# اگرچه نیت خوبی است زیستن ...
# اما خوشا که دست به تصمیم بهتری بزنیم !

# جزوه آموزشی

# آمار و احتمال

# یازدهم ریاضی

# فصل دوم :احتمال

درس اول : مبانی احتمال

درس دوم : احتمال غیر هم شانس

درس سوم : احتمال شرطی

درس چهارم : پیشامد های مستقل و وابسته

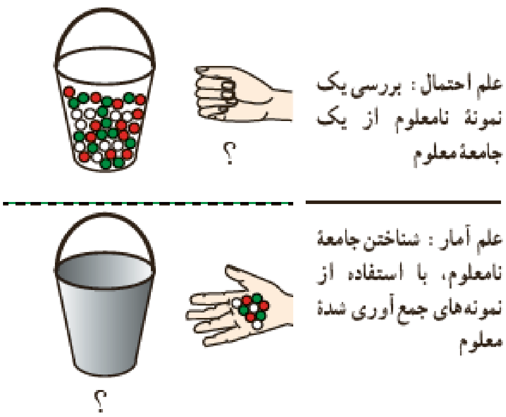
## درس اول : مبانی احتمال

### آمار و احتمال به چه کاری می‌آیند ؟

فرض کنید کارشناسان یک کارخانه تولید لوازم خانگی می خواهند بررسی کنند که برای سال آینده بهتر است سرمایه کارخانه به چه نسبتی صرف تولید یخچال و لباس شویی و .... شود . در ضمن آنها از آنچه در آینده رخ خواهد داد اطمینان ندارند . در چنین موقعیتی علم آمار و احتمال به کمک ما می آید .

علم آمار با توجه به داده های قبلی از وضعیت تقاضا می تواند میزان تقاضای سال آینده برای هر کالا را مشخص کند و علم احتمال نیز کمک خواهد کرد تا بهترین تصمیم ممکن گرفته شود .

در واقع در علم آمار می خواهیم با جمع آوری نمونه های معلوم ، جامعه نا معلوم را بشناسیم ولی در علم احتمال می خواهیم به کمک جامعه معلوم یک نمونه نامعلوم ( تصادفی ) را بررسی کنیم .




تمرین : تشخیص دهید در هر مورد با چه علمی سر و کار داریم ؟

| صورت مسئله | آمار | احتمال |
|---|---|---|
| ۱ــ می‌دانیم ۹۰ تا از ۱۰۰ سیب یک جعبه سالم است. چند تا سیب از جعبه برداریم، تا تقریباً مطمئن باشیم که دست‌کم یک سیب خراب برداشته‌ایم؟ | ☐ | ☐ |
| ۲ــ درآمد کارمندان شهرداری چقدر است؟ | ☐ | ☐ |
| ۳ــ ۹۰ نفر از ۱۰۵ دانش‌آموز پایه یازدهم به ورزش شنا علاقه دارند. اگر ۲۰ نفر از این دانش‌آموزان را به تصادف انتخاب کنیم، چقدر ممکن است کمتر از ۱۵ نفر از آنها به شنا علاقه‌مند باشند؟ | ☐ | ☐ |
| ۴ــ در انتخابات هفتم اسفند ۱۳۹۴، شهرستان سواد کوه شمالی با مشارکت بیش از ۹۸/۲ درصد رکوردار بوده است. اگر از ۱۰ نفر واجد شرایط بپرسیم که آیا در انتخابات شرکت کرده‌اند یا خیر، چقدر ممکن است پاسخ بیش از یک نفر منفی باشد؟ | ☐ | ☐ |
| ۵ــ چه تعداد از دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم مدرسه شما به ورزش شنا علاقه دارند؟ | ☐ | ☐ |

**فضای نمونه ای :** مجموعه تمام حالت هایی که در یک پدیده تصادفی می تواند رخ دهد . هر عضو فضای نمونه ای را بر آمد می گویند .

