتی که x به سمت صفر میل کند، برابر یک است.

***

قسمت دوّم : محاسبه‌ی حد تابع در یک نقطه

در اکثر مواقع با جایگزینی مقدار به جای x در معادله‌ی تابع ، می توان حد توابع را محاسبه نمود. این روش را روش جایگزینی مستقیم می نامند. برای مثال برای محاسـبه‌ی حـد تـابع $f(x)=\sqrt{x+۱}$ وقتـی x بـه سمت ۳ میل می کند. می توان به شکل زیر عمل کرد.

$$\lim_{x\to ۳} f(x)=\lim_{x\to ۳}\sqrt{x+۱}=\sqrt{۳+۱}=۲$$

تمرین برای حل :

۳ : حد تابع $f(x)=\sqrt{2x-3}$ در نقطه‌ی $x=6$ را بدست آورید.

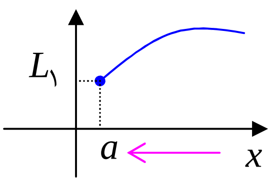
۴ : حد تابع $f(x)=\dfrac{4x}{x-1}$ در نقطه‌ی $x=3$ را بدست آورید.

۵ : حد تابع $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ در نقطه‌ی $x=1$ محاسبه کنید.

❋❋❋

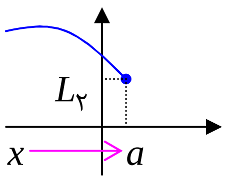
قسمت سوّم : حد های یک طرفه

اگر متغیر x فقط از یک طرف محور طول ها به سمت عدد a میل کند. با مفهوم حد های یک طرفه سروکار داریم.



حد راست : وقتی متغیر x فقط از طرف راست محور طول ها به سمت عدد a میل کند و مقدار $f(x)$ نزدیک به عدد L_1 شود، گویند حد راست تابع f در $x=a$ برابر L_1 است و می نویسند.

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=L_1$$



حد چپ : وقتی متغیر x فقط از طرف چپ محور طول ها به سمت عدد a میل کند و مقدار $f(x)$ نزدیک به عدد L_2 شود، گویند حد چپ تابع f در $x=a$ برابر L_2 است و می نویسند.

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=L_2$$

مثال : حد راست تابع زیر را در نقطه‌ی $x=2$ به دست آورید.

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & x\geq 2 \\ -x & x<2 \end{cases}$$

حل :

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} x+1=2+1=3$$

مثال : حد چپ تابع زیر را در نقطه‌ی $x=۲$ به دست آورید.

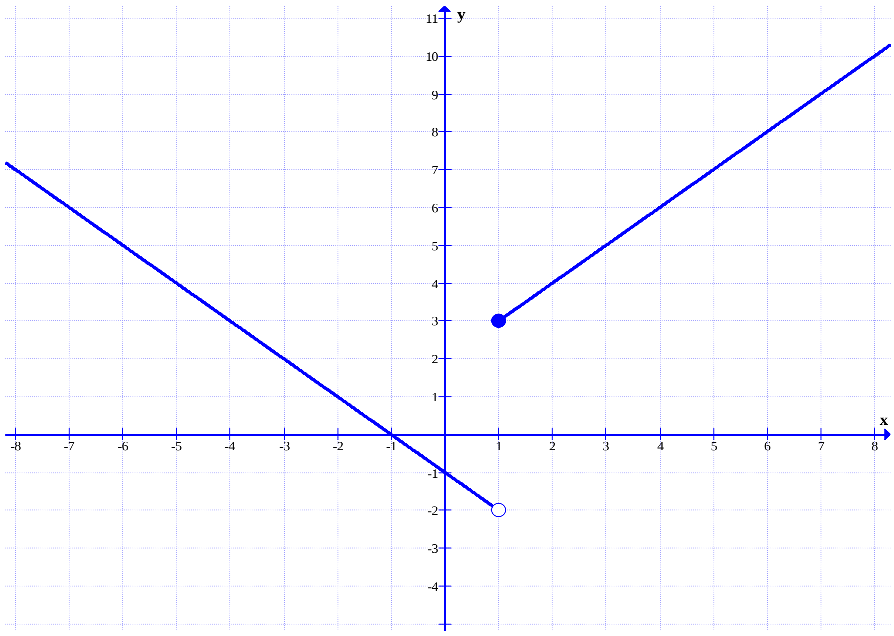
$$f(x)=\begin{cases} x+۱ & x\geq ۲ \\ -x & x<۲ \end{cases}$$

حل :

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-} -x=-۲$$

مثال : با توجه به شکل زیر مطلوب است محاسبه‌ی

الف) $\lim_{x\to ۱^+} f(x)$ ب) $\lim_{x\to ۱^-} f(x)$ ج) $f(۱)$



حل :

الف) $\lim_{x\to ۱^+} f(x)=۳$ ب) $\lim_{x\to ۱^-} f(x)=-۲$ ج) $f(۱)=۳$

مثال: حد راست و حد چپ و مقدار تابع زیر را در نقطه‌ی $x=۲$ بدست آورید.

$$f(x)=\begin{cases} ۳x-۱ & x\geq ۲ \\ x^۲ & x<۲ \end{cases}$$

حل :

حد راست $\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+} (۳x-۱)=۳(۲)-۱=۵$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲^-} (x^۲) = (۲)^۲ = ۴$

مقدار $f(۲) = ۳(۲) - ۱ = ۵$

تمرین برای حل :

۵ : حد راست و حد چپ و مقدار تابع زیر را در نقطه‌ی $x = ۱$ بدست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^۲ + ۳} & x > ۱ \\ ۳x + ۲ & x = ۱ \\ ۲x - ۵ & x < ۱ \end{cases}$$

***

قسمت چهارم : شرط وجود حد یک تابع در یک نقطه

گویند تابع $y = f(x)$ در نقطه‌ی $x = a$ دارای حد است، هرگاه

الف : تابع در دو طرف نقطه‌ی $x = a$ تعریف شده باشد.

ب : در این نقطه، حد راست و چپ آن عدد های مساوی شوند.

به عبارتی دیگر، اگر تابع f در همسایگی راست و چپ نقطه‌ی $x = a$ تعریف شده باشد و

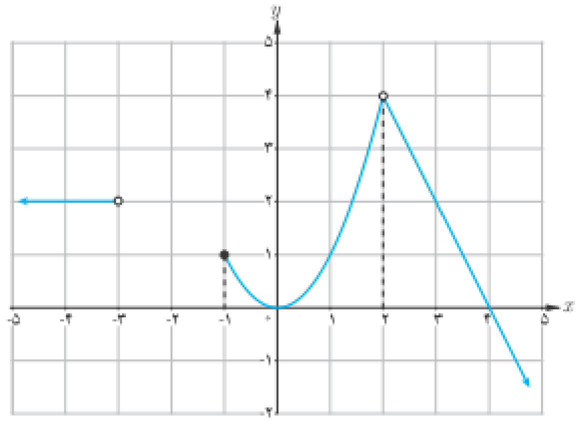
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L_۲ \text{ و } \lim_{x\to a^+} f(x) = L_۱$$

در این صورت، اگر $L_۱ = L_۲ = L$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ و برعکس[1]

مثال : در شکل زیر نمودار تابع f به ضابطه‌ی زیر رسم شده است.

$$f(x) = \begin{cases} -۲x + ۸ & x > ۲ \\ x^۲ & -۱ \le x < ۲ \\ ۲ & x < -۳ \end{cases}$$

[1]. بر این اساس، گویند تابع در نقطه‌ی $x = a$ دارای حد نیست، هرگاه یکی از حالت های زیر وجود داشته باشد.
الف : حد راست و چپ عددهای مساوی نباشند. ب : حد راست یا چپ یا هر دو وجود نداشته باشد. یعنی تابع در سمت راست یا چپ تابع تعریف نشده یا اینکه تابع رفتار بی کران داشته باشد. ج: تابع در یک یا دو سمت این نقطه رفتار نوسانی دارد.



با توجه به این شکل می توان نوشت:

۱ : تابع در نقطه‌ی $x=۲$ تعریف نشده است. یعنی $f(۲)$ وجود ندارد.

۲ : حد تابع در نقطه‌ی $x=۲$ برابر ۴ است. یعنی $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۴$

۳ : حد راست تابع در نقطه‌ی $x=-۱$ برابر ۱ است. یعنی $\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x)=۱$

۴ : تابع در نقطه‌ی $x=-۱$ حد چپ ندارد. یعنی $\lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(x)$ وجود ندارد.

۵ : تابع در نقطه‌ی $x=-۱$ حد ندارد. یعنی $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)$ وجود ندارد.

۶ : مقدار تابع در نقطه‌ی $x=-۱$ برابر ۱ است. یعنی $f(-۱)=۱$

۷ : چون $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=۰$ پس تابع در نقطه‌ی $x=۰$ حد دارد. یعنی

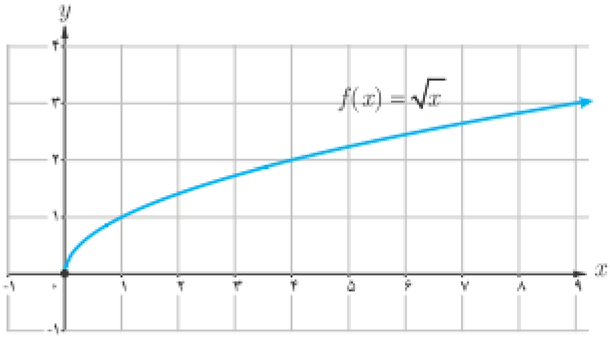
$\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=۰$ از طرفی $f(۰)=۰$

۸ : چون $\lim\limits_{x\to ۴^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۴^+} f(x)=۰$ پس تابع در نقطه‌ی $x=۴$ حد دارد. یعنی

$\lim\limits_{x\to ۴} f(x)=۰$ از طرفی $f(۴)=۰$

۹ : $f(-۳)$ و $\lim\limits_{x\to(-۳)^+} f(x)$ وجود ندارد ولی $\lim\limits_{x\to(-۳)^-} f(x)=۲$

مثال : برای تابع $f(x)=\sqrt{x}$ با نمودار زیر می توان نوشت.



