اگرچه نیت خوبی است زیستن ...
اما خوشا که دست به تصمیم بهتری بزنیم !

استدلال ریاضی

از این قسمت قصد داریم درباره‌ی برخی از راه‌هایی که استدلال و ثابت کردن در ریاضی رو بهتون یاد بدیم و از یاد گرفتن اون‌ها لذت ببریم.

مثال نقض

خیلی وقت‌ها خیلی از رابطه‌ها رو می‌تونیم با زدن یه مثال ساده رد کنیم و به صاحبش بفهمونیم که داره اشتباه می‌کنه. به عنوان مثال یکی اومده به من میگه ضرب هر دو عدد طبیعی یه عدد زوج هست. من برای این‌که بهش بگم داره اشتباه می‌کنه گفتم حاصل ۵×۳ چند میشه و وقتی گفت برابر ۱۵ هست، خودش متوجه اشتباهش شد.

تمرین: هر یک از گزاره‌های زیر را در صورت نادرست بودن با یک مثال نقض رد کنید.

۱. جمع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

۲.حاصل ضرب هر دو عدد گنگ، گویا است.

۳. مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گویا است.

۴. توان دوم هر عدد گنگ، عددی گویا است.

۵. اگر $a^۲ < b^۲$ باشد، آن‌گاه $a < b$ خواهد بود.

۶. اگر x و y دو عدد حقیقی (مخالف صفر) باشند، داریم: $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq ۲$

۷. برای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، عدد $۲^n-۱$ اول است.

۸. برای هر دو عدد حقیقی x و y: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{x+y}$ است.

۹. ضرب دو عدد گنگ غیر مساوی، عددی گنگ است.

۱۰. برای هر عدد طبیعی n، عدد $۳^n+۴$ اول است.

۱۱. ضرب هر عدد گویا در عددی گنگ، گنگ می‌شود.

۱۲. معکوس هر عدد مثبت، بزرگ‌تر یا مساوی خودش است.

۱۳. اگر برای هر سه مجموعه‌ی A و B و C داشته باشیم $A\cup B=A\cup C$ آن‌گاه $B=C$.

اثبات مستقیم

هر وقت بخواهیم با استفاده از قانون‌هایی که در قبل یاد گرفتیم مطالبی رو در ریاضی ثابت کنیم از اثبات به روش مستقیم استفاده خواهیم کرد، به مثال زیر دقت کنید.

مثال: ثابت کنید مجموع سه عدد متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است.

پاسخ: برای این‌کار کافیه که سه عدد طبیعی رو با n و $n+۱$ و $n+۲$ نشون بدیم، پس داریم:

$$n+(n+۱)+(n+۲)=۳n+۳=۳(n+۱)$$

پس خیلی راحت موفق شدیم این قانون رو ثابت کنیم.

تمرین: هر یک از گزاره‌های زیر را ثابت کنید.

۱. مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.

۲. حاصل‌ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است.

۳. مجموع هر دو عدد گویا، عددی گویا است.

۴. اگر k حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آن‌گاه $۴k+۱$ مربع کامل است.

۵. مربع و مکعب هر عدد فرد، عددی فرد است.

۶. میانگین پنج عدد طبیعی متوالی همان عدد وسطی است.

۷. ثابت کنید جمع پنج عدد طبیعی متوالی بر ۵ بخش‌پذیر است.

۸. نشان دهید تفاضل مربعات دو عدد فرد متوالی، همواره بر ۸ بخش‌پذیر است.

۹. ثابت کنید اگر به ۴ برابر ضرب دو عدد طبیعی متوالی، یک واحد اضافه کنیم حاصل مربع کامل خواهد بود.

۱۰. اگر a مضرب ۳ باشد، آن‌گاه $a(a+۳)$ مضرب ۱۸ خواهد بود.

۱۱. اگر n عددی فرد باشد، مجموع n عدد طبیعی متوالی بر n بخش‌پذیر است.

اثبات با در نظر گرفتن همه‌ی حالت‌ها

خیلی وقت‌ها برای ثابت کردن قانونی باید قانون رو تو چند حالت ثابت کنیم تا یه وقت چیزی از قلم نیفته کارمون به مشکل بخوره، به مثال زیر توجه کن.

مثال: ثابت کنید برای هر عدد طبیعی $\mathbf{n}$ ، $\mathbf{n^۲-۵n+۷}$ عددی فرد است.

پاسخ: این مثال رو تو دو حالت حل می‌کنیم.

اول: n یه عدد زوج باشه یعنی $n=۲k \ \ (k\in\mathbb{N})$ اون وقت داریم:

$$n^۲-۵n+۷=(۲k)^۲-۵(۲k)+۷=$$
$$۴k^۲-۱۰k+۷=۴k^۲-۱۰k+۶+۱$$

$$۲\underbrace{(۲k^۲-۵k+۳)}_{k'}+۱=۲k'+۱$$

پس حاصل تو این حالت فرد شد.

دوم: n رو یه عدد فرد فرض کنیم یعنی $n=۲k+۱ \ \ (k\in\mathbb{N})$ ان وقت داریم:

$$n^۲-۵n+۷=(۲k+۱)^۲-۵(۲k+۱)+۷=$$
$$۴k^۲+۴k+۱-۱۰k-۵+۷$$
$$=۴k^۲-۶k+۳=۴k^۲-۶k+۲+۱=$$
$$۲\underbrace{(۲k^۲-۳k+۱)}_{k'}+۱=۲k'+۱$$

پس باز هم حاصل یه عدد فرد شد.

بنابراین نتیجه می‌گیریم به ازای هر عدد طبیعی n، $n^۲-۵n+۷$ یه عدد فرد است.

تمرین: درستی گزاره‌های زیر را ثابت کنید.

۱. اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab=۰$ آن‌گاه $a=۰$ یا $b=۰$.

۲. اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، ثابت کنید $a^۲+b^۲$ زوج است.

۳. $A=\{۳,۴\}$ یک زیر مجموعه از مجموعه‌ی $S=\{۱,۲,...,۶\}$ است و $n\in S$، اگر $\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}$ یک عدد زوج باشد، ثابت کنید $n\in A$.

۴. به ازای هر عدد طبیعی n، عدد $n^۲+۲$ بر ۴ بخش‌پذیر نیست.

اثبات غیر مستقیم (برهان خلف)

خیلی وقت‌ها برای این‌که درستی یه حکم رو ثابت کنیم برعکس عمل می‌کنیم یعنی این‌که فرض می‌کنیم حکم درست نیست بعد با استفاده از استدلال‌های درست به یه نتیجه‌ای غیر ممکن یا متضاد با فرض برسیم، پس فرض نادرست بودن حکم باطل بوده و درستی حکم ثابت می‌شود.