**پیشامد :** هر زیر مجموعه از فضای نمونه را پیشامد می نامند .

مثال : درون یک جعبه ۵ لامپ قرار دارد که ۳ تای آن سالم است و دو تای دیگر معیوب است . با شماره گذاری لامپ های سالم با اعداد ۱و۲و۳ و لامپ های معیوب با اعداد ۴و۵ داریم :

الف ) فضای نمونه ای : $S=\{1,2,3,4,5\}$

ب) پیشامد آنکه لامپ سالم از جعبه خارج شود : $A=\{1,2,3\}$

**نکته :** در صورتی که آزمایشی متشکل از دو آزمایش با فضای نمونه ای $S_1,S_2$ باشد ، فضای نمونه آن $S_1\times S_2$ است . مشابه این موضوع در مورد هر تعداد آزمایش همزمان نیز درست است .

مثال : یک راننده تاکسی خطی در ایستگاه منتظر می ایستد تا حداکثر ۴ مسافر سوار کند و حتی با کمتر از آن نیز مجبور به حرکت می شود . در مسیر برگشت نیز همین اتفاق می افتد . فضای نمونه ای این پدیده در صورتی که تعداد مسافرین رفت و برگشت برای ما مهم باشد برابر است با : $S=\{0,1,2,3,4\}\times\{0,1,2,3,4\}\Rightarrow n(S)=25$

در این فضای نمونه ای منظور از بر آمد $(1,2)$ این است که تاکسی با ۱ مسافر حرکت کرده و در برگشت ۲ مسافر زده باشد .

**اصول احتمال :**

برای هر پیشامد مثل A احتمال رخ دادن آن را به صورت $P(A)$ نمایش می دهیم که عددی حقیقی در بازه $[0,1]$ است.

اصول احتمال عبارت اند از :

الف) $P(S)=1$

ب) برای دو پیشامد ناسازگار ( $A\cap B=\varnothing$ ) داریم : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

قضیه : در مورد هر فضای نمونه ای گزاره های زیر درست است .

الف) $P(A')=1-P(A)$

اثبات :

$$A\cup A'=S\Rightarrow \underbrace{P(S)}_{1}=P(A)+P(A')\Rightarrow P(A')=1-P(A)$$

ب) $P(\varnothing)=0$

اثبات : با توجه با اینکه تهی متمم S است داریم :

$$P(\varnothing)=1-P(S)=1-1=0$$

ج) اگر A و B و C دو به دو ناسازگار باشند ، آنگاه $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$

( این حکم برای هر تعداد پیشامد قابل تعمیم است )

اثبات : در این صورت $A\,,B\cup C$ نیز ناسازگارند پس داریم :

$$P(A\cup B\cup C)=P(A\cup(B\cup C))=P(A)+P(B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$$

د) برای هر دو پیشامد دلخواه A و B داریم : $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

اثبات : واضح است که $A=(A-B)\cup(A\cap B)$ و $A-B\,,A\cap B$ ناسازگارند ، پس

$$P(A)=P(A-B)+P(A\cap B)\Rightarrow P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$

ه) اگر $B\subseteq A$ آنگاه $P(B)\le P(A)$

اثبات : اگر $B\subseteq A$ آنگاه داریم

$$P(A-B)=P(A)-P(B)\xrightarrow{P(A-B)\ge 0}P(A)-P(B)\ge 0\Rightarrow P(A)\ge P(B)$$

و) برای هر دو پیشامد دلخواه A و B داریم : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

اثبات : واضح است که $A\cup B=(A-B)\cup B$ و $B\,,A-B$ ناسازگارند ، پس

$$P(A\cup B)=P(A-B)+P(B)\xrightarrow{P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)}P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

تمرین : عددی به تصادف از بین اعداد ۵۰ تا ۲۰۰ انتخاب می کنیم .احتمال های زیر را محاسبه کنید .

الف) عدد انتخابی بر ۲ یا ۵ بخش پذیر باشد .

ب) عدد انتخابی بر ۲ بخش پذیر باشد ولی بر ۵ نه .

ج) عدد انتخابی نه بر ۲ بخش پذیر باشد نه بر ۵.

تکلیف : تمرین های صفحه به جز تمرین ۴ را حل کنید .

