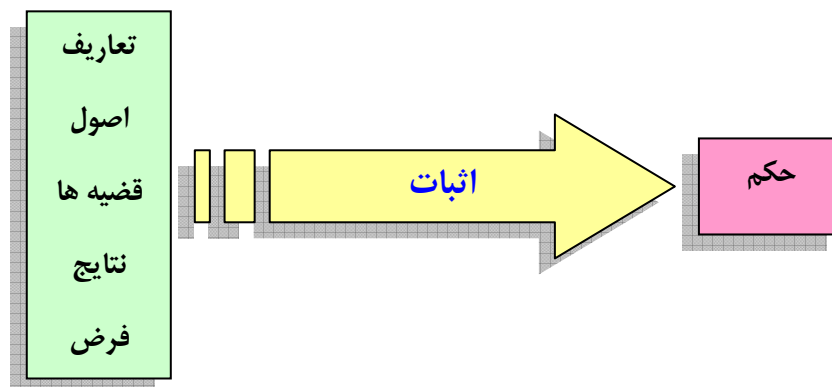


درس اول : استدلال ریاضی

نقش استدلال در زندگی برای همه ما ، انکار ناپذیر است. بارها مشاهده کردیم که برای تعامل بین همدیگر به استدلال روی می آوریم. بدیهی است که توسعه‌ی دانش در تمامی زمینه ها ، بدون بکارگیری ابزار استدلال ممکن نیست. استدلال در ریاضیات نیز مانند سایر علوم، جایگاه ویژه ای دارد. واضح است که درک و فهم ریاضی بدون استدلال امکان پذیر نیست و آموزش ریاضیات را محدود به حفظ کردن رویه ها و الگوریتم ها خواهد کرد. آشنایی با روش های استدلال و اثبات در ریاضیات، هم به فهم ریاضیات و هم بسط و توسعه‌ی آن کمک شایانی می نماید. در این درس با برخی از روش های استدلال و اثبات در ریاضی می پردازیم.

استدلال و اثبات در ریاضیات :

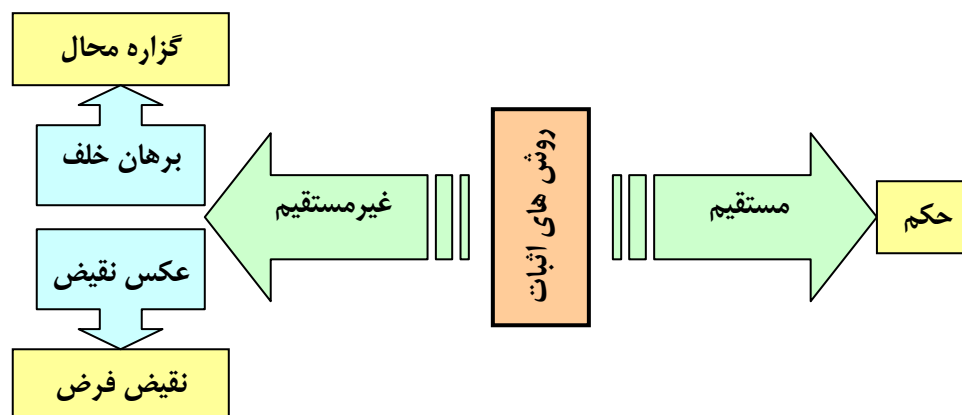
عمل ارائه‌ی دلیل برای اثبات درستی یک گزاره را **استدلال** می نامند. اثبات در ریاضیات ، به دنباله ای منطقی از استدلال هایی گفته می شود که با یک مجموعه از داده های معین و مشخص (مانند اصول موضوعه، تعاریف ، مفروضات و نتایج ثابت شده‌ی قبلی) شروع می شود و با استفاده از مراحل منطقی به یک نتیجه‌ی معتبر می رسد.



برای اثبات گزاره ها در ریاضی معمولاً از دو طریق اثبات **مستقیم** و **غیرمستقیم** استفاده می کنیم. در روش اثبات مستقیم معمولاً گزاره به صورت یک گزاره‌ی شرطی دارای فرض و حکم است که با استفاده از

مفاهیم و قضایایی که قبلاً ثابت یا پذیرفته شده اند و با توجه به شرط مسئله که فرض است، به اثبات درستی حکم می پردازیم.

در روش غیرمستقیم، کار را با نقیض حکم شروع می کنیم. سپس به انجام روابط منطقی به گزاره محال و یا به نقیض فرض خواهیم رسید. در حالتی که در پایان، گزاره‌ی محال بدست آید، اثبات را **برهان خلف** و در حالتی که در پایان به نقیض فرض رسیده باشیم، اثبات را **عکس نقیض** می نامند.