الف : $\lim\limits_{x\to ۰^+}\sqrt{x}=۰$ ب : $\lim\limits_{x\to ۰^-}\sqrt{x}$ وجود ندارد، زیرا تابع در $x<۰$ تعریف نشده است.

پ : $\lim\limits_{x\to ۰}\sqrt{x}$ وجود ندارد.

مثال : نشان دهید که تابع زیر در نقطه‌ی $x=۳$ دارای حد است.

$$f(x)=\begin{cases} x^۲+۲x & x\geq ۳ \\ ۵x & x<۳ \end{cases}$$

حل :

حد راست $\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۳^+}(x^۲+۲x)=(۳)^۲+۲(۳)=۱۵$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۳^-}(۵x)=۵(۳)=۱۵$

و چون $\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)=۱۵$ پس تابع در نقطه‌ی $x=۳$ دارای حد است و

$$\lim_{x\to ۳} f(x)=۱۵$$

مثال : نشان دهید که تابع $f(x)=۳+[x]$ در نقطه‌ی $x=۲$ حد ندارد.

حل :

حد راست $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+}(۳+[x])=۳+[۲^+]=۳+۲=۵$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-}(۳+[x])=۳+[۲^-]=۳+۱=۴$

و چون $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)$ پس تابع در نقطه‌ی $x=۲$ دارای حد نیست.

مثال: تابعی مانند f مثال بزنید که در $x=۱$ حد نداشته باشد، اما $|f|$ در $x=۱$ حد داشته باشد.

حل : قرار می دهیم.

$$f(x)=\begin{cases} ۲ & x\geq ۱ \\ -۲ & x<۱ \end{cases} \rightarrow |f(x)|=\begin{cases} ۲ & x\geq ۱ \\ ۲ & x<۱ \end{cases} \rightarrow |f(x)|=۲$$

در این صورت $\lim\limits_{x\to ۱}|f(x)|=۲$ در حالی که دو تابع f در نقطه ی $x=۱$ حد ندارد.

مثال : مقدار a را چنان پیدا کنید که تابع زیر در نقطه‌ی $x=۳$ حد داشته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} ax^۲+x-۱ & x<۳ \\ -۳x+۲ & x\geq ۳ \end{cases}$$

حل : کافی است حد راست و حد چپ این تابع را در نقطه‌ی $x=۳$ محاسبه کرده و برابر هم قرار دهیم.

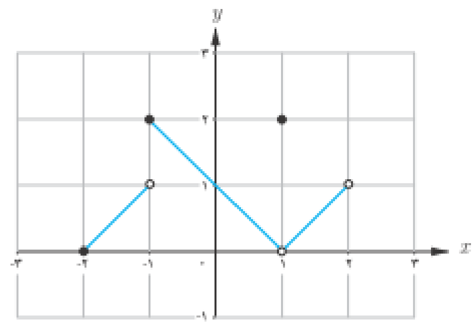
حد راست $\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۳^+}(-۳x+۲)=-۳(۳)+۲=-۷$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۳^-}(ax^۲+x-۱)=a(۳)^۲+(۳)-۱=۹a+۲$

$$\Rightarrow ۹a+۲=-۷\rightarrow ۹a=-۹\rightarrow a=-۱$$

تمرین برای حل :

۶ : برای تابع f که نمودار آن داده شده است، کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟



الف) $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=۲$

ب) $f(۱)=۲$

پ) $f(۲)=۱$

ت) $\lim\limits_{x\to (-۲)^+} f(x)=۰$

ث) $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)=۲$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=۱$

چ) $\lim_{x\to ۲} f(x)$ وجود ندارد.

ح) $\lim_{x\to -۱} f(x)$ وجود ندارد.

۷ : نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x-۲}$ را رسم کنید. سپس حاصل تساوی های زیر را در صورت وجود را بنویسید.

الف) $\lim_{x\to ۲^+} f(x)$

ب) $\lim_{x\to ۲^-} f(x)$

ج) $\lim_{x\to ۲} f(x)$

د) $f(۲)$

۸ : نمودار تابع زیر را رسم کنید. سپس به سئوالات زیر پاسخ دهید.

$$f(x)=\begin{cases} x & x>۰ \\ -x & x<۰ \end{cases}$$

الف :آیا این تابع در نقطه‌ی صفر حد دارد؟ در صورت مثبت بودن جواب حد آن را بنویسید.

ب : آیا $f(۰)$ موجود است؟ چرا؟

۹ : نمودار تابع $f(x)=\frac{|x|}{x}$ را رسم کنید. سپس حد تابع را در نقطه‌ی $x=۰$ را در صورت وجود به دست آورید.

۱۰ : مثالی از یک تابع همراه با نمودار آن ارائه کنید که حد تابع در نقطه‌ی ۲ برابر ۱− باشد.

۱۱ : تابعی مانند f ارائه کنید که در نقطه‌ی ۳ حد نداشته باشد و $f(۳)=۱$

۱۲ : تابعی مانند f ارائه کنید که در نقطه‌ی ۲ تعریف نشده باشد ولی $\lim_{x\to ۲} f(x)=۴$

۱۳ : نمودار تابع $f(x)=|x-۱|$ را رسم کنید. سپس حاصل تساوی های زیر را در صورت وجود را بنویسید.

الف) $\lim_{x\to ۱^+} f(x)$

ب) $\lim_{x\to ۱^-} f(x)$

ج) $\lim_{x\to ۱} f(x)$

د) $f(۱)$

۱۴ : با محاسبه‌ی حد راست و حد چپ ، وجود حد تابع زیر در نقطه‌ی $x=۰$ را بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x}{|x|} & x\neq ۰ \\ ۵ & x=۰ \end{cases}$$

۱۵ : نمودار تابع زیر را رسم کنید و حد تابع در نقطه‌ی $x=۰$ را در صورت وجود به دست آورید.

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۲ & x>۰ \\ -۲x-۲ & x\leq ۰ \end{cases}$$

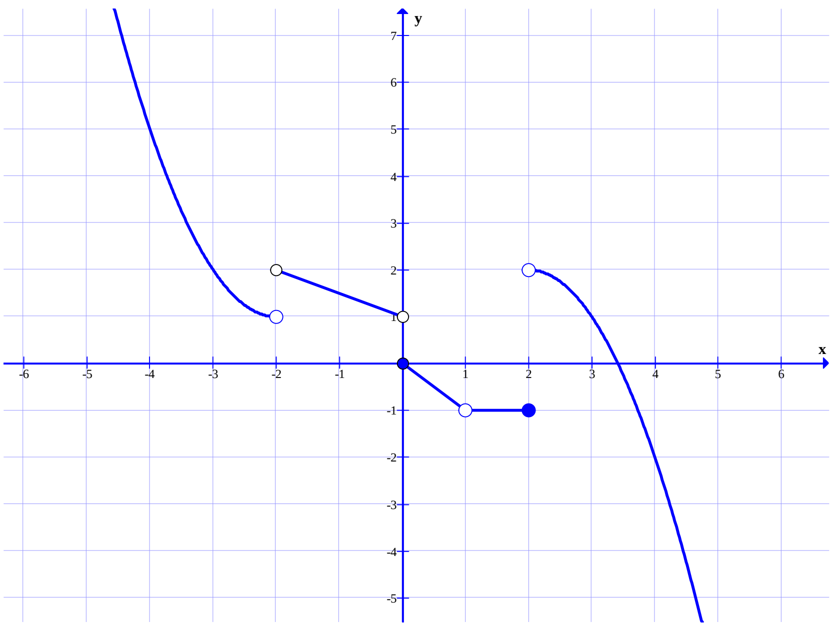
۱۶ : نشان دهید که تابع زیر در نقطه‌ی $x=۲$ حد ندارد.

$$f(x)=\begin{cases} -x+۲ & x>۲ \\ -۲ & x=۲ \\ x-۳ & x<۲ \end{cases}$$

۱۷ : مقدار a را چنان بیابید که تابع زیر در نقطه‌ی $x=-۱$ حد داشته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} ax^{۳}-۲ & x>-۱ \\ ۲ax^{۲} & x\leq -۱ \end{cases}$$

۱۸ : با توجه به شکل مقابل، تساوی های زیر را کامل کنید.[۲]



---

[2] . توجه : منظور از نماد $x \to (-۲)^{+}$ یعنی x از سمت راست بـه ۲- نزدیـک مـی شـود. و منظـور از نمـاد $x \to -۲^{+}$ یعنی x در قسمت قرینه‌ی سمت راست ۲ قرار دارد. واضح است که $-۲^{+}=(-۲)^{-}$

همچنین منظور از نماد $x \to (-۲)^{-}$ یعنی x از سمت چپ به ۲- نزدیک می شود. و منظور از نماد $x \to -۲^{-}$ یعنی x در قسمت قرینه‌ی سمت چپ ۲ قرار دارد. واضح است که $-۲^{-}=(-۲)^{+}$

الف) $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) + ۳\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) - ۲\lim\limits_{x\to (-۲)^+} f(x) =$

ب) $\lim\limits_{x\to (-۲)^-} f(x) - \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) + ۴\lim\limits_{x\to ۱} f(x) + \lim\limits_{x\to -۲^-} f(x) =$

ج) $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) - \lim\limits_{x\to (-۲)^+} f(x) + ۲\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) =$

د) $\dfrac{\lim\limits_{x\to (-۳)^+} f(x)}{\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) + \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)} =$

❋❋❋

درس دوّم : محاسبه‌ی حد توابع

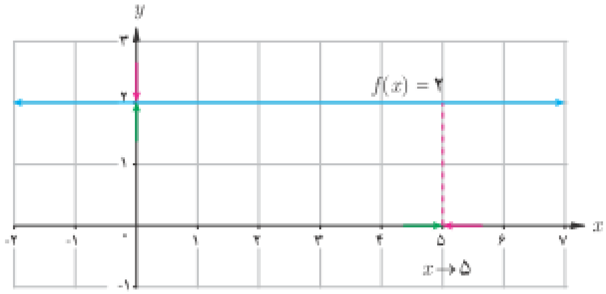
یکی از عواملی که می تواند به مطالعه‌ی دقیق تر یک تابع کمک کند، حد آن تابع (در یک نقطه) است. لـذا لازم است قواعد و دستور هایی برای محاسبه‌ی حد وجود داشته باشد. در این درس برخی از این قواعد را به طور شهودی و به همراه ذکر مثال ، معرفی می کنیم.