## درس دوم : احتمال غیر هم شانس

همیشه اینطور نیست که احتمال رخ دادن هر بر آمد فضای نمونه ای برابر باشد . مثلاً تاسی را تصور کنید که روی سه وجه آن ۳ و دو وجه آن ۲ و یک وجه آن ۱ درج شده باشد . فضای نمونه پرتاب تاس برابر $S=\{۱,۲,۳\}$ خواهد بود .( هر بر آمد از فضای نمونه ای را پیشامد ساده می گویند )

الف) احتمال رخ دادن هر سه پیشامد ساده را حساب کنید ؟

$P(۱)=$

$P(۲)=$

$P(۳)=$

ب) آیا پیشامد های ساده هم شانس هستند ؟

ج) حاصل جمع احتمال پیشامد های ساده چقدر است ؟

اصول احتمال غیر هم شانس :

اگر $A=\{a_۱,a_۲,...,a_k\}$ یک پیشامد از فضای نمونه ای S با احتمال غیر هم شانس باشد .

الف) $۰\leq P(A)\leq ۱$

ب) $P(S)=۱$

ج) $P(A)=P(a_۱)+P(a_۲)+....+p(a_k)$

نکته : از دو اصل آخر می توان نتیجه گرفت که $P(S)=P(s_۱)+P(s_۲)+...+P(s_n)=۱$

تمرین : در یک مسابقه چهار جانبه فوتبال ، احتمال برد تیم a دو برابر احتمال برد تیم b ، و احتمال برد تیم b ۳ برابر احتمال برد تیم c است و تیم d نیز با تیم b هم شانس است . احتمال برد هر تیم را مشخص کنید .

تمرین : در یک آزمایش تصادفی $S=\{x,y,z\}$ فضای نمونه ای است . اگر $P(\{x,y\})=\frac{۲}{۳}$ و $P(\{x,z\})=\frac{۱}{۲}$ ، احتمال وقوع هر پیشامد ساده را بیابید .

تمرین : یک تاس به گونه ای است که احتمال وقوع عدد فرد ۳ برابر احتمال وقوع عدد زوج است . احتمال مشاهده ۳ یا ۴ را بیابید .

تکلیف : تمرین های صفحه ۵۱ را حل کنید .

## درس سوم : احتمال شرطی

فرض کنید دو تاس را پرتاب کرده ایم و از ما پرسیده می شود احتمال آنکه مجموع دو عدد ظاهر شده ۹ باشد چقدر است ؟ با توجه به فضای نمونه ای که ۳۶ عضو دارد و با توجه به پیشامد خواسته شده $A=\{(۳,۶),(۴,۵),(۵,۴),(۶,۳)\}$ که ۴ عضو دارد احتمال آن $\frac{۴}{۳۶}$ یا $\frac{۱}{۹}$ خواهد بود .

حال فرض کنید شرط « اگر تاس اول ۴ باشد » به مساله اضافه شود، در این صورت فضای نمونه ای به مجموعه $S=\{(۴,۱),(۴,۲),...,(۴,۶)\}$ کاهش می یابد و پیشامد نیز فقط شامل عضو $(۴,۵)$ خواهد بود . به این ترتیب احتمال برابر $\frac{۱}{۶}$ خواهد شد .

### محاسبه احتمال شرطی

همانطور که دیدیم در احتمال شرطی A به شرط رخ دادن B ، فضای نمونه ای به مجموعه B کاهش می یابد و بدهی است مجموعه A نیز نمی تواند تمام حالت های قبل را اختیار کند و فقط مقادیر مشترک با B قابل قبول خواهد بود پس

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}\xrightarrow[\div n(S)]{\div n(S)}P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

مثال هایی برای تشخیص بهتر احتمال شرطی و غیر شرطی .

الف) ۳۰ درصد از مردان سیگاری هستند .

در جامعه کاهش یافته مردان ( M ) ، ۳۰ درصد افراد سیگاری ( C ) هستند .   $P(C|M)=۰/۳$

ب)۳۰ درصد از افراد جامعه ، مردان سیگاری هستند .

در کل جامعه ( نه کاهش یافته ) ، ۳۰ درصد هم مرد و هم سیگاری هستند .   $P(M\cap C)=۰/۳$

ج) ۱۰ درصد از سیگاری ها به بیماری کبد مبتلا هستند .