مثال: ثابت کنید جمع عددی گویا با عددی گنگ، گنگ می‌شود.

پاسخ: اگر a رو عددی گویا و b عددی گنگ باشه قراره ثابت کنیم $a+b$ عددی گنگ است. حالا اگه بخواهیم از برهان خلف استفاده کنیم باید فرض کنیم $a+b$ عدد گویایی مثل m هست یعنی $m=a+b$ پس $b=m-a$ خواهد بود و می‌دونیم $m-a$ عددی گویا است پس b هم که مساوی $m-a$ هست گویا خواهد بود که این خلاف فرض است (چون قبل گفته بودیم b عددی گنگ است) پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

تمرین: درستی گزاره‌های زیر را از روش برهان خلف ثابت کنید.

۱. $a_۱$ و $a_۲$ و $a_۳$ عددهایی صحیح هستند و $b_۱$ و $b_۲$ و $b_۳$ همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند، ثابت کنید $(a_۱-b_۱)(a_۲-b_۲)(a_۳-b_۳)$ عددی زوج است.

۲. اگر x یک عدد گنگ باشد، ثابت کنید $\frac{۱}{x}$ نیز گنگ است.

۳. اگر تابع f در $x=a$ پیوسته ولی g در $x=a$ ناپیوسته باشد، ثابت کنید $f+g$ در $x=a$ ناپیوسته است.

۴. می‌دانیم $\sqrt{۳}$ عددی گنگ است، ثابت کنید $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ نیز عددی گنگ است.

۵. اگر a و b دو عدد گنگ باشند به طوری‌که $a+b$ گویا باشد، ثابت کنید $a-b$ عددی گنگ است.

۶. اگر a و b دو عدد طبیعی و ab زوج باشد، ثابت کنید یا a زوج است و یا b.

۷. اگر n عددی طبیعی و $3n-4$ عددی فرد باشد، ثابت کنید n نیز فرد است.

گزاره‌های هم ارز

اگر ارزش دو گزاره یکی باشه آن‌ها رو گزاره‌های هم ارز (هم ارزش) می‌نامیم. یعنی اگه p و q دو گزاره‌ی هم ارز (یعنی همواره هر دو درست یا هر دو نادرست) باشه و هر دو گزاره $q \Rightarrow p \, , \, p \Rightarrow q$ درست باشه، اون وقت $p \Leftrightarrow q$ هم یه گزاره درست خواهد بود.

مثال: آیا گزاره‌ی $\mathbf{a=b \Leftrightarrow a^2=b^2}$ درست است؟ چرا؟

پاسخ: ابتدا باید ببینیم گزاره‌ی $a=b \Rightarrow a^2=b^2$ درست است که متوجه می‌شویم درست هست چون که از $a=b$ می‌تونیم نتیجه بگیریم $a^2=b^2$ است. تو مرحله‌ی بعدی باید بررسی کنیم ببینیم گزاره‌ی $a^2=b^2 \Rightarrow a=b$ نیز درست هست یا خیر که با کمی دقت می‌فهمیم که اگر $a^2=b^2$ باشه اون وقت $a=\pm b$ است پس گزاره‌ی $a^2=b^2 \Rightarrow a=b$ همیشه درست نیست پس گزاره‌ی $a=b \Leftrightarrow a^2=b^2$ یه گزاره‌ی نادرست است.

تمرین: کدام یک از ترکیب‌های دو شرطی زیر درست است.

۱. $a=b \Leftrightarrow a^3=b^3 \qquad (a,b \in \mathbb{R})$

۲. $a<b \Leftrightarrow a^2<b^2 \qquad (a,b \in \mathbb{R})$

۳. $a < b \Leftrightarrow a^{۳} < b^{۳} \qquad (a , b \in \mathbb{R})$

۴. $n^{۲}$ زوج $\Leftrightarrow$ n زوج

۵. $x = ۲ \Leftrightarrow x^{۲} = ۴$

۶. $x^{۳} \leq x^{۲} \Leftrightarrow x \leq ۱$

اثبات بازگشتی

بعضی وقت‌ها برای اثبات خیلی از حکم‌های ریاضی به خصوص نامساوی‌ها از این روش استفاده می‌کنیم ولی طرز استفاده از این روش به این صورت هست که از حکم مسأله شروع می‌کنیم و به یک گزاره‌ی هم ارز تبدیلش می‌کنیم و گزاره‌ی بعدی رو به بعدی و این قدر ادامه می‌دهیم تا به یه گزاره برسیم که مطمئن هستیم درست است. اگه همه‌ی این گزاره‌ها دو شرطی باشن کار تموم شده و مسأله را ثابت کردیم.

مثال: ثابت کنید اگر a و b دو عدد مثبت باشند $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq ۲$ است.

پاسخ: این مسأله رو به روش اثبات بازگشتی حل می‌کنیم، یعنی داریم:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq ۲ \Leftrightarrow \frac{a^{۲} + b^{۲}}{ab} \geq ۲ \Leftrightarrow a^{۲} + b^{۲} \geq ۲ab$$
$$\Leftrightarrow a^{۲} + b^{۲} - ۲ab \geq ۰ \Leftrightarrow (a - b)^{۲} \geq ۰$$

عبارت فوق همواره درست است.

تمرین: درستی هر یک از گزاره‌های زیر را به روش بازگشتی ثابت کنید.

۱. برای هر دو عدد حقیقی و نامنفی x و y داریم:

$$x + y \geq ۲\sqrt{xy}$$

۱۱. اگر $a < ۰$ باشد، ثابت کنید $a + \frac{۱}{a} \le -۲$ است.

بخش‌پذیری در اعداد صحیح

از دوران دبستان معنی بخش‌پذیری رو فهمیدیم، به عنوان مثال عدد ۱۸ به ۳ بخش‌پذیر هست یعنی وقتی ۱۸ رو به ۳ تقسیم کنیم باقی‌مانده نداره به عبارت دیگه ۳ در یه عددی ضرب میشه و حاصل برابر ۱۸ خواهد شد. حالا همین مطلب رو تو سال پایانی قصد دارند بهتون یاد بدهند و کلی نتیجه بگیرند، پس خوبه خوب توجه کن و از یاد گرفتن اون لذت ببر.

تعریف بخش‌پذیری

اگر عدد b به a بخش‌پذیر باشه به شکل $a|b$ نشون می‌دهیم. به عنوان مثال $۳|۱۸$ و یعنی این‌که یه عدد صحیح مثل q داریم که $b = aq$.