قسمت اوّل : اعمال روی حد توابع

در این بخش به مطالعه‌ی اعمال روی حد می پردازیم که محاسبه‌ی حدود توابع را ساده تر می کنند.

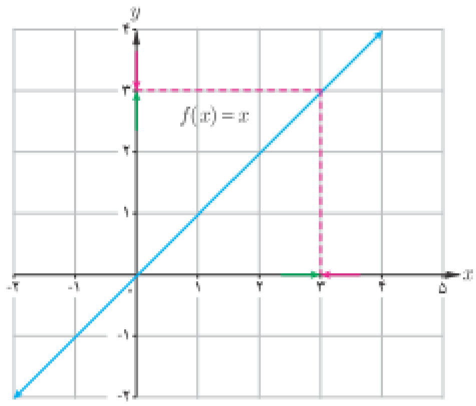
۱ : تابع ثابت $f(x)=c$ در همه‌ی نقاط حد دارد و $\lim\limits_{x \to a} f(x)=c$

مثال : تابع $f(x)=۲$ در همه‌ی نقاط حد دارد. لذا $\lim\limits_{x \to ۵} f(x)=۲$



۲ : تابع همانی $f(x)=x$ در همه‌ی نقاط حد دارد و $\lim\limits_{x \to a} f(x)=a$

مثال : تابع $f(x)=x$ در همه‌ی نقاط حد دارد. لذا $\lim\limits_{x \to ۳} f(x)=۳$



۳ : فرض کنیم که توابع f و g روی دامنه‌ی یکسانی تعریف شده و در a دارای حد باشند. به عبارت دیگر فرض کنیم که $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=k$ در این صورت :

الف : حد مجموع دو تابع برابر مجموع حد های آنها است.

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)=l+k$$

ب : حد تفاضل دو تابع برابر تفاضل حد های آنها است.

$$\lim_{x\to a}(f(x)-g(x))=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)=l-k$$

ج : حد حاصل ضرب دو تابع برابر با حاصل ضرب حد های آنها است.

$$\lim_{x\to a}(f(x)\times g(x))=\lim_{x\to a} f(x)\times\lim_{x\to a} g(x)=lk$$

د : حد خارج قسمت دو تابع برابر خارج قسمت حد های آنها است.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{l}{k} \qquad ; \qquad k\neq ۰$$

نتیجه :

۱ : حد حاصل ضرب یک عدد در یک تابع با حاصل ضرب آن عدد در حد تابع برابر است.

$$\lim_{x\to a} cf(x)=c\lim_{x\to a} f(x)=cl$$

۲ : حد معکوس یک تابع با معکوس حد آن عدد برابر است.

$$\lim_{x\to a}\frac{۱}{f(x)}=\frac{۱}{\lim\limits_{x\to a} f(x)}=\frac{۱}{l} \qquad ; \qquad l\neq ۰$$

۳ : اگر n یک عدد طبیعی باشد، آنگاه

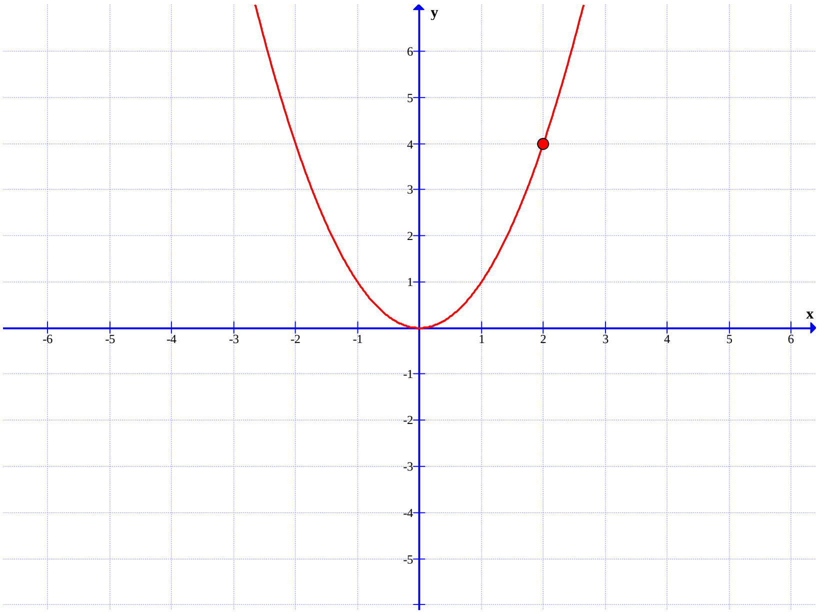
$$\lim_{x\to a} f^n(x)=(\lim_{x\to a} f(x))^n=l^n$$

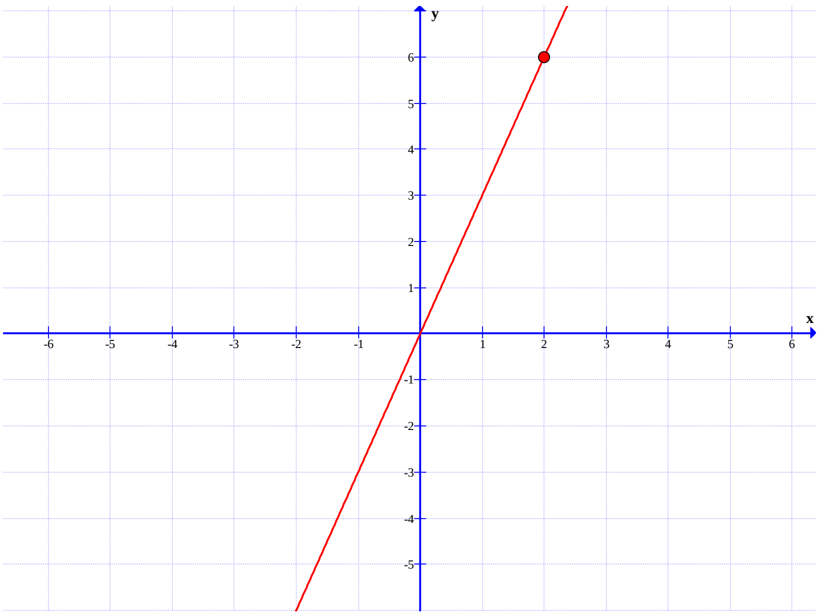
۴ : اگر n یک عدد طبیعی باشد، آنگاه

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}=\sqrt[n]{l}$$

(در صورتی که n زوج باشد باید $\lim\limits_{x\to a} f(x)\geq ۰$)

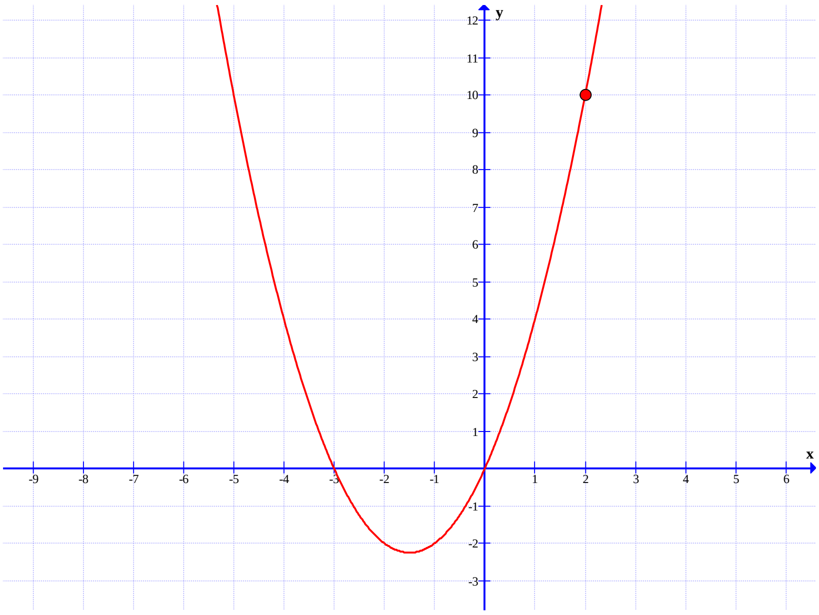
مثال : نمودار توابع $f(x)=x^{۲}$ و $g(x)=۳x$ را در نظر بگیرید.





واضح است که $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۴$ و $\lim\limits_{x\to ۲} g(x)=۶$

اکنون نمودار تابع $h(x)=x^{۲}+۳x$ را رسم می کنیم.