در جامعه کاهش یافته سیگاری ها ، ۱۰ درصد به بیماری کبد ( K ) مبتلا هستند .   $P(K|C)=۰/۱$

د) ۶۰ درصد قبولی های یک دانشگاه پسر هستند . ( این مورد را شما پاسخ بدهید )

تمرین : در یک قرعه کشی بین ۲۰ نفر قرار است از بین کارت های ۱ تا ۲۰ یکی را به تصادف انتخاب کنند . شماره کارت مرتضی ۱۱ است . اگر مجری اعلام کند برگ برنده فرد و دو رقمی است، احتمال برنده شدن مرتضی چقدر خواهد بود ؟

تمرین : در مدرسه ای سه کلاس یازدهم ۱-۱۱ و ۲-۱۱ و ۳-۱۱ وجود دارد که به ترتیب ۳۵،۳۳،۳۲ دانش آموز دارند . در آزمونی مشترک به ترتیب ۶،۹،۸ نفر موفق به کسب نمره کامل شده اند . یکی از دانش آموزان را به تصادف انتخاب می کنیم .

الف) احتمال اینکه دانش آموز انتخاب شده نمره کامل گرفته باشد ( پیشامد A ) چقدر است ؟ $\frac{۲۳}{۱۰۰}$

ب) احتمال اینکه او ، دانش آموز کلاس ۱-۱۱ باشد ( پیشامد B ) چقدر است ؟ $\frac{۳۲}{۱۰۰}$

ج) اگر بعد از انتخاب بفهمید او دانش آموز کلاس ۱-۱۱ است، چقدر احتمال دارد نمره کامل گرفته باشد ؟

تمرین : دو تاس سبز و قرمز را پرتاب می کنیم .

الف) اگر بدانیم مجموع دو تاس ۷ شده است، احتمال اینکه تاس سبز ۶ باشد چقدر است ؟

ب) اگر بدانیم که تاس سبز ۶ است، احتمال آنکه مجموع دو تاس ۷ باشد چقدر است ؟

تمرین : از بین ۱۱ بازیکن یک تیم فوتبال که سرعت دو هیچ دو نفری یکسان نیست ، یکی را به تصادف انتخاب می کنیم.

الف) احتمال اینکه آن بازیکن سریع ترین فرد تیم باشد چقدر است ؟

ب) اگر نفر دیگری را نیز انتخاب کنیم و مشاهده کنیم نفر اول از او سریعتر است، در این صورت احتمال اینکه نفر اول سریع ترین فرد تیم باشد چقدر است ؟

حل : A : بازیکن اول سریع ترین بازیکن تیم باشد .

B : بازیکن اول از بازیکن دوم سریع تر باشد .

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{\frac{۱}{۱۱}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۲}{۱۱}$$

نکته : از آنجایی که احتمال شرطی همان احتمال معمولی با فضای نمونه ای کاهش یافته است بنابر این تمام قوانین احتمال و گزاره های آن ( جابجایی، پخشی ، دمورگان و ... )در احتمال شرطی نیز برقرار است .

۱) $P(A'|B)=۱-P(A|B)$

۲) $P(A\cup B|C)=P(A|C)+P(B|C)-P(A\cap B|C)$

۳) $P(A-B|C)=P(A|C)-P(A\cap B|C)$

در ضمن یادگیری احتمال شرطی لازم است ولی این قاعده به تنهایی کافی نیست و باید سه ابزار دیگر به نام های « قانون ضرب احتمال » ، « قانون احتمال کل » و « قانون بیز » را نیز بشناسیم و بدانیم در چه مواردی و از کدام یک باید استفاده شود .

تمرین : ثابت کنید اگر B و C دو پیشامد ناسازگار باشند که $P(A|B)\le P(A|C)$ آنگاه :

$$P(A|B)\le P(A|B\cup C)\le P(A|C)$$

اثبات : اگر B و C ناسازگار باشند $A\cap B$ و $A\cap C$ نیز ناسازگارند و داریم :

$$P(A|B\cup C)=\frac{P(A\cap(B\cup C))}{P(B\cup C)}=\frac{P((A\cap B)\cup(A\cap C))}{P(B\cup C)}=\frac{P(A\cap B)+P(A\cap C)}{P(B)+P(C)}$$

کسر حاصل بین $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ و $\frac{P(A\cap C)}{P(C)}$ است که تعاریف $P(A|B)$ و $P(A|C)$ هستند .