توجه: از اون جایی‌که ریاضی‌دان‌ها دوست دارن بگن زبون ریاضی خیلی خاص هست (برعکس من که همیشه دارم داد و فریاد می‌کنم که بابا ریاضی کاری نداره) عبارت $a|b$ رو به یکی از صورت‌های زیر صدا می‌زنند.

۱. a شمارنده b است.

۲. a، b را می‌شمارد.

۳. a، b را عاد می‌کند.

تمرین الف: با توجه به تعریف رابطه‌ی عاد کردن جاهای خالی رو پر کنید.

$۱)\ ۷|۶۳ \Leftrightarrow ۶۳ = \ldots\ldots \times \ldots\ldots$

$۲)\ ۹۱ = ۷ \times \ldots\ldots \Leftrightarrow \ldots\ldots|۹۱$

$۳)\ -۶|۵۴ \Leftrightarrow \ldots\ldots = \ldots\ldots \times -۶$

$۴)\ ۵|-۳۵ \Leftrightarrow \ldots\ldots = ۵ \times \ldots\ldots$

$۵)\ ۰ = ۱۸ \times \ldots\ldots \Leftrightarrow ۱۸|\ldots\ldots$

$۶)\ a|۱ \Rightarrow a = \ldots\ldots$ یا $a = \ldots\ldots$

$۷)\ ۲۶ = ۲ \times ۱۳ \Rightarrow ۲|\ldots\ldots, \ldots\ldots|۲۶$

تمرین ب: با استفاده از تعریف عاد کردن هر یک از ویژگی‌های زیر را ثابت کنید.

۱. $a|b \Rightarrow a|mb$

۲. $a|b \Rightarrow a|b^۲$

۳. $a|b \Rightarrow a|b^n$

بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد (ب.م.م)

خُب بازم مجبوریم که به یه زبون خیلی ساده ب.م.م رو براتون بگم. چون این ریاضی‌دان‌ها هیچ جوره بلد نیستند به زبون آدمی‌زاد صحبت کنند، من الان میخام ب.م.م دو عدد ۳۶ و ۶۰ رو پیدا کنم برای همین این دو عدد رو به صورت کسری می‌نویسم و تا جایی‌که میتونم ساده می‌کنم.

خُب خیلی سریع کسر $\frac{۳۶}{۶۰}$ رو به ۲ ساده می‌کنم حاصل $\frac{۱۸}{۳۰}$ میشه دوباره به دو ساده می‌کنیم $\frac{۹}{۱۵}$ میشه، حالا به ۳ ساده می‌کنم $\frac{۳}{۵}$ میشه دیگه $\frac{۳}{۵}$ به هیچ چیزی ساده نمی‌شه. خُب کسر $\frac{۳۶}{۶۰}$ رو دوبار به ۲ و یه بار به ۳ ساده کردیم پس ب.م.م این دو تا عدد $۱۲ = ۳ \times ۲ \times ۲$ خواهد شد. به زبون ریاضی می‌نویسند $(۳۶,۶۰) = ۱۲$ و می‌خوانند ب.م.م دو عدد ۳۶ و ۶۰ برابر ۱۲ است.

حالا یه مطلب باحال بهتون بگم اون هم این هست که ۶۰ و ۳۶ به ۱۲ بخش‌پذیر هستند یعنی $۱۲|۶۰$ و $۱۲|۳۶$ و عمراً بتونید عددی بزرگ‌تر از ۱۲ پیدا کنید که ۶۰ و ۳۶ به اون عدد بخش‌پذیر باشد. به عنوان مثال $۳|۶۰$ و $۳|۳۶$ ولی ۳ از عدد بزرگتره.

حالا در زیر میخام به زبون ریاضی معنی ب.م.م رو بگم.

ب.م.م

عدد طبیعی d رو ب.م.م دو عدد صحیح a و b می‌نامیم (a و b هم‌زمان صفر نیستند) و می‌نویسیم $(a,b)=d$ وقتی هر دو تا شرط زیر رو با هم داشته باشیم:

الف) $d|a \; , \; d|b$

ب) $\forall m > ۰ \; ; \; m|a \, , m|b \Rightarrow m \le d$

تمرین الف: ب.م.م‌های زیر را پیدا کنید.

۱. $(۳۶,۴۸)$

۲. $(۱۲,۲۱)$

۳. $(۱,۱۱)$

۴. $(۴,۱۲)$

۵. $(۰,۶)$

۶. $(۴,-۱۲)$

۷. $(۲۴,۷)$

۸. $(۱۳,۶)$

۹. $(۷,۳۱)$

۱۰. $(-۱۲,-۴۸)$

۱۱. $(-۲۴,۳۶)$

۱۲. $(۲^n,۳^n)$

توجه: هر وقت ب.م.م دو تا عدد برابر یک بشه یعنی اون دو عدد نسبت به هم اولند.

$(a,b)=۱ \Leftrightarrow$ نسبت به هم اولند a و b

تمرین: به هریک از سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

۱. اگر $a|b$ **ثابت کنید** $(a,b)=|a|$.

۲. a **عددی فرد است، ثابت کنید** $(۲a,a+۲)=۱$.

۳. ثابت کنید هر دو عدد متوالی نسبت به هم اول هستند.

۴. ثابت کنید هر دو عدد فرد متوالی نسبت به هم اول هستند.

۵. ثابت کنید بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد زوج متوالی ۲ است.

۶. اگر $(a,b)=۱$ **ثابت کنید دو عدد** $a+۲b$ **و** $۳a+۵b$ **نسبت به هم اول هستند.**

۷. اگر $(a,b)=۱$ **و** $c|a$ **ثابت کنید** $(a,c)=۱$.

۸. به ازای چند عدد دو رقمی n، $(n-۱۳,۵)$ از ۱ بزرگ‌تر می‌شود؟

۹. به ازای کدام‌یک از عددهای طبیعی دو رقمی n، ب.م.م دو عدد $۵n-۶$ و $n+۵$ از ۱ بزرگ‌تر می‌شود.

۱۰. اگر n یک عدد طبیعی باشه، حاصل $((n+۱)!+۱,n!+۱)$ را پیدا کنید.

۱۱. حاصل $(n^۳-n,۶)$ را پیدا کنید.

کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد (ک.م.م)

باز از اون جایی که من مجبورم به زبون آدمی‌زاد یه مفهوم دیگه رو توضیح بدم، پس چشم‌هات رو تیز کن و با دقت این مطلب رو هم بخون.