در این صورت با توجه به این نمودار معلوم است که :

$$\lim_{x \to ۲} h(x) = ۱۰$$

با توجه به این مطلب نتیجه می شود که :

$$\lim_{x \to ۲} h(x) = \lim_{x \to ۲} f(x) + \lim_{x \to ۲} g(x)$$

یعنی :

$$\lim_{x \to ۲} x^{۲} + ۳x = \lim_{x \to ۲} x^{۲} + \lim_{x \to ۲} ۳x$$

تمرین ۱ : فرض کنید که توابع f و g و h روی دامنه ی یکسان تعریف شده باشند و

$$\lim_{x \to a} h(x) = ۰ \quad \text{و} \quad \lim_{x \to a} g(x) = ۶ \quad \text{و} \quad \lim_{x \to a} f(x) = -۲$$

در این صورت حد های زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

۱) $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) =$

۲) $\lim_{x \to a} (f(x))^{۲} =$

۳) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} =$

۴) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[۳]{g(x)-f(x)} =$

۵) $\lim\limits_{x\to a} (\frac{۲g(x)}{۶f(x)-۳h(x)}) =$

۶) $\lim\limits_{x\to a} \frac{۱}{f(x)} =$

تمرین ۲ : حد های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۲} (۳x^{۲}+۲x-۷)$

ب) $\lim\limits_{x\to ۳} \frac{۲x-۱}{x^{۲}-۴x+۱}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۵} \sqrt{۲x-۶}$

ادامه‌ی دستور های اعمال روی توابع

۴ : اگر b یک عدد حقیقی مثبت و $P(x)$ یک چند جمله ای باشد آنگاه :

$$\lim_{x\to a} b^{P(x)} = b^{P(a)}$$

مثال :

$$\lim_{x\to -۱} ۳^{۲x+x^{۲}} = ۳^{۲(-۱)+(-۱)^{۲}} = ۳^{-۱} = \frac{۱}{۳}$$

۵ : اگر x بر حسب رادیان باشد. آنگاه :

الف) $\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a$

ب) $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$

د) $\lim\limits_{x\to a} \cot x = \cot a \quad (a \neq k\pi , k \in Z)$

ج) $\lim\limits_{x\to a} \tan x = \tan a \quad (a \neq k\pi + \frac{\pi}{۲}, k \in Z)$

مثال :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}(۲\sin x-\cos x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}(۲\sin x)+\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}(-\cos x)$$

$$=۲\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\sin x-\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\cos x=۲\sin\frac{\pi}{۲}-\cos\frac{\pi}{۲}=۲(۱)-۰=۲$$

تمرین۳ : با استفاده از قضایای حد، حد های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to۲}\frac{۱}{۲x^۳-۳x+۱}=$

ج) $\lim_{x\to-۱}۲^{۳x^۲+۱}=$

ب) $\lim_{x\to۱}(\sqrt[۵]{x^۴-۲x}+(x^۲+x)^۴)=$

د) $\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{۲\sin x+\cos x}{\cos۲x-۳x\sin۲x}=$

تمرین۴ : ثابت کنید که $\lim_{x\to a}f(x)=L$ اگر و تنها اگر $\lim_{x\to a}(f(x)-L)=۰$

اثبات :

قسمت اوّل:

$$\lim_{x\to a}f(x)=L\to\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}L=L-\lim_{x\to a}L$$

$$\xrightarrow{\lim_{x\to a}L=L}\lim_{x\to a}(f(x)-L)=L-L\to\lim_{x\to a}(f(x)-L)=۰$$

قسمت دوّم :

$$\lim_{x\to a}(f(x)-L)=۰\to\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}L=۰$$

$$\to\lim_{x\to a}f(x)-L=۰\to\lim_{x\to a}f(x)=L$$

تمرین۵ : دو تابع مثال بزنید که هیچ کدام در نقطه‌ی $x=۱$ حد نداشته باشند، ولی مجموع آن ها در ایـن نقطه دارای حد باشد.

حل : قرار می دهیم.

$$f(x)=\begin{cases}-x+۱ & x>۱\\ ۲ & x\le۱\end{cases}\quad و \quad g(x)=\begin{cases}x-۱ & x>۱\\ -۲ & x\le۱\end{cases}$$

$$\to (f+g)(x)=\begin{cases} 0 & x>1 \\ 0 & x\le 1 \end{cases} \to (f+g)(x)=0$$

در این صورت $\lim\limits_{x\to 1}(f+g)(x)=0$ در حالی که دو تابع f و g در نقطه ی $x=1$ دارای حد نیستند.

تمرین۶ : دو تابع مثال بزنید که در یک نقطه حد نداشته باشند، ولی تفاضل آن ها در این نقطه دارای حد باشد.

حل : قرار می دهیم.

$$f(x)=\begin{cases} x & x>0 \\ 2 & x\le 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad g(x)=\begin{cases} x-1 & x>0 \\ 1 & x\le 0 \end{cases}$$

$$\to (f-g)(x)=\begin{cases} 1 & x>0 \\ 1 & x\le 0 \end{cases} \to (f-g)(x)=1$$

در این صورت $\lim\limits_{x\to 0}(f-g)(x)=1$ در حالی که دو تابع f و g در نقطه‌ی $x=0$ دارای حد نیستند.

تمرین۷ : دو تابع مثال بزنید که هیچ کدام در $x=0$ حد نداشته باشند، ولی تابع $\frac{f}{g}$ در $x=0$ حد داشته باشد.

حل : قرار می دهیم.

$$f(x)=\begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases} \quad \text{و} \quad g(x)=\begin{cases} -1 & x>0 \\ 1 & x<0 \end{cases}$$

$$\to (\frac{f}{g})(x)=\begin{cases} -1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases} \to (\frac{f}{g})(x)=-1$$

در این صورت $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{f}{g})(x)=-1$ در حالی که دو تابع f و g در نقطه ی $x=0$ دارای حد نیستند.

تمرین۸ : نشان دهید توابع $f(x)=x+2$ و $g(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ در نقطه‌ی ۲ دارای حدی برابر هم هستند.

حل: برای $x\ne 2$ داریم :

$$g(x)=\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2=f(x)$$

لذا

$$\lim_{x\to ۲} g(x) = \lim_{x\to ۲} \frac{x^۲-۴}{x-۲} = \lim_{x\to ۲} \frac{(x-۲)(x+۲)}{x-۲} = \lim_{x\to ۲}(x+۲) = ۴$$

$$\lim_{x\to ۲} f(x) = \lim_{x\to ۲}(x+۲) = ۴$$

تمرین برای حل :

۸ : حد های زیر را حساب کنید.

الف) $\lim_{x\to -۱} (۳x^۲ - ۴x + ۵)$

ب) $\lim_{x\to ۲} \frac{x^۳ - ۴x + ۱}{۳x + ۲}$

پ) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} (\sin x + \cos x)$

ت) $\lim_{x\to ۱} \sqrt{۳x^۲ + x}$

ث) $\lim_{x\to ۰} (x^۲ + ۳\sin x + ۱)$

ج) $\lim_{x\to a} (۳x + x^۲ - ۵)$

۹ : اگر $\lim_{x\to ۲} f(x) = -۱$ و $\lim_{x\to ۲} g(x) = ۳$ حد های زیر را حساب کنید.

الف) $\lim_{x\to ۲} (۳f(x) - ۵g(x))$

ب) $\lim_{x\to ۲} \frac{f(x) + g(x)}{۵g(x) + ۲}$

۱۰ : اگر تابع f در نقطه‌ی $x = ۳$ حد داشته باشد و $\lim_{x\to ۳} \frac{۲f(x) - ۱}{f(x) + ۱} = ۵$ آنگاه مقدار $\lim_{x\to ۳} f(x)$ را بیابید.

۱۱ : در هر یک از حالت های زیر درباره‌ی حد تابع $f + g$ چه می توان گفت؟

الف : اگر توابع g و f در a حد نداشته باشند.

ب : اگر تابع f در a حد داشته باشد، ولی تابع g در a حد نداشته باشد.

ج : هر دو تابع g و f در a حد داشته باشند.

***

قسمت دوّم : تعمیم قوانین اعمال روی حد توابع

تمام قوانینی که دربارهٔی حد مطرح شد، برای حد های یک طرفه (حد راست و چپ) نیز قابل تعمیم است.

مثال :

$$\lim_{x\to ۳^+}(x^۲+[x]+۱)=\lim_{x\to ۳^+}x^۲+\lim_{x\to ۳^+}[x]+\lim_{x\to ۳^+}۱=۹+۳+۱=۱۳$$

توجه : اگر تابع داده شده شامل جزء صحیح باشد، برای محاسبهٔی حد در یک نقطه، ابتدا باید جزء صحیح را تعیین مقدار کرده و جایگزین کنیم و همچنین اگر تابع داده شده شامل قدر مطلق باشد، ابتدا باید درون قدرمطلق را تعیین علامت کرده و قدر مطلق را حذف کنیم و سپس حد را محاسبه می کنیم.

تمرین ۱۲ : حد توابع زیر را در نقطهٔی داده شده ، در صورت وجود بدست آورید.

۱) $\lim_{x\to ۱^+}\frac{|x-۱|}{x-۱}$ ۳) $\lim_{x\to ۲^+}[x]+۱$ ۵) $\lim_{x\to ۱^+}\sqrt{x-۱}$

۲) $\lim_{x\to ۱^-}\frac{|x-۱|}{x-۱}$ ۴) $\lim_{x\to ۲^-}[x]+۱$ ۶) $\lim_{x\to ۱^-}\sqrt{x-۱}$

تمرین۱۳: با بررسی حد های یکطرفه، حد توابع زیر را در نقطهٔی داده شده در صورت وجود بدست آورید.