قانون ضرب احتمال :

اگر A و B دو پیشامد باشند ، احتمال آنکه هر دو با هم رخ بدهند ( A و B رخ دهند ) برابر است با :

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$$

مثال : در کیسه ای ۱ گوی سبز، ۳ گوی سفید و ۲ گوی قرمز وجود دارد . از کیسه دو گوی به ترتیب و بدون جایگذاری خارج می کنیم . احتمال اینکه گوی اول سبز و گوی دوم سفید باشد چقدر است ؟

حل :

A : پیشامد گوی اول سبز باشد .

B : پیشامد گوی دوم سفید باشد .

در این صورت $P(A)=\frac{۱}{۶}$ و $P(B|A)$ یعنی با شرط آنکه گوی اول سبز باشد احتمال اینکه گوی دوم سفید باشد . که چون بدون جایگذاری بوده است پس در کیسه فقط ۵ گوی مانده که ۳ تای آن سفید است لذا $P(B|A)=\frac{۳}{۵}$ بنابر این :

$$P(A\cap B)=\frac{۱}{۶}\times\frac{۳}{۵}=\frac{۱}{۱۰}$$

تمرین : ثابت کنید قانون ضرب برای سه پیشامد به صورت زیر است .( از سمت راست ساده کنید ) .

$$P(A_۱\cap A_۲\cap A_۳)=P(A_۱)P(A_۲|A_۱)P(A_۳|A_۱\cap A_۲)$$

تمرین : در مثال قبل اگر ۳ گوی بدون جایگذاری برداشته شود. احتمال اینکه گوی اول سبز و گوی دوم سفید و سومی قرمز باشد چقدر است ؟

تمرین : بسکتبالیستی هر بار که اقدام به پرتاب می کند ، اگر روحیه خوب داشته باشد به احتمال ۸۰ درصد گل می شود و اگر روحیه اش ضعیف باشد احتمال گل شدن پرتابش ۵۰ درصد است . در ضمن می دانیم او اگر پرتابی را گل کند روحیه اش قوی و در غیر این صورت روحیه اش ضعیف می شود . فرض کنید وی سه پرتاب انجام دهد و قبل از پرتاب اول روحیه خوبی داشته باشد . احتمال آنکه دقیقا دو پرتاب آخر گل شود چقدر است ؟ ( راهنمایی پیشامد های A و B و C را تعریف و $P(A'\cap B\cap C)$ را حساب کنید . )

تمرین : فرض کنید سه کارت داریم که کارت اول دو رو قرمز، کارت دوم دو رو آبی و کارت سوم یک رو قرمز و یک رو آبی است . کارتی به تصادف انتخاب می کنیم و مشاهده می کنیم یک روی آن قرمز است . احتمال اینکه هر دو روی آن قرمز باشد چقدر است ؟

حل : A پیشامد آنکه روی کارت انتخابی قرمز باشد و B پیشامد آنکه کارت انتخابی دو رو قرمز باشد .

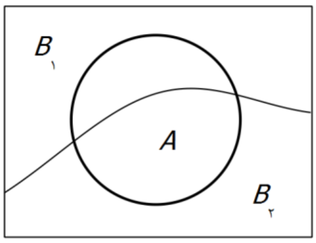
$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}=\frac{\frac{۱}{۳}\times ۱}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۲}{۳}$$

هرکارتی که انتخاب شود یک رویش نگاه می شود و از ۶ روی سه کارت در ۳ حالت قرمز دیده می شود : $P(A)=\frac{۱}{۲}$

قانون احتمال کل :

گاهی اوقات احتمال وقوع پیشامد A در هر قسمتی از فضای نمونه ای متفاوت است . فرض کنید فضای نمونه ای به دو قسمت $B_۱, B_۲$ افراز شده باشد در این صورت $(A\cap B_۱),(A\cap B_۲)$ ناسازگارند بنابر این داریم :

$$\begin{aligned}P(A)&=P((A\cap B_۱)\cup(A\cap B_۲))\\&=P(A\cap B_۱)+(A\cap B_۲)\\&=P(B_۱)P(A|B_۱)+P(B_۲)P(A|B_۲)\end{aligned}$$




مثال : دو کیسه داریم که اولی شامل ۲ گوی سفید و ۳ گوی سبز و دومی شامل ۱ گوی سفید و ۹ گوی قرمز است . گویی را از یکی از دو کیسه بر می داریم . چقدر احتمال دارد این گوی سفید باشد .