مضرب عددها رو که از قدیم بلد هستیم، به عنوان مثال مضرب‌های طبیعی عدد ۳ مجموعه‌ی $A=\{۳,۶,۹,۱۲,۱۵,...\}$ است و مضرب‌های طبیعی عدد ۵ مجموعه‌ی $B=\{۵,۱۰,۱۵,...\}$ است که این دو مجموعه رو مشترک‌هاش رو بنویسیم مجموعه‌ی $A\bigcap B=\{۱۵,۳۰,۴۵,...\}$ خواهد شد. واضح هست که عدد ۱۵ کوچک‌ترین عضو مضرب‌های مشترک دو عدد ۵ و ۳ هست.

ریاضی‌دان‌ها از این کشف بزرگ کلی کیف کردند و اسمش رو گذاشتند کوچک‌ترین مضرب مشترک و به طور اختصار ک.م.م بهش گفتند و بعدش هم یه علامت براش پیدا کردن و این‌طوری $[۳,۵]=۱۵$ نشون دادند. حواست باشه که همه‌ی عضوهای $A\bigcap B$ مثل ۳۰ به ۳ و ۵ بخش‌پذیر هستند $(۳|۳۰,۵|۳۰)$ ولی عدد ۱۵ از همه‌ی اون‌ها کوچک‌تره.

حالا بیاییم با زبون ریاضی مطالب پایین رو توضیح بدیم.

کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م)

دو عدد a و b که هیچ کدوم از اون‌ها صفر نیستند رو در نظر بگیریم. عدد طبیعی c رو ک.م.م دو عدد a و b می‌گیم و می‌نویسیم: $[a,b]=c$ هر وقت هر دو تا شرط زیر با هم برقرار باشه.

الف) $a|c\ ,\ b|c$

ب) $\forall m>۰\ ;\ a|m, b|m \Rightarrow c\le m$

توجه: وقتی داشتم به زبون آدمی‌زاد ب.م.م دو تا عدد ۳۶ و ۶۰ رو پیدا می‌کردم کسر $\frac{۳۶}{۶۰}$ رو ساده کردم تا به کسر $\frac{۳}{۵}$ رسیدم و گفتم $۱۲=(۳۶,۶۰)$ حالا اگه بخواهیم $[۳۶,۶۰]$ رو پیدا کنیم کافیه صورت و مخرج کسر ساده‌شده یعنی $\frac{۳}{۵}$ رو تو عدد ۱۲ ضرب کنیم یعنی:

$[۳۶,۶۰]=۱۲\times۳\times۵=۱۸۰$.

تمرین الف: حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به دست آورید.

1. $[-۹۱,۲۱]$

2. $[۱۲,۱۸]$

3. $[۲۴,-۴۸]$

4. $[۲^n,۳^n]$

5. $[۱۱,۷]$

6. $[۱۲,۳۵]$

7. $[۲۴,۱]$

8. $([a,۰],[a,۱])$

9. $[(a,a^n),(a,a^n)]$

10. $[a,(a,b)]$

تمرین ب: به هریک از سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

۱. اگر $[a,b]=(a,b)$ باشد، ثابت کنید $|a|=|b|$ است.

۱۹) اگر $a=۲^{\alpha}\times ۳\times ۷^{\beta}$ **و** $b=۳^{۲}\times ۵^{\gamma}\times ۷$ **و** $[a,b]=۸۸۲۰۰$، **آن‌گاه** $a\times b$ **چند مقسوم‌علیه طبیعی دارد؟**

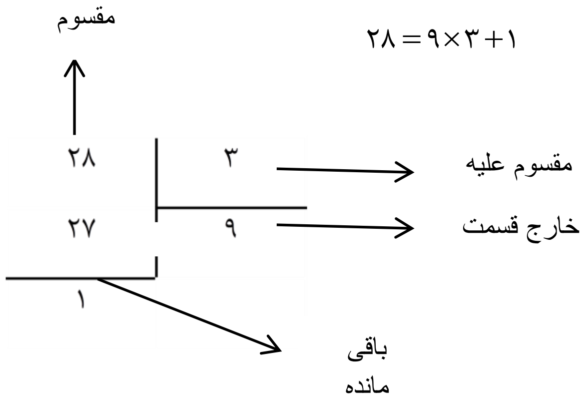
۱) ۷۲   ۲) ۹۸

۳) ۱۴۴   ۴) ۱۹۲

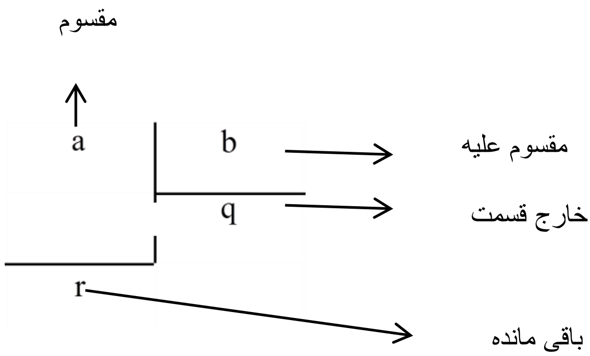
قضیه‌ی تقسیم

قضیه‌ی تقسیم همون تقسیم هست که تو دوره‌ی دبستان خوندیم و برای این‌که مطمئن بشیم تقسیم رو درست حل کردیم امتحانش می‌کردیم یعنی ضرب خارج قسمت در مقسوم علیه رو با باقی‌مانده جمع می‌کنیم و حاصل همون مقسوم می‌شه.

$$۲۸=۹\times ۳+۱$$

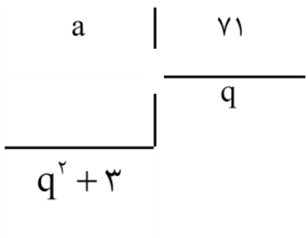


به زبون ریاضی همین کار رو به شکل زیر نشون خواهیم داد.



$$a=bq+r\ ,\ ۰\le r<b$$

مثال: در تقسیم عدد طبیعی a بر ۷۱ باقی‌مانده از مربع خارج قسمت ۳ واحد بیش‌تر است. بزرگ‌ترین مقدار a را به دست آورید.