۱) $\lim_{x\to ۱}(|x-۱|+۲)$ ۴) $\lim_{x\to ۳}([x]+[-x])$

۲) $\lim_{x\to ۳}\sqrt{x^۲-۶x+۹}$ ۵) $\lim_{x\to ۲}\frac{|x-۲|}{x-۲}$

۳) $\lim_{x\to ۲}\sqrt{x-۲}$ ۶) $\lim_{x\to ۲}\frac{x-۲}{[x-۲]}$

تمرین برای حل :

۱۴ : مقدار a را چنان بیابید که تابع $f(x)=a[x]+[x+۱]$ در نقطهٔی $x=۱$ حد داشته باشد.

۱۵ : مقدار حد مقابل را در صورت وجود، بدست آورید. $\lim_{x\to ۲^+}\frac{[x]}{x+[x]}$

۱۶ : مقدار حد مقابل را در صورت وجود، بدست آورید. $\lim_{x\to ۲^-}\frac{[x]-۱}{x-۲}$

***

قسمت سوّم : حدهای مبهم

گاهی در محاسبه‌ی حد توابع کسری با حالت صفر حدی بر روی صـفر حـدی[1] ($\frac{\cdot}{\cdot}$) برخـورد مـی کنـیم. در اصطلاح گفته می شود که حد مبهم است و مقدار آن روش جایگزینی مستقیم به دست نمی آید، بلکـه بایـد قبل از جایگزینی عامل صفر کننده (عامل ابهام) را از صورت و مخرج حذف کنیم. ایـن عمـل را رفـع ابهـام گویند.

برای حذف عامل ابهام لازم است با توجه به نوع تابع یکی از روش های زیر را بکار بگیریم.

الف) اگر صورت و مخرج کسری، چند جمله ای باشند، صورت و مخرج را تجزیه کنید و سپس کسر را سـاده کنید[2].

مثال : حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۲}-۴}{۳x-۶}$$

حل :

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۲}-۴}{۳x-۶}=\frac{(۲)^{۲}-۴}{۳(۲)-۶}=\frac{\cdot}{\cdot} \quad \text{مبهم}$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۲}-۴}{۳x-۶}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x+۲)}{۳(x-۲)}=\lim_{x\to ۲}\frac{x+۲}{۳}=\frac{۲+۲}{۳}=\frac{۴}{۳}$$

مثال: حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x^{۲}+۶x+۸}{x^{۲}-۴}$$

حل:

1 . عدد بسیار کوچک مثبت و نزدیک صفر و یا عدد بسیار کوچک منفی و نزدیک صفر ، را صفر حدی می نامند.

2 . در صورتی که تجزیه ی صورت یا مخرج کسر مشکل باشد، می توان از تقسیم صورت یا مخرج بر عامل صفر کننده استفاده نمود.

$$\lim_{x\to -۲} \frac{x^۲+۶x+۸}{x^۲-۴} = \frac{(-۲)^۲+۶(-۲)+۸}{(-۲)^۲-۴} = \frac{۴-۱۲+۸}{۴-۴} = \frac{۰}{۰}$$ مبهم

$$\lim_{x\to -۲} \frac{x^۲+۶x+۸}{x^۲-۴} = \lim_{x\to -۲} \frac{(x+۲)(x+۴)}{(x-۲)(x+۲)} = \lim_{x\to -۲} \frac{x+۴}{x-۲} = \frac{(-۲)+۴}{(-۲)-۲} = \frac{۲}{-۴} = \frac{۱}{-۲}$$

ب) اگر صورت یا مخرج کسری شامل رادیکال با فرجه‌ی ۲ باشند، صورت یا مخرج را گویا کنید. برای گویا کردن، معمولاً صورت یا مخرج را در مزدوج عبارت رادیکالی ضرب کنید.

مثال : حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x\to ۹} \frac{۲x-۱۸}{\sqrt{x}-۳}$$

حل :

$$\lim_{x\to ۹} \frac{۲x-۱۸}{\sqrt{x}-۳} = \frac{۲(۹)-۱۸}{\sqrt{۹}-۳} = \frac{۰}{۰}$$ مبهم

$$\lim_{x\to ۹} \frac{۲x-۱۸}{\sqrt{x}-۳} = \lim_{x\to ۹} \frac{۲x-۱۸}{\sqrt{x}-۳} \times \frac{\sqrt{x}+۳}{\sqrt{x}+۳} = \lim_{x\to ۹} \frac{۲(x-۹)}{(\sqrt{x})^۲-(۳)^۲} \times (\sqrt{x}+۳)$$

$$= \lim_{x\to ۹} \frac{۲(x-۹)}{x-۹} \times (\sqrt{x}+۳) = \lim_{x\to ۹} ۲(\sqrt{x}+۳) = ۲(\sqrt{۹}+۳) = ۱۲$$

مثال : حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x\to ۲} \frac{\sqrt{x^۲+۵}-۳}{x-۲}$$

حل:

$$\lim_{x\to ۲} \frac{\sqrt{x^۲+۵}-۳}{x-۲} = \frac{\sqrt{(۲)^۲+۵}-۳}{(۲)-۲} = \frac{\sqrt{۹}-۳}{۲-۲} = \frac{۰}{۰}$$ مبهم

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}\times\frac{\sqrt{x^2+5}+3}{\sqrt{x^2+5}+3}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x^2+5})^2-(3)^2}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5-9}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}=\frac{2+2}{\sqrt{(2)^2+5}+3}=\frac{4}{3+3}=\frac{2}{3}$$

ج) اگر صورت یا مخرج شامل عبارت مثلثاتی باشد، از روابط مثلثاتی استفاده کنید.

مثال : حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

حل :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\frac{1-\cos(0)}{0}=\frac{0}{0}$$ مبهم

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\times\frac{1}{1+\cos x}$$

در $$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\times\frac{1}{1+\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\times\frac{1}{1+\cos x}=1\times\frac{1}{1+\cos(0)}=\frac{1}{2}$$

توجه : ابتدای این فصل داشتیم :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

از این تساوی می توان نتایج زیر را نیز به دست آورد.

$$\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1 \quad \text{و} \quad \lim_{u\to 0}\frac{u}{\sin u}=1$$

$$\lim_{u\to 0}\frac{\tan u}{u}=1 \quad \text{و} \quad \lim_{u\to 0}\frac{u}{\tan u}=1$$

از این نتایج برای محاسبه‌ی حد بسیاری از توابع مثلثاتی می توان استفاده کرد.

مثال : حد های زیر را حساب کنید.

$$۱)\ \lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۵x}{۵x} \qquad ۴)\ \lim_{x\to ۰}\frac{\sin^{۳} x}{x^{۲}\tan x}$$

$$۲)\ \lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۳x}{۷x} \qquad ۵)\ \lim_{x\to ۰}\frac{\sin mx}{nx}$$

$$۳)\ \lim_{x\to ۰}\frac{\tan x}{\sin x} \qquad ۶)\ \lim_{x\to ۰}\frac{۳x+\sin x}{x}$$

حل :

$$۱)\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۵x}{۵x}=۱$$

$$۲)\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۳x}{۷x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۳x}{۳x}\times\frac{۳}{۷}=۱\times\frac{۳}{۷}=\frac{۳}{۷}$$

$$۳)\ \lim_{x\to ۰}\frac{\tan x}{\sin x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\tan x}{x}\times\frac{x}{\sin x}=۱\times۱=۱$$

$$۴)\ \lim_{x\to ۰}\frac{\sin^{۳} x}{x^{۲}\tan x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin^{۲} x}{x^{۲}}\times\frac{\sin x}{\tan x}=\lim_{x\to ۰}(\frac{\sin x}{x})^{۲}\times\frac{\sin x}{x}\times\frac{x}{\tan x}=۱$$

$$۵)\ \lim_{x\to ۰}\frac{\sin mx}{nx}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin mx}{mx}\times\frac{m}{n}=۱\times\frac{m}{n}=\frac{m}{n}$$

$$۶)\ \lim_{x\to ۰}\frac{۳x+\sin x}{x}=\lim_{x\to ۰}(\frac{۳x}{x}+\frac{\sin x}{x})=۳+۱=۴$$

نتیجه : $\lim_{x\to ۰}\frac{\sin mx}{nx}=\frac{m}{n}$

مثال : حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۳x+\sin ۴x}{۳x}$$

حل :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۳x+\sin ۴x}{۳x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۳x}{۳x}+\frac{\sin ۴x}{۳x}=۱+\frac{۴}{۳}=\frac{۷}{۳}$$

توجه : گاهی لازم می شود قبل از اقدام به رفع ابهام، متغیر را تغییر دهیم و متغیر جدیدی را تعریـف کنـیم.

توجه داشته باشید که متغیر جدید ممکن است به عددی دیگری میل کند و باید در محاسبه اعمال شود.

مثال : حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-3\sqrt{x}+1}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-3\sqrt{x}+1}{x-1}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\sqrt{x}=t}\lim_{x\to 1}\frac{2x-3\sqrt{x}+1}{x-1}=\lim_{t\to 1}\frac{2t^2-3t+1}{t^2-1}$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(2t-1)}{(t-1)(t+1)}=\lim_{t\to 1}\frac{2t-1}{t+1}=\frac{1}{2}$$

مثال : حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sin(x+2)}{3x+6}$$

حل : کافی است قرار دهیم $x+2=t$

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sin(x+2)}{3x+6}=\lim_{x+2\to 0}\frac{\sin(x+2)}{3(x+2)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{3t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\times\frac{1}{3}=1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

تمرین برای حل :

۱۷ : حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}$

ب) $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x^2+5x+6}$

ج) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2-\sqrt{x+3}}$

د) $\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x+2\tan x}{5x}$

۱۸ : حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+7x+12}{x^3+4x^2+4x+3}$$

۱۹ : حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x^2-9}$

ت) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x}$

ث) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{\sqrt{x+۲}-x}{۳-\sqrt{x+۷}}$

ب) $\lim\limits_{x\to -۲}\dfrac{x^{۳}+۸}{x+۲}$

ح) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sin x}{\sqrt{۱+\tan x}-\sqrt{۱-\tan x}}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^{۳}}$

۲۰ : مقدار a را طوری بیابید که $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^{۲}-a^{۲}}{x-a}=۸$ باشد.