A : گوی برداشته شده سفید باشد .

$B_۱$ : کیسه اول انتخاب شده باشد .

$B_۲$ : کیسه دوم انتخاب شده باشد .

$$P(A)=P(B_۱)P(A|B_۱)+P(B_۲)P(A|B_۲)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۵}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۱۰}=\frac{۱}{۴}$$

فرض کنید $B_۱$، $B_۲$، . . . و $B_n$ پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه را افراز می‌کنند. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه $A$، داریم :

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B_۱)\mathrm{P}(A|B_۱)+\mathrm{P}(B_۲)\mathrm{P}(A|B_۲)+\dots+\mathrm{P}(B_n)\mathrm{P}(A|B_n)=\sum_{k=۱}^{n}\mathrm{P}(B_k)\mathrm{P}(A|B_k)$$

تمرین : دو کیسه را در نظر بگیرید که در اولی ۳ مهره قرمز و ۱ مهره سفید و در دومی ۲ مهره قرمز و ۱ مهره سفید است . یک مهره به تصادف از کیسه اول برداشته و داخل کیسه دوم می گذاریم . سپس یک مهره به تصادف از داخل کیسه دوم بر می داریم . احتمال آنکه این مهره سفید باشد چقدر است ؟

تمرین : در جعبه ای ۶ مهره سفید و ۹ مهره سیاه موجود است. دو مهره متوالیاً و بدون جایگذاری و به تصادف از آن بیرون می آوریم . با کدام احتمال دومین مهره خارج شده سفید است ؟ ( س ۹۲ )

تمرین : احتمال انتقال بیماری مسری به افراد واکسن زده ۰/۰۲۵ و احتمال انتقال به افراد دیگر ۰/۲ است . ۰/۶ کارگران یک کارگاه واکسن زده اند . اگر فرد بیماری به تصادف با یکی از کارگران ملاقات کند . با کدام احتمال این بیماری منتقل شده است ؟ ( س ۸۹ )

قانون بیز :

قانون بیز زمانی کاربرد دارد که هدف محاسبه $P(A|B)$ باشد ولی در داده های مساله $P(B|A)$ وجود داشته باشد :

$$P(A\cap B)=P(B\cap A)\Rightarrow P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)\Rightarrow \boxed{P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}}$$

در واقع این قانون احتمالات پیش از مشاهده را به احتمالات پس از مشاهده تبدیل می کند . در این قانون همیشه مخرج قانون احتمال کل است و یکی از اجزای آن در صورت نیز حضور دارد .

مثال : سه کارگر $A, B, C$ به ترتیب ۴۰ درصد ، ۳۶ درصد و ۲۴ درصد ظروف سرامیکی فروشگاهی را تولید می کنند . درصد صنایع دستی معیوب این کارگران به ترتیب ۳و۲و۱ درصد است . اگر یک ظرف تولیدی معیوب باشد با کدام احتمال این ظرف تولید کارگر C است .

حل : اگر M را پیشامد معیوب بودن ظرف در نظر بگیریم هدف بدست آوردن $P(C|M)$ خواهد بود در حالی که در داده های مساله $P(M|C)=۰/۰۱$ وجود دارد . پس :

$$P(C|M)=\frac{P(C)P(M|C)}{P(M)}=\frac{۰/۲۴\times ۰/۰۱}{۰/۴۰\times ۰/۰۳+۰/۳۶\times ۰/۰۲+۰/۲۴\times ۰/۰۱}=\frac{۲۴}{۲۱۶}=\frac{۱}{۹}$$