پاسخ: مثل یه تقسیم معمولی مثال رو نشون خواهیم داد و

می‌دونیم باقی‌مانده از مقسوم علیه همیشه کم‌تر هست،

یعنی $q^{۲}+۳<۷۱$ هست، پس داریم:

$$q^{۲}+۳<۷۱\Rightarrow q^{۲}<۶۸\Rightarrow q=۱,۲,...,۸$$

از طرفی $a=۷۱q+q^{۲}+۳$ هست و خیلی واضح هست که بیش‌ترین مقدار a به ازای $q=۸$ پیدا می‌شود، پس داریم:

$$a=۷۱(۸)+(۸)^{۲}+۳=۸(۷۱+۸)+۳$$
$$=۸(۷۹)+۳=۶۳۵$$

تمرین الف: به هریک از سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

۱. باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۷ و ۶ به ترتیب برابر ۴ و ۵ هست. باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۴۲ را پیدا کنید.

۲. در تقسیم عدد ۴۲ بر b خارج قسمت مربع باقی‌مانده است. b را به دست آورید.

۳. اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b|a+۲$ در این صورت باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $a^{۲}+b^{۲}+۳$ را بر ۸ پیدا کنید.

۴. اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه هر دو بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید باقی‌مانده‌ی تقسیم نیز همواره بر n بخش‌پذیر است.

افراز عددهای صحیح

فرض کنید یه عدد مثل n داشته باشیم وقتی این عدد رو به ۲ تقسیم کنیم باقیمانده صفر یا یک می‌شود پس $n=2k$ یا $n=2k+1$ هست به عبارت دیگه عددهای صحیح رو به دو مجموعه تقسیم کردیم.

برای تمرین بیش‌تر هریک از حالت‌های زیر رو پیدا کنید.

۱. تقسیم بر ۳

$$\Rightarrow n=3k\ ,\ n=3k+1\ ,\ n=3k+2$$

۲. تقسیم بر ۴

۳. تقسیم بر ۵

۴. تقسیم بر k

مثال: ثابت کنید ضرب دو عدد متوالی همواره زوج است.

پاسخ: برای حل این مثال عددهای صحیح رو به دو مجموعه‌ی $n=2k$ و $n=2k+1$ تبدیل می‌کنیم و داریم:

$$n=2k \Rightarrow n(n+1)=2k(2k+1)$$
$$=2\underbrace{k(2k+1)}_{q}=2q \Rightarrow 2|n(n+1)$$

$$n=2k+1 \Rightarrow n(n+1)=(2k+1)(2k+2)$$
$$=2\underbrace{(2k+1)(k+1)}_{q'}=2q' \Rightarrow 2|n(n+1)$$

تمرین الف: به هریک از سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

۱. a عددی صحیح است، ثابت کنید a^2+2 بر ۴ بخش‌پذیر نیست.

۲. نشان دهید هر عدد فرد یا به صورت $4k+1$ و یا به صورت $4k+3$ است و سپس ثابت کنید مربع هر عدد فرد در تقسیم بر ۸ دارای باقی‌مانده ۱ است.

رابطه‌ی هم‌نهشتی

در این‌جا قصد دارم یه خاصیت عجیب از عددها رو براتون بگم اونم این هست که یه سری از عددها مثل ۱۷ و ۳۲ هر دو وقتی به ۵ تقسیم بشن باقی‌مانده‌ای برابر ۲ بهمون می‌دهند حالا اگه این دو تا عدد رو از هم کم کنیم $(۱۵=۱۷-۳۲)$ به عدد ۵بخش‌پذیر هستند $(۵|۳۲-۱۷)$. از اون جایی‌که هر چیزی تو ریاضی با یه نمادی مشخص میشه این مطلب رو به شکل $۳۲\overset{۵}{\equiv}۱۷$ نشون می‌دهند. حالا این حرف‌ها رو در زیر با زبون ریاضی می‌خواهیم نشون بدیم.

هم‌نهشتی

m عدد طبیعی، b و a دو تا عدد صحیح هستند. پس می‌گیم a با b به پیمانه‌ی m هم‌نهشت هستند هر موقع $m|a-b$.

$$\forall a,b\in\mathbb{Z}\ ,\ a\overset{m}{\equiv}b\ \Leftrightarrow m|a-b$$

قرارداد: همه‌ی عددهای صحیح که باقی‌مانده‌ی تقسیم اون‌ها بر عدد طبیعی m برابر با r بشه رو با مجموعه‌ی $A_r=\{x\in\mathbb{Z}|x=mk+r\}$ رو یه کلاس یا یه دسته‌ی هم‌نهشتی r به پیمانه‌ی m می‌گیم و به شکل $[r]_m$ نمایش خواهیم داد.

مثال: عدد ۱۳۹۸ به کدام دسته‌ی هم‌نهشتی به پیمانه‌ی ۹ تعلق دارد؟

پاسخ: اول از همه باید ببینیم باقی‌مانده ۱۳۹۸ به عدد ۹ چه عددی میشه، وقتی حساب کنیم می‌بینیم عدد ۳ خواهد شد، پس عدد ۱۳۹۸ متعلق به کلاس یا همون دسته‌ی هم‌نهشتی $[۳]_۹$ خواهد بود.

توجه توجه: حالا قصد داریم همه‌ی خاصیت‌های هم‌نهشتی رو در زیر بهتون یاد بدیم تا تو حل مسأله‌ها ازشون کمک بگیرید.

۱. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر m مساوی r باشد $(a=mq+r)$ در این صورت $a\overset{m}{\equiv}r$.

اثبات:

$$a=mq+r\Rightarrow a-r=mq\Rightarrow m|a-r\Rightarrow a\overset{m}{\equiv}r$$

۲. به هر دو طرف یه رابطه‌ی هم‌نهشتی می‌تونیم عددی اضافه یا کم کنیم.

$$a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow\begin{cases}a+c\overset{m}{\equiv}b+c\\ a-c\overset{m}{\equiv}b-c\end{cases}$$

اثبات:

$$a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow m|a-b\Rightarrow m|a+c-b-c$$
$$\Rightarrow m|(a+c)-(b+c)\Rightarrow a+c\overset{m}{\equiv}b+c$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد a بر ۷ برابر ۲ است. باقی‌مانده‌ی تقسیم $a+۱۲۳$ بر ۷ را به دست آورید.

پاسخ:

$$a\overset{۷}{\equiv}۲\Rightarrow a+۱۲۳\overset{۷}{\equiv}۱۲۳+۲\Rightarrow a+۱۲۳\overset{۷}{\equiv}۱۲۵\overset{۷}{\equiv}۶$$

۳. دو طرف یه رابطه‌ی هم‌نهشتی رو می‌تونیم تو یه عدد ضرب کنیم.

$$a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow ac\overset{m}{\equiv}bc$$

اثبات:

$$a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow m|a-b \Rightarrow m|ac-bc \Rightarrow ac\overset{m}{\equiv}bc$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد a بر ۱۳ برابر ۲ شده است. باقی‌مانده‌ی تقسیم $۳a+۱۴۱$ را بر ۱۳ به دست آورید.