۲۱ : حدهای زیر را حساب کنید.

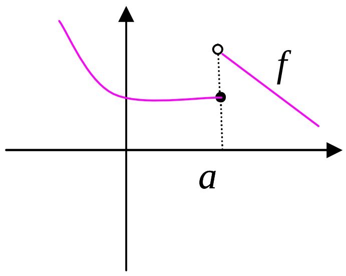
ب) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{۲\sin\frac{x}{۲}-۳\tan\frac{۱}{۳}x}{x}$

الف) $\lim\limits_{x\to -۱}\dfrac{\tan(x+۱)\times\sin^{۲}(x+۱)}{۵(x+۱)^{۳}}$

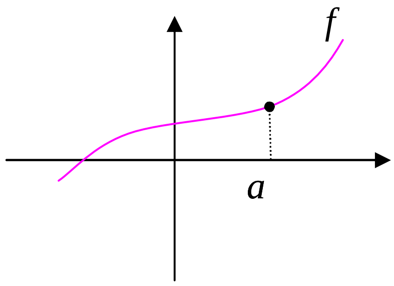
❋❋❋

درس سوّم : پیوستگی توابع

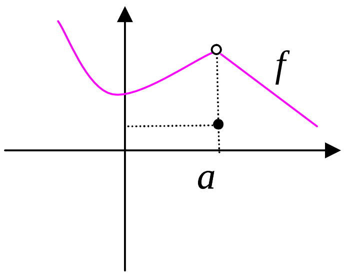
بررسی پیوستگی یک تابع در یک نقطه می تواند در شناخت رفتار یک تابع کمک نماید. از نظر هندسی تابعی را در یک نقطه، پیوسته گویند، هرگاه نمودار آن تابع در این نقطه بریدگی یا پرش نداشته باشد. به نمودار های زیر توجه کنید.



تابع در نقطه‌ی $x=a$ پیوسته نیست.



تابع در نقطه‌ی $x=a$ پیوسته است.



تابع در نقطه‌ی $x=a$ پیوسته نیست.

❋❋❋

قسمت اوّل : تعریف ریاضی پیوستگی تابع در یک نقطه

تابع $y=f(x)$ را در نقطه‌ی $x=a$ پیوسته گویند، هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد.

الف) تابع در نقطه‌ی $x=a$ تعریف شده باشد. یعنی $f(a)$ وجود داشته باشد.

ب) تابع در نقطه‌ی $x=a$ حد داشته باشد. یعنی $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$

ج) حد تابع در این نقطه با مقدار آن برابر باشد. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

به عبارتی دیگر تابع $y=f(x)$ در نقطه‌ی $x=a$ پیوسته است، هرگاه

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)$$

اگر یکی از شرط های فوق برقرار نباشد، گویند تابع در $x=a$ پیوسته نیست.

مثال: پیوستگی تابع زیر را در نقطه‌ی $x=۱$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^۲+۳} & x>۱\\ ۵ & x=۱\\ ۲x-۵ & x<۱\end{cases}$$

حل : کافی است، شرایط پیوستگی را بررسی کنیم.

حد راست $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}\sqrt{x^۲+۳}=\sqrt{(۱)^۲+۳}=۲$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}(۲x-۵)=۲(۱)-۵=-۳$

مقدار $f(۱)=۵$

لذا تابع در نقطه‌ی $x=۱$ پیوسته نیست.

مثال: پیوستگی تابع زیر را در نقطه‌ی $x=۲$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases}x^۲+۱ & x\le ۲\\ ۳x-۱ & x>۲\end{cases}$$

حل : کافی است، شرایط پیوستگی را بررسی کنیم.

حد راست $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+}(۳x-۱)=۳(۲)-۱=۵$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-}(x^۲+۱)=(۲)^۲+۱=۵$

مقدار $f(۲)=(۲)^۲+۱=۵$

لذا تابع در نقطه‌ی $x=۲$ پیوسته است.

مثال: تابع زیر در نقطه‌ی $x=۱$ پیوسته است. مقدار a را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases}۲ax^۲+۵ & x\ge ۱\\ ۶x-۳ & x<۱\end{cases}$$

حل :

حد راست $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (2ax^2 + 5x) = 2a(1)^2 + 5(1) = 2a + 5$

حد چپ $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (6x - 3) = 6(1) - 3 = 3$

مقدار $f(1) = 2a(1)^2 + 5(1) = 2a + 5$

و چون تابع در نقطه‌ی $x = 1$ پیوسته است، پس :

$$2a + 5 = 3 \to 2a = 3 - 5 \to 2a = -2 \to a = -1$$

تمرین برای حل :

۱ : پیوستگی تابع زیر را در نقطه‌ی $x = 2$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & x < 2 \\ x + 5 & x = 2 \\ 9 - x & x > 2 \end{cases}$$

۲ : پیوستگی تابع زیر را در نقطه‌ی $x = 5$ بررسی کنید.

$$f(x) = 1 + 2[x]$$

۳ : پیوستگی تابع علامت را در نقطه‌ی $x = 0$ بررسی کنید.

۴ : نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه‌ی $x = 1$ پیوسته باشد ولی در نقطه‌ی $x = -1$ پیوسته نباشد.

۵ : مقادیر a و b را طوری پیدا کنید که تابع زیر در نقطه‌ی $x = -2$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} 2ax + b & x < -2 \\ 5 & x = -2 \\ 2bx - 3 & x > -2 \end{cases}$$

***

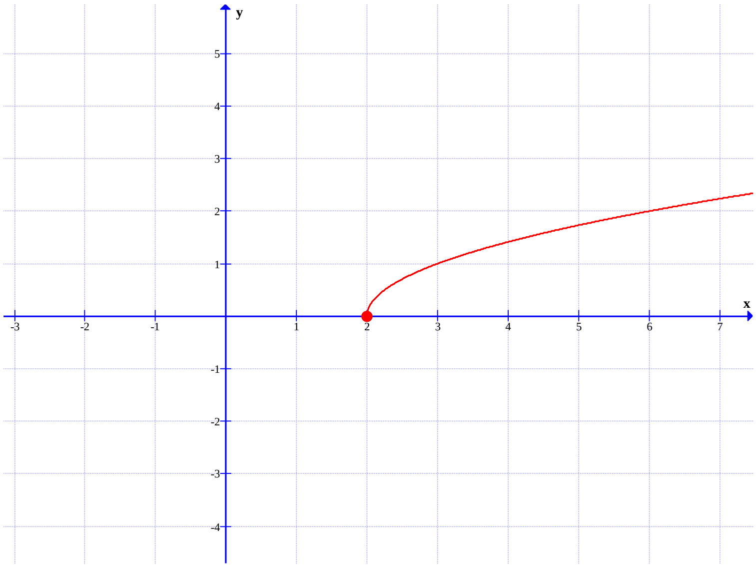
قسمت دوّم : پیوستگی های یک طرفه

گویند تابع f در نقطه‌ی $x=a$ پیوستگی راست دارد، هرگاه $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$

همچنین گویند تابع f در نقطه‌ی $x=a$ پیوستگی راست دارد، هرگاه $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$

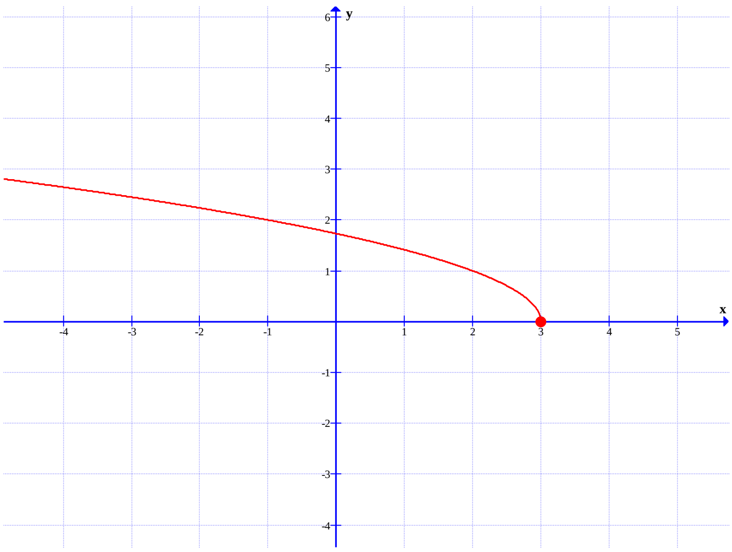
مثال : تابع $f(x)=\sqrt{x-۲}$ در نقطه‌ی $x=۲$ پیوستگی راست دارد. زیرا :

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=f(۲)=۰$$



مثال : تابع $f(x)=\sqrt{۳-x}$ در نقطه‌ی $x=۳$ پیوستگی چپ دارد. زیرا:

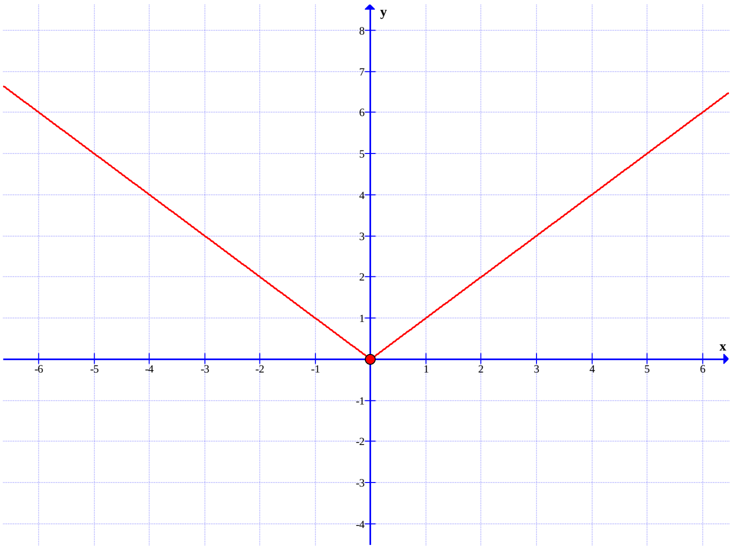
$$\lim_{x\to ۳^-} f(x)=f(۳)=۰$$



مثال : تابع $f(x)=|x|$ در نقطه‌ی $x=۰$ هم پیوستگی راست و هم پیوستگی چپ دارد.