تمرین : در یک آزمون از دو کلاس A و B ، ۴۰ درصد کلاس A و ۶۰ درصد کلاس B قبول شده اند . اگر داوطلبین در کلاس A دو برابر کلاس B باشند و فردی به تصادف از بین قبول شدگان انتخاب شود با چه احتمالی از کلاس A است ؟ (س ۸۸)

تمرین : در یک کارخانه احتمال کم ریخته شدن شیر درون پاکت در حالت عادی ۲ درصد و در حالت خرابی یک قطعه خاص ۱۰ درصد است و احتمال خراب شدن آن قطعه ۵ درصد است . اگر پاکت شیری به تصادف انتخاب شود و مشاهده گردد که شی آن کم است چقدر احتمال دارد دلیل آن ،خرابی قطعه باشد ؟

تکلیف : تمارین صفحه ۶۴ تا ۶۶ به جز تمرین های ۱۲و ۱۳و ۱۴را حل کنید .

## درس چهارم : پیشامد های مستقل و وابسته

در پیرامون ما اکثر پدیده ها به هم وابسته هستند مثل سونامی حاصل از زلزله، ولی برخی پدیده ها هم ارتباطی به هم ندارند مثلاً گروه خونی شما و دوستتان که این نوع پدیده ها مستقل می گویند . البته در پیشامد ها تشخیص وابسته و مستقل بودن همیشه آسان نیست .

اگر شما شرط B را برای اتفاق افتادن A قرار دهید و مشاهده کنید این شرط تاثیری در احتمال رخ دادن A ندارد چه نتیجه ای می گیرید ؟

بیایید جمله بالا را به زبان ریاضی بررسی کنیم :

$$P(A|B)=P(A)\Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A)\Rightarrow \boxed{P(A\cap B)=P(A)P(B)}$$

آیا می توان گفت شرط مستقل بودن دو پیشامد عبارتی است که داخل کادر نوشته شده است ؟

تمرین : در پرتاب دو تاس آیا پیشامد ظاهر شدن دو عدد با مجموع ۷، با پیشامد ظاهر شدن ۳ در تاس اول دو پیشامد مستقل هستند ؟

تمرین : سکه سالمی را سه بار پرتاب می کنیم . اگر A پیشامد مشاهده رو در پرتاب دوم و B پیشامد مشاهده فقط دو رو به طور متوالی باشد ، مستقل بودن A و B را بررسی کنید .

تمرین : اگر احتمال قبولی علی و رضا در کنکور به ترتیب ۶۰ و ۷۰ درصد باشد ، احتمال آنکه حداقل یکی از آنها قبول شوند چقدر است ؟

سه پیشامد $A$، $B$ و $C$ را مستقل می‌گوییم، هرگاه چهار تساوی زیر برقرار باشند.

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$
$$P(A\cap C)=P(A)P(C)$$
$$P(B\cap C)=P(B)P(C)$$
$$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$$

در حالت کلی، $n$ پیشامد $A_1$، $A_2$، ....، $A_n$ را مستقل می‌گوییم، هرگاه احتمال اشتراک هر تعداد از این پیشامدها با حاصل‌ضرب احتمال آنها برابر باشد.

مثال : خانواده ای دارای ۴ فرزند است .

الف) احتمال اینکه هر ۴ فرزند دختر باشند چقدر است ؟

P($A$)= P (دختر، دختر، دختر، دختر)

=P(دختر) × P(دختر) × P (دختر)× P(دختر)

$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۱۶}$$

ب) احتمال اینکه فقط فرزند اول و آخر دختر باشند چقدر است ؟

P($B$)= P (دختر، پسر، پسر، دختر)

=P(دختر) × P(پسر) × P (پسر) × P(دختر)

$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۱۶}$$

ج) احتمال اینکه دو فرزند این خانواده دختر باشند چقدر است ؟

تعداد حالت هایی که دو فرزند دختر باشد برابر است با $\binom{۴}{۲}=۶$ و احتمال هر کدام از حالت های ممکن $\frac{۱}{۱۶}$ است پس

$$P(D)=۶\times\frac{۱}{۱۶}=\frac{۳}{۸}$$

تکلیف : تمارین صفحه ۷۱ و ۷۲ را حل کنید .