پاسخ:

$$a\overset{۱۳}{\equiv}۲ \Rightarrow ۳a\overset{۱۳}{\equiv}۶ \Rightarrow ۳a+۱۴۱\overset{۱۳}{\equiv}۱۴۷\overset{۱۳}{\equiv}۴$$

۴. دو طرف یه رابطه‌ی هم‌نهشتی رو می‌تونیم به توان n برسونیم $(n\in\mathbb{N})$.

$$a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow a^n\overset{m}{\equiv}b^n$$

اثبات: با استفاده از اتحاد $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-۱}+a^{n-۲}b+\ldots+b^{n-۱})$ داریم:

$$a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow m|a-b$$
$$\Rightarrow m|(a-b)(a^{n-۱}+a^{n-۲}b+\ldots+b^{n-۱})$$
$$\Rightarrow m|a^n-b^n \Rightarrow a^n\overset{m}{\equiv}b^n$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۷ برابر ۳ شده است. باقی‌مانده‌ی تقسیم $a^۲+۶a+۱۷$ را بر ۷ به دست آورید.

پاسخ:

$$a\overset{۷}{\equiv}۳ \Rightarrow a^۲+۶a+۱۷\overset{۷}{\equiv}۹+۱۸+۱۷\overset{۷}{\equiv}۴۴\overset{۷}{\equiv}۲$$

۵. دو طرف یه رابطه‌ی هم‌نهشتی که پیمانه‌های یکی داشته باشند رو در هم ضرب کنیم.

$$a\overset{m}{\equiv}b\ ,\ c\overset{m}{\equiv}d \Rightarrow ac\overset{m}{\equiv}bd$$

اثبات:

$$\left.\begin{array}{l} a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow m|a-b \xrightarrow{\times c} m|ac-bc \\ c\overset{m}{\equiv}d \Rightarrow m|c-d \xrightarrow{\times b} m|bc-bd \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$m|ac-bd \Rightarrow ac\overset{m}{\equiv}bd$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم a و b بر ۷ به ترتیب ۳ و ۴ شده است. باقی‌مانده‌ی تقسیم ab را بر ۷ پیدا کنید.

پاسخ:

$$a\overset{۷}{\equiv}۲\ ,\ b\overset{۷}{\equiv}۳ \Rightarrow ab\overset{۷}{\equiv}(۳)(۴)\overset{۷}{\equiv}۱۲\overset{۷}{\equiv}۵$$

۶. دو طرف دو رابطه‌ی هم‌نهشتی به پیمانه‌ی رو می‌تونیم با هم جمع کنیم.

$$a\overset{m}{\equiv}b\ ,\ c\overset{m}{\equiv}d \Rightarrow a+c\overset{m}{\equiv}b+d$$

$$\left.\begin{array}{l} a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow m|a-b \\ c\overset{m}{\equiv}d \Rightarrow m|c-d \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$m|(a-b)+(c-d) \Rightarrow m|(a+c)-(b+d)$$
$$\Rightarrow a+c\overset{m}{\equiv}b+d$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد a و b بر ۷ به ترتیب برابر ۳ و ۴ شده است، باقی‌مانده‌ی تقسیم $a^۲+b^۲+۳ab+۱۸$ را بر ۷ به دست آورید.

پاسخ:

$$a^{۲}+b^{۲}+۳ab+۱۸\overset{۷}{\equiv}۳^{۲}+۴^{۲}+۳(۳)(۴)+۱۸$$
$$\overset{۷}{\equiv}۹+۱۶+۳۶+۱۸\overset{۷}{\equiv}۷۹\overset{۷}{\equiv}۲$$

۷. دو طرف دو رابطه‌ی هم‌نهشتی به پیمانه‌ی رو می‌تونیم از هم کم کنیم:

$$a\overset{m}{\equiv}b\ ,\ c\overset{m}{\equiv}d\Rightarrow a-c\overset{m}{\equiv}b-d$$

$$\left.\begin{array}{l} a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow m|a-b \\ c\overset{m}{\equiv}d\Rightarrow m|c-d \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$m|(a-b)-(c-d)\Rightarrow m|(a-c)-(b-d)$$

$$\Rightarrow a-c\overset{m}{\equiv}b-d$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم دو عدد $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بر ۱۱ به ترتیب ۲ و ۴ شده است. باقی‌مانده‌ی تقسیم $\mathbf{۳a-۲b+۱۷}$ را بر ۱۱ پیدا کنید.

$$۳a-۲b+۱۷\overset{۱۱}{\equiv}۱۲-۴+۱۷\overset{۱۱}{\equiv}۲۵\overset{۱۱}{\equiv}۳$$

تمرین الف: به هریک از سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

۱. اگر $a\overset{m}{\equiv}b$ و $n|m$ ثابت کنید $a\overset{n}{\equiv}b$.

۲. ثابت کنید اگر باقی‌مانده‌های تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی باشند، آن‌گاه $a\overset{m}{\equiv}b$.

۳. فرض کنیم $a\overset{m}{\equiv}b$ و $b\overset{n}{\equiv}c$ و $(m\ ,\ n)=d$ در این صورت ثابت کنید $a\overset{d}{\equiv}c$.

۴. ثابت کنید برای هر $n\in\mathbb{N}$، $a\ ,\ b\in\mathbb{Z}$ همواره $(a+b)^{n}\overset{ab}{\equiv}a^{n}+b^{n}$.

۱۷. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $a+۷$ بر ۱۱ برابر ۶ است. باقی‌مانده‌ی تقسیم $a^۲+۴a-۱۹$ را بر ۱۱ به دست آورید.

۱۸. باقی‌مانده‌ی تقسیم دو عدد ۶۶ و ۱۴۵ بر $m>۱$ یکسان است، m را به دست آورید.