زیرا :

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=f(۰)=۰ \quad \text{و} \quad \lim_{x\to ۰^+} f(x)=f(۰)=۰$$

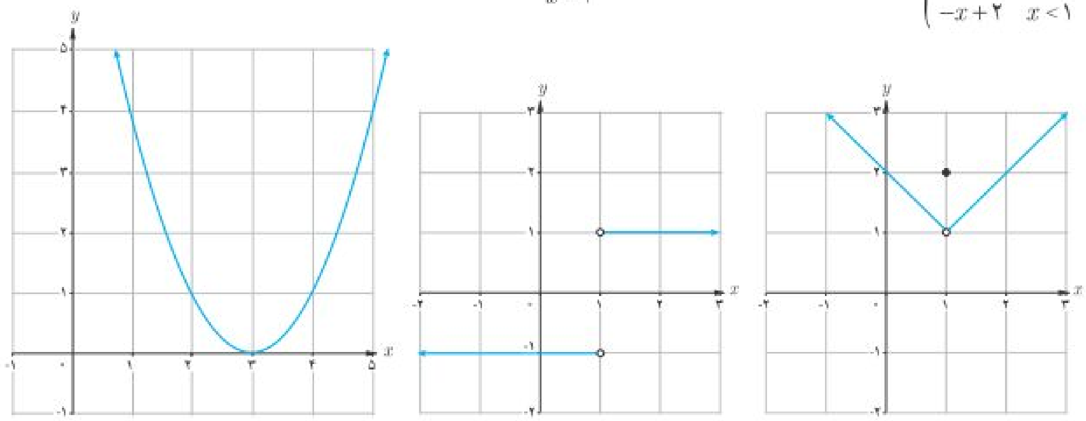


تمرین ۶ : پیوستگی هر یک از توابع زیر را در نقطه‌ی $x=۱$ بررسی کنید.

الف) $f(x)=(x-۳)^۲$

ب) $g(x)=\dfrac{|x-۱|}{x-۱}$

پ) $h(x)=\begin{cases} x & x>۱ \\ ۲ & x=۱ \\ -x+۲ & x<۱ \end{cases}$

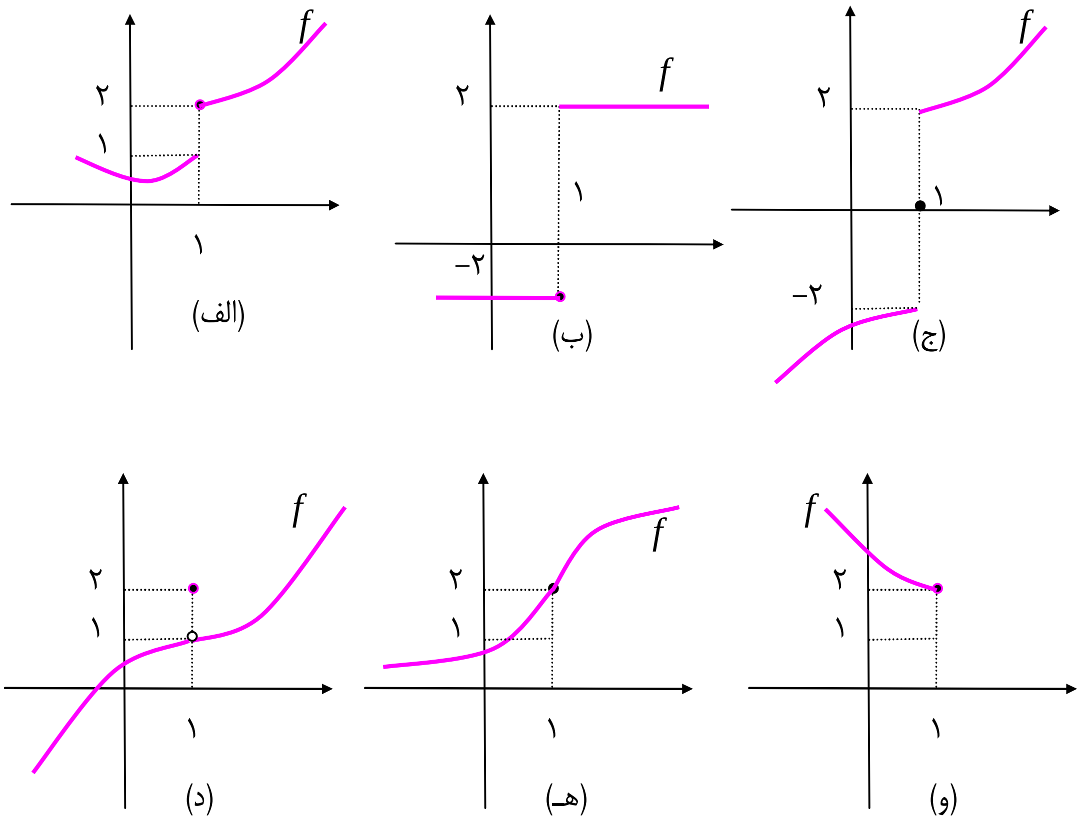


تمرین ۷ : پیوستگی تابع زیر را در نقطه‌ی $x=۱$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} -x+۳ & x<۱ \\ ۲x & x\geq ۱ \end{cases}$$

تمرین برای حل :

۸ : در هر مورد پیوستگی تابع داده شده را در نقطه‌ی $x = ۱$ بررسی کنید.



۹ : مقدار k را طوری بیابید که تابع زیر در نقطه‌ی $x = ۴$ پیوستگی راست داشته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} x - k & x > ۴ \\ ۵ + ۳x^{۲} & x = ۴ \\ -x + ۱ & x < ۴ \end{cases}$$

۱۰ : پیوستگی تابع $x = ۱$ را بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -۲x + ۵ & x \leq ۱ \\ x^{۲} + ۲ & x > ۱ \end{cases}$$

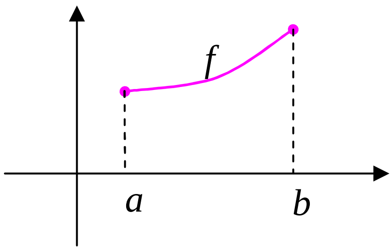
۱۱ : تابعی مثال بزنید که حد آن در نقطه‌ی $x = ۱$ برابر -۱ باشد، ولی در این نقطه پیوسته نباشد. نمودار این تابع را رسم کنید.

***

قسمت سوّم : پیوستگی در یک فاصله

پیوستگی در یک فاصله را به یکی از حالت های زیرتعریف می کنیم.

تعریف۱: تابع $y=f(x)$ را در فاصله ای مانند $[a,b]$ پیوسته گویند، هرگاه



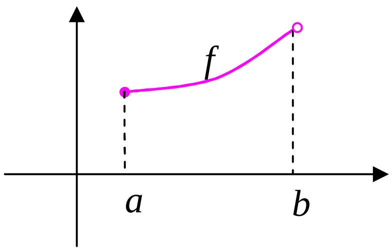
الف) در تمام نقاط فاصله‌ی (a,b) پیوسته باشد.

ب) در نقطه‌ی $x=a$ پیوستگی راست داشته باشد.

ج) در نقطه‌ی $x=b$ پیوستگی چپ داشته باشد.

***

تعریف۲: تابع $y=f(x)$ را در فاصله ای مانند $[a,b)$ پیوسته گویند، هرگاه

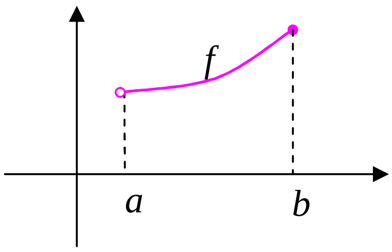


الف) در تمام نقاط فاصله‌ی (a,b) پیوسته باشد.

ب) در نقطه‌ی $x=a$ پیوستگی راست داشته باشد.

***

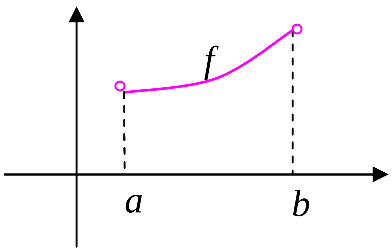
تعریف۳: تابع $y=f(x)$ را در فاصله ای مانند $(a,b]$ پیوسته گویند، هرگاه



الف) در تمام نقاط فاصله‌ی (a,b) پیوسته باشد.