واضح است که فقط گزاره های درست را می توان اثبات کرد. گاهی اوقات یک گزاره، نادرست است که برای نشان دادن نادرستی آن، یک **مثال نقض** ارائه می کنیم. مثال نقض، مثالی است که نشان می دهد، یک گزاره‌ی کلی نادرست است.

در ادامه چند مثال برای اثبات های مستقیم و غیر مستقیم و همچنین مثال نقض ارائه می کنیم.

الف: اثبات مستقیم

مثال: درستی گزاره‌ی زیر را ثابت کنید.

مجموع هر سه عدد طبیعی متوالی بر ۳ بخش پذیر است.

اثبات: کافی است، سه عدد طبیعی را با n و $n+1$ و $n+2$ نمایش دهیم. در این صورت داریم:

$$n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(\underbrace{n+1}_{k \in \mathbb{Z}}) = 3k$$

لذا مجموع هر سه عدد طبیعی متوالی بر ۳ بخش پذیر است.^۱

^۱ اگر k یک عدد صحیح باشد. در این صورت $3k$ بر ۳ بخش پذیر است. همچنین اگر n نیز عدد طبیعی باشد، عدد nk بر n بخش پذیر می باشد. در این صورت می توان اضافه کرد که عدد $2k$ همواره زوج و عدد $2k + 1$ یا $2k - 1$ فرد است.

مثال: ثابت کنید که حاصل ضرب چهار عدد متوالی طبیعی بعلاوه‌ی یک، عددی مربع کامل است.

اثبات: اگر n یک عدد طبیعی باشد. در این صورت می‌توان نوشت:

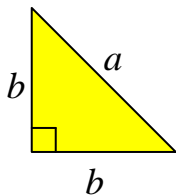
$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = \underbrace{(n^2+3n)}_{k \in \mathbb{Z}} \underbrace{(n^2+3n+2)}_{k \in \mathbb{Z}} + 1$$

$$= k(k+2)+1 = k^2+2k+1 = (k+1)^2 \quad \text{مربع کامل}$$

ب: اثبات غیر مستقیم

مثال: ثابت کنید که مثلث قائم الزاویه‌ی متساوی الساقین که اضلاع آن عدد صحیح باشند، وجود ندارد.

اثبات: گیریم که چنین مثلثی وجود داشته باشد (فرض خلف). پس:

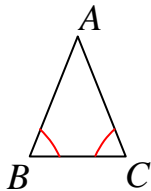


$$b^2 + b^2 = a^2 \rightarrow 2b^2 = a^2 \rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2 \rightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{2}$$

و چون a و b دو عدد صحیح می‌باشند لذا $\frac{a}{b}$ یک عدد گویا است و نمی‌تواند با عدد گنگ $\sqrt{2}$ مساوی

باشد. پس فرض خلف باطل است. (برهان خلف)

مثال: ثابت کنید که، اگر در مثلث ABC ، $AB \neq AC$ آنگاه $\angle B \neq \angle C$



اثبات: (به روش برهان خلف) فرض کنیم که $\angle B = \angle C$ باشد. یعنی مثلث ABC

دو زاویه‌ی مساوی دارد. بنابراین مثلث متساوی الساقین است. لذا $AB = AC$ و این

خلاف فرض می‌باشد و نمی‌تواند درست باشد.

ج: مثال نقض

مثال: با ارائه‌ی یک مثال نقض، نشان دهید که گزاره‌ی زیر نادرست است.

عدد $2^{2^n} + 1$ به ازای همه‌ی عددهای طبیعی n ، عددی اول است.

حل: برای رد درستی این گزاره، کافی است، مقدار n را برابر ۵ قرار دهیم. در این صورت داریم:

$$2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4294967297$$

و چون حاصل به صورت 641×6700417 تجزیه می‌شود، پس عدد اول نیست.

توجه داشته باشید که همینطور که گاهی اثبات مستقیم یا غیر مستقیم یک گزاره ممکن است پیچیده باشد، یافتن یک مثال نقض، گاهی دشوار است. طوری که گاهی با گذشت زمان بسیار، یک مثال نقض برای یک گزاره پیدا می شود.

تمرین ۱: درستی هر یک از گزاره های زیر را اثبات و یا با ارائه ی مثال نقض رد کنید.

الف: مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.

حل: این گزاره صحیح است و به صورت زیر اثبات می شود.