نکته: اگر دو طرف یه رابطه‌ی هم‌نهشتی رو به یه عددی تقسیم کنیم، باید پیمانه رو به ب.م.م اون عدد و پیمانه تقسیم کنیم.

$$ac \overset{m}{\equiv} bc \Rightarrow a \overset{\frac{m}{(m,c)}}{\equiv} b$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $۳a+۲$ بر ۱۲ برابر ۸ شده است، باقی‌مانده‌ی تقسیم $a^۲+۵a-۱۹$ را بر ۴ به دست آورید.

$$۳a+۲ \overset{۱۲}{\equiv} ۸ \Rightarrow ۳a \overset{۱۲}{\equiv} ۶ \Rightarrow a \overset{\frac{۱۲}{(۱۲,۳)}}{\equiv} ۲ \Rightarrow a \overset{۴}{\equiv} ۲$$

$$a^۲+۵a-۱۹ \overset{۴}{\equiv} ۲^۲+۵(۲)-۱۹ \overset{۴}{\equiv}$$
$$-۵+۲\times۴ \Rightarrow a^۲+۵a-۱۹ \overset{۴}{\equiv} ۳$$

معادله‌ی هم‌نهشتی

هر معادله‌ای که قیافه‌ی اون به صورت $ax \overset{m}{\equiv} b$ باشه رو معادله‌ی هم‌نهشتی می‌گن و برای حل اون اول از همه اگه b,a بزرگ‌تر از m باشه به جاش باقی‌مانده تقسیم اون رو به m می‌نویسیم بعدش هر دو طرف هم‌نهشتی رو به ضریب x تقسیم می‌کنیم ولی حواسمون باشه اگه سمت دیگه تساوی (b) به ضریب x قابل قسمت نباشه یه مضربی از پیمانه (m) رو بهش اضافه می‌کنیم $(mt+b)$ تا هر دو طرف به ضریب x بخش‌پذیر شوند تا معادله به قیافه‌ی $x \overset{m}{\equiv} c$ در بیاید اون وقت $x=mk+c$ در خواهد اومد.

مثال: معادله‌ی هم‌نهشتی $۳x \overset{۱۱}{\equiv} ۱۲۰$ را حل کنید.

پاسخ: چون عدد ۱۲۰ از عدد ۱۱ بزرگ‌تر هست به جاش باقی‌مانده‌ی تقسیم اون رو به ۱۱ می‌نویسیم:

$$۳x \overset{۱۱}{\equiv} ۱۲۰ \xrightarrow{۱۲۰ \overset{۱۱}{\equiv} ۱۰} ۳x \overset{۱۱}{\equiv} ۱۰$$

چون عدد ۱۰ به ۳ بخش‌پذیر نیست عدد ۱۱ رو با عدد ۱۰ جمع می‌کنیم، یعنی داریم:

$$۳x \overset{۱۱}{\equiv} ۱۰ \Rightarrow ۳x \overset{۱۱}{\equiv} ۱۱+۱۰ \Rightarrow ۳x \overset{۱۱}{\equiv} ۲۱$$

حالا دو طرف هم‌نهشتی رو به ۳ تقسیم می‌کنیم.

$$۳x \overset{۱۱}{\equiv} ۲۱ \xrightarrow{\div ۳} x \overset{\frac{۱۱}{(۱۱,۳)}}{\equiv} ۷ \Rightarrow x \overset{۱۱}{\equiv} ۷ \Rightarrow x = ۱۱k+۷$$

قضیه: معادله‌ی هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ وقتی جواب داره $(a,m)|b$ و برعکس اگر $(a,m)|b$ معادله‌ی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب خواهد بود.

تمرین الف: هریک از معادله‌های هم‌نهشتی زیر را حل کنید.

۱) $۴۲۳x \overset{۱۱}{\equiv} ۷۹$

۲) $۸x \overset{۱۲}{\equiv} ۲۰$

۳) $۵۱x \overset{۶}{\equiv} ۱۱$

۴) $۷x \overset{۱۳}{\equiv} ۲$

۵) $۲-۱۱x \overset{۱۷}{\equiv} ۳۷$

۶) $۲۴x \overset{۱۰}{\equiv} ۱۸$

معادله‌ی سیاله

هر معادله‌ای که شکل اون به صورت $ax+by=c$ باشه رو معادله‌ی سیاله می‌گن و برای این‌که اون رو حل کند به معادله هم‌نهشتی $ax \overset{|b|}{\equiv} c$ در میارن، و وقتی که x رو پیدا کردیم تو معادله‌ی اولیه قرار می‌دهیم تا y رو پیدا کنیم.

توجه: معادله‌ی سیاله زمانی دارای جواب هست که $(a,b)|c$.

مثال: معادله‌ی $۴x+۵y=۹$ را حل کنید.

پاسخ: اول معادله رو به شکل $۴x \overset{۵}{\equiv} ۹$ در بیاریم تا بعد حلش کنیم.

$$۴x \overset{۵}{\equiv} ۹ \Rightarrow ۴x \overset{۵}{\equiv} ۴ \Rightarrow x \overset{\frac{۵}{(۵,۴)}}{\equiv} ۱ \Rightarrow$$

$$x \overset{۵}{\equiv} ۱ \Rightarrow x = ۵k+۱$$

$$۴(۵k+۱)+۵y=۹ \Rightarrow ۵y=-۲۰k+۵$$

$$\Rightarrow y=-۴k+۱$$

تمرین ب: به هریک از سؤال‌های زیر جواب دهید.

۱. جواب‌های عمومی معادله‌ی سیاله $۷x+۵y=۱۱$ را به دست آورید.

۲. به چند طریق می‌توان یک کیسه‌ی ۱۹ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۴ کیلویی وزن کرد.

۳. به چند طریق می‌توان ۱۸۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

۴. در یک رستوران فقط دو نوع خورشت قرمه سبزی و قیمه وجود دارد. اگر ۵ نفر وارد این رستوران شوند به چند طریق می‌توانند سفارش غذا بدهند؟

۵. تیراندازی به سمت یک هدف، شامل دو دایره‌ی هم‌مرکز تیراندازی می‌کند. اگر او تیر را به دایره‌ی با شعاع کوچک‌تر بزند ۵ امتیاز و اگر به دایره‌ی بزرگ‌تر و خارج دایره کوچک‌تر بزند ۳ امتیاز می‌گیرد. اگر او کم‌تر از ۱۵ تیر انداخته و همه‌ی تیرها به داخل دایره‌ی بزرگ‌تر اصابت کرده باشد، در پایان ۴۲ امتیاز گرفته باشد چند حالت برای او در تیراندازی می‌تواند ثبت شود؟

۶. به چند طریق می‌توان ۲۹۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

۷. به چند طریق می‌توان یک کیسه ۲۳ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟

۸. به چند طریق می‌توان دو نوع گل یک دسته گل شامل ۹ شاخه به دل‌خواه انتخاب کرد؟

۹. شخصی در یک مسابقه‌ی علمی شرکت کرده است. او به سؤالات ۷ امتیازی و ۹ امتیازی پاسخ داده و در مجموع ۷۳ امتیاز کسب کرده است. این شخص به چه صورت‌هایی می‌تواند این امتیاز را به دست آورد.