ب) در نقطه‌ی $x=b$ پیوستگی چپ داشته باشد.

***



تعریف۴ : تابع $y=f(x)$ را در فاصله ای مانند (a,b) پیوسته گویند، هرگاه در تمام نقاط این فاصله پیوسته باشد.

***

مثال : پیوستگی تابع $f(x)=[x]$ را در فاصله‌ی $[۱,۲)$ بررسی کنید.

حل: ابتدا ثابت می کنیم که تابع درنقطه‌ی $x=۱$ پیوستگی راست دارد.

$f(۱)=[۱]=۱$ مقدار

$\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=[۱^+]=۱$ حد راست

تابع در $x=۱$ پیوستگی راست دارد.

حال نشان می دهیم که تابع در تمام نقاط فاصله‌ی $(۱,۲)$ پیوسته است. گیریم که $a\in(۱,۲)$ پس $[a]=۱$

$f(a)=[a]=۱$ مقدار تابع

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=[a^+]=۱$ حد راست

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=[a^-]=۱$ حد چپ

تابع در تمام نقاط فاصله‌ی $(۱,۲)$ پیوسته است.

***

مثال : پیوستگی تابع $f(x)=۲x+\sqrt{۲-x}$ را در فاصله‌ی $(۱,۲]$ بررسی کنید.

حل: ابتدا ثابت می کنیم که تابع درنقطه‌ی $x=۲$ پیوستگی چپ دارد.

$f(۲)=۲(۲)+\sqrt{۲-۲}=۴$ مقدار

$\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=۲(۲)+\sqrt{۲-۲}=۴$ حد راست

تابع در $x=۲$ پیوستگی چپ دارد.

حال نشان می دهیم که تابع در تمام نقاط فاصله‌ی $(۱,۲)$ پیوسته است.گیریم که $a\in(۱,۲)$

$f(a)=۲a+\sqrt{۲-a}=۲a+۱$ مقدار تابع

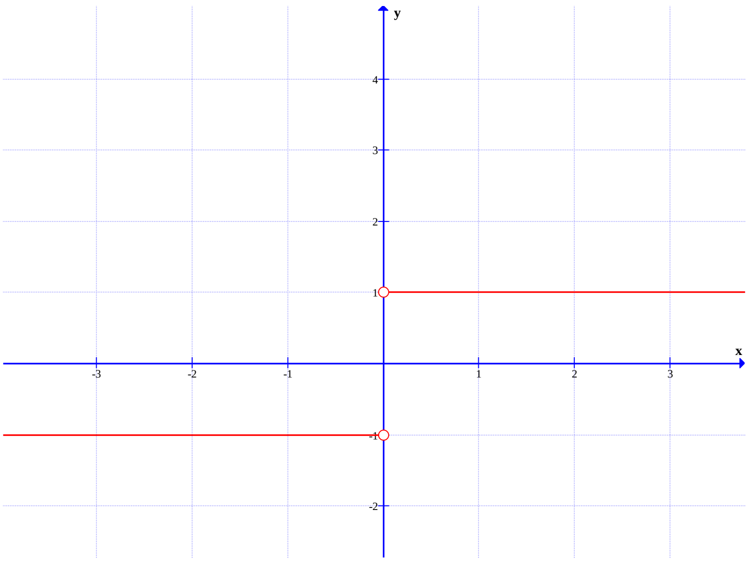
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=۲a+\sqrt{۲-a}$ حد راست

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=۲a+\sqrt{۲-a}$ حد چپ

تابع در تمام نقاط فاصله‌ی $(۱,۲)$ پیوسته است.

مثال : دو بازه‌ی بسته مثال بزنید که تابع $f(x)=\frac{|x|}{x}$ در یکی از آنها پیوسته و در دیگری ناپیوسته باشد.

حل : تابع f در بازه‌ی $[۱,۲]$ پیوسته است ولی در بازه‌ی $[-۱,۱]$ ناپیوسته است.



تمرین ۱۲ : تابع زیر را در نظر بگیرید. سپس درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases} ۲x+۴ & x<-۱ \\ x^{۲}-۱ & -۱\leq x<۲ \\ -x+۵ & ۲<x<۵ \end{cases}$$

الف) $\lim_{x\to ۵^{+}} f(x)=۰$ ب) $\lim_{x\to ۵^{-}} f(x)=۰$ پ) $\lim_{x\to ۵} f(x)=۰$

ت) تابع f روی بازه‌ی $(-\infty,-۱]$ پیوسته است. ث) تابع f روی بازه‌ی $(-\infty,-۱)$ پیوسته است.

ج) تابع f روی بازه‌ی $[۲,۵]$ پیوسته است. ح) تابع f روی بازه‌ی $(-۲,۰)$ پیوسته است.

***

توجه : فاصله ای که یک تابع در تمام نقاط آن پیوسته باشد را فاصله‌ی پیوستگی می نامند. برای تعیین فاصله‌ی پیوستگی یک تابع ابتدا دامنه‌ی تابع را تعیین می کنیم و سپس پیوستگی تابع را در تمام نقاط مرزی و یا شکستگی بررسی کرده و در صورت ناپیوسته بودن در آن نقاط آنها را از دامنه حذف می کنیم.

منظور از نقاط مرزی نقاط ابتدا و انتهای دامنه (به شرط اینکه بصورت بسته باشند.) و منظور از نقاط شکستگی نقاطی که در آنها ضابطه‌ی تابع عوض می شود.

مثال : ابتدا دامنه‌ی تابع زیر را بدست آورده و سپس فاصله‌ی پیوستگی آن را تعیین کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x+۲ & x\geq ۱ \\ x-۱ & x<۱ \end{cases}$$

حل: واضح است که $D_f=\{x \mid x\geq ۱\}\bigcup\{x \mid x<۱\}=R$

حال پیوستگی تابع را در نقطه‌ی $x=۱$ بررسی می کنیم.

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=۱+۲=۳$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=۱-۱=۰$$

$$f(۱)=۱+۲=۳$$

لذا تابع در این نقطه پیوسته نمی باشد و در نتیجه فاصله‌ی پیوستگی آن به صورت زیر است.

$$R-\{۱\}=(-\infty,۱)\bigcup(۱,+\infty)$$

مثال : فاصله‌ی پیوستگی تابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x+۲ & x\geq ۱ \\ \frac{۱}{x}-۳ & x<۱ \end{cases}$$

حل: واضح است که $D_f=R-\{۰\}$

حال پیوستگی تابع را در نقطه‌ی $x=۱$ بررسی می کنیم.

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=۱+۲=۳$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=۱-۳=-۲$$

$$f(۱)=۱+۲=۳$$

لذا تابع در این نقطه پیوسته نمی باشد و در نتیجه فاصله‌ی پیوستگی آن به صورت زیر است.

$$R-\{۱,۰\}=(-\infty,۰)\bigcup(۰,۱)\bigcup(۱,+\infty)$$

تمرین ۱۲: فاصله‌ی پیوستگی تابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x+۲ & x\geq ۱ \\ ۴x-۱ & x<۱ \end{cases}$$

تمرین برای حل :

۱۳: ثابت کنید که تابع زیر در مجموعه‌ی اعداد حقیقی پیوسته است.

$$f(x)=\begin{cases}|x-۱| & x<۱\\ x-[x] & ۱\le x<۲\\ -x+۳ & x\ge ۲\end{cases}$$

۱۴: مقدار b و a را طوری بیابید که تابع زیر در مجموعه‌ی اعداد حقیقی پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{۱-x} & x<۱\\ ax+b & ۱\le x<۳\\ x^{۲} & x\ge ۳\end{cases}$$

***

قسمت چهارم : توابع پیوسته

تابع f را تابع پیوسته گویند، هرگاه در تمام نقاط دامنه‌ی خود پیوسته[1] باشد. در این صورت

الف : هر تابع چند جمله ای در تمام نقاط پیوسته است.

ب : تابع ثابت و تابع همانی در تمام نقاط پیوسته هستند.

ج : تابع کسری وقتی همواره پیوسته است، هرگاه مخرج آن ریشه نداشته باشد.

د : هر تابع رادیکالی با فرجه ی زوج (تابع اصم) به ازاء همه ی مقادیر حقیقی که زیر رادیکال را نامنفی کنند، پیوسته است.

و : توابع مثلثاتی $f(x)=\sin x$ و $f(x)=\cos x$ تمام نقاط پیوسته است.

مثال : نقاطی را تعیین کنید که تابع زیر در آن نقاط پیوسته نباشد.

$$f(x)=\frac{۳x-۵}{x^{۲}-۴x}$$

حل : کافی است ریشه های مخرج تابع را تعیین کنیم.

$$x^{۲}-۴x=۰\rightarrow x(x-۴)=۰\rightarrow x=۰\ ,\ x=۴$$

[1] . به عبارتی دیگر نمودار تابع در تمام نقاط پرش یا بریدگی نداشته باشد.

تمرین برای حل :

۱۵: نقاطی را تعیین کنید که تابع زیر در آن نقاط پیوسته نباشد.

الف) $f(x)=\frac{3x-1}{x^2-4}$ ب) $f(x)=\frac{5}{x^3-4x}$

۱۶ : ثابت کنید که تابع $f(x)=\frac{x+2}{x^2+5}$ همواره پیوسته است.

۱۷ : فاصله‌ی پیوستگی تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{3-x}}$$

۱۸ : نقاط ناپیوستگی تابع زیر را در فاصله‌ی $[1,6]$ تعیین کنید.

$$f(x)=[x]+\sqrt{x-2}$$

۱۹ : نقاط ناپیوستگی تابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{x^2+3x}$$

***