طریقه‌ی به دست آوردن باقی‌مانده‌ی تقسیم بر عددهای خاص

۱. برای پیدا کردن باقی‌مانده‌ی تقسیم عددی به عددهای ۳ یا ۹ کافیه که جمع رقم‌های اون عدد رو پیدا کنیم و باقی‌مانده‌اش رو به ۳ یا ۹ پیدا کنیم.

مثال: باقی‌مانده تقسیم عدد ۴۳۲۵۶۹۱۷۳۲ را بر ۳ و ۹ به دست آورید.

پاسخ:

$$۴۳۲۵۶۹۱۷۳۲ \overset{۳}{\equiv} ۴+۳+۲+۵+۶+۹+۱+۷+۳+۲ \overset{۳}{\equiv}$$
$$۴۲ \overset{۳}{\equiv} ۴+۲ \overset{۳}{\equiv} ۶ \overset{۳}{\equiv} ۰$$

$$۴۳۲۵۶۹۱۷۳۲ \overset{۹}{\equiv} ۴+۳+۲+۵+۶+۹+۱+۷+۳+۲ \overset{۹}{\equiv}$$
$$۴۲ \overset{۹}{\equiv} ۴+۲ \overset{۹}{\equiv} ۶$$

۲. برای پیدا کردن باقی‌مانده‌ی تقسیم هر عددی به یکی از عددهای ۲^n و ۵^n و ۱۰^n کافیه که باقی‌مانده‌ی تقسیم n رقم سمت راست رو به اون عدد پیدا کنیم.

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد ۱۳۹۶۵۱ را بر عددهای ۲۵ و ۸ و ۱۰۰ به دست آورید.

پاسخ: چون $۵^۲ = ۲۵$ است، پس کافیه باقی‌مانده‌ی دو رقم سمت راست رو به ۲۵ پیدا کنیم.

$$۱۳۹۶۵۱ \overset{۲۵}{\equiv} ۵۱ \overset{۲۵}{\equiv} ۱$$

می‌دونیم $۲^۳ = ۸$ پس باقی‌مانده‌ی سه رقم سمت راست رو به ۸ پیدا می‌کنیم.

$$۱۳۹۶۵۱ \overset{۸}{\equiv} ۶۵۱ \overset{۸}{\equiv} ۳$$

به دلیل این‌که $۱۰^{۲}=۱۰۰$ هست. پس باقی‌مانده‌ی دو رقم سمت راست رو به ۱۰۰ به دست بیاریم.

$$۱۳۹۶۵۱ \overset{۱۰۰}{\equiv} ۵۱ \overset{۱۰۰}{\equiv} ۵۱$$

۳. برای پیدا کردن باقی‌مانده‌ی تقسیم به ۱۱باید از سمت راست عددها رو یکی در میان مثبت و منفی نوشت و باقی‌مانده‌ی عدد حاصل رو به پیدا کنیم.

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم ۳۴۵۳۲۹ را بر ۱۱ به دست آورید.

پاسخ:

$$۳۴۵۳۲۹ \overset{۱۱}{\equiv} ۹-۲+۳-۵+۴-۳ \overset{۱۱}{\equiv} ۶$$

توجه: برای پیدا کردن رقم سمت راست یه عدد یا همون رقم یکان کافیه باقی‌مانده‌ی تقسیم رو به ۱۰ پیدا کنیم.

مثال: رقم یکان عدد $(۱۳۹)^{۲۱}+۱۴۳$ را به دست آورید.

$$۱۳۹ \overset{۱۰}{\equiv} ۹ \overset{۱۰}{\equiv} -۱ \Rightarrow (۱۳۹)^{۲۱} \overset{۱۰}{\equiv} (-۱)^{۲۱} \Rightarrow (۱۳۹)^{۲۱} \overset{۱۰}{\equiv} -۱$$
$$\Rightarrow (۱۳۹)^{۲۱}+۱۴۳ \overset{۱۰}{\equiv} ۱۴۳-۱ \overset{۱۰}{\equiv} ۱۴۲ \overset{۱۰}{\equiv} ۲$$

محاسبه‌ی روز هفته برحسب تاریخ

چون روزهای هفته، بعد هفت روز تکرار می‌شوند پس اگه بدونیم امروز سه‌شنبه هست و بخواهیم بدونیم ۱۷ روز بعد چند شنبه خواهد بود. می‌دونیم که هفت روز دیگه مجدد سه‌شنبه و هفت روز دیگه دوباره سه‌شنبه است پس چهارده روز دیگه سه‌شنبه است پس تا روز هفدهم سه روز باید جلو بریم یعنی چهارشنبه و پنج‌شنبه رو رد کنیم و برسیم به روز سوم که جمعه هست. پس هفده روز دیگه جمعه است.

به جای این همه دردسر کافی بود که ببینیم عدد ۱۷ به پیمانه ۷ چند میشه که محاسبه کنیم ۳ خواهد شد $(۱۷ \overset{۷}{\equiv} ۳)$ پس ۳ روز باید جلو می‌رفتیم حالا اگه می‌گفت هفده روز قبل‌تر چند شنبه بوده باید سه روز به عقب می‌رفتیم که اگه بریم عقب به شنبه می‌رسیم.

توجه: تو مسأله‌هایی که بهمون در رابطه با تاریخ می‌دهند، باید فاصله‌ی تاریخ‌ها رو از هم کم کنیم و برای این‌که اشتباه نکنیم باید هر تاریخی چندمین روز سال هست بعد از هم کمشون کنیم.

مثال: اگر در یک سال اول مهر شنبه باشد، در این صورت ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی است؟

پاسخ: اول از همه باید ببینیم اول مهر چندمین روز سال و ۱۲ بهمن نیز چندمین روز سال هست.

اول مهر $= ۶\times۳۱+۱$

دوازده بهمن $= ۶\times۳۱+۴\times۳۰+۱۲$

حالا این دو تا رو از هم کم می‌کنیم و باقی‌مانده‌ی اون‌ها رو به ۷ پیدا می‌کنیم.

$$(۶\times۳۱+۴\times۳۰+۱۲)-(۶\times۳۱+۱) \overset{۷}{\equiv}$$
$$۴\times۳۰+۱۱ \overset{۷}{\equiv} ۴\times۲+۴ \overset{۷}{\equiv} ۵$$

پس کافیه ۵ روز به جلو حرکت کنیم، یعنی ۱۲ بهمن پنج‌شنبه است.