اگر x و y دو عدد فرد باشند، در این صورت وجود دارد دو عدد صحیح مانند m و n طوری که:

$$\left. \begin{array}{l} x = 2m + 1 \\ y = 2n + 1 \end{array} \right\} \rightarrow x + y = (2m + 1) + (2n + 1) = 2m + 2n + 2 = 2(m + n + 1) = 2k$$

$k \in \mathbb{Z}$

یعنی $x + y$ زوج است.

ب: برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم $\sqrt{x + y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

حل: طبق مثال نقض زیر، این گزاره نادرست است. اگر قرار دهیم، $y = 16$ و $x = 9$ در این صورت:

$$\sqrt{x + y} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$$

و این یعنی $\sqrt{x + y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$

پ: برای هر عدد طبیعی بزرگتر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است.

حل: اگر $n = 4$ آنگاه $2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$ که عدد اول نیست. بنابراین، این گزاره نادرست است.

ت: مجموع هر دو عدد گویا، عددی گویا است.

حل: این گزاره درست است. برای اثبات آن فرض می کنیم که d و c و b و a اعداد صحیح بوده و d و b

غیر صفر باشند. بنابراین: $x = \frac{a}{b}$ و $y = \frac{c}{d}$ عدد گویا می باشند. پس:

$$x + y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

حال چون $ad + bc$ عددی صحیح و bd غیر صفر است، پس $x + y$ عددی گویا است.

ث: اگر برای هر سه مجموعه‌ی A و B و C داشته باشیم، $A \cup B = A \cup C$ آنگاه $B = C$

حل: این گزاره نادرست است. زیرا اگر $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{2, 4\}$ و $C = \{4\}$

آنگاه $A \cup B = A \cup C = \{1, 2, 3, 4\}$ ولی $B \neq C$

ج: اگر k حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه $4k + 1$ مربع کامل است.

حل: این گزاره صحیح است. برای اثبات آن کافی است $k = n(n + 1)$ (که در آن $n \in \mathbb{N}$) در نظر گرفته

شود. بنابراین:

$$4k + 1 = 4n(n + 1) + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n + 1)^2 \quad \text{مربع کامل}$$

چ: اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، ثابت کنید $a^2 + b^2$ زوج است.

حل: این گزاره درست است. برای اثبات درستی آن بدین شکل استدلال می‌کنیم.

چون ab فرد است، پس a و b هر دو باید فرد باشند. (اگر چنین نباشد، حاصل ضرب زوج می‌شود.) بنابر این

اگر m و n دو عدد صحیح باشند. می‌توان نوشت:

$$a = 2n - 1 \quad \text{و} \quad b = 2m - 1$$

اکنون داریم:

$$a^2 + b^2 = (2n - 1)^2 + (2m - 1)^2 = 4n^2 - 4n + 1 + 4m^2 - 4m + 1$$

$$= 2(2n^2 - 2n + 2m^2 - 2m + 1) = 2k \quad \text{عدد زوج}$$

آشنایی با چند روش مهم اثبات

در مطلب قبل دو طریق اصلی اثبات گزاره های درست را بیان کردیم و آنها را به دو دسته کلی مستقیم و غیر مستقیم دسته بندی کردیم. در ادامه چند روش مهم از این دو طریق را اشاره می کنیم.

الف : روش اشباع (بررسی تمام حالت ها)

گاهی برای اثبات درستی یک گزاره، لازم است، همه ی موارد ممکن در مورد آن را در نظر بگیریم و نشان دهیم که حکم در همه ی حالات ممکن برقرار است.

مثال : ثابت کنید که حاصل ضرب هر دو عدد صحیح متوالی بخش پذیر بر ۲ است.

حل : اگر x و y دو عدد صحیح متوالی باشند. در این صورت دو حالت زیر وجود دارد.

حالت اول : اگر x زوج باشد. لذا xy زوج خواهد شد و لذا حکم درست است.

حالت دوم : اگر x فرد باشد. پس عدد بعد از آن یعنی y زوج می شود. لذا xy زوج خواهد شد و لذا در این حالت نیز حکم درست است.

مثال : ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n ، حاصل عبارت $n^2 - 5n + 7$ عددی فرد است.

اثبات : بنابر اینکه n عددی طبیعی است، لذا می تواند فرد و می تواند زوج باشد. نشان می دهیم که حکم، در این دو حالت برقرار است.

حالت اول : اگر n فرد باشد، در این صورت وجود دارد عدد طبیعی k طوری که $n = 2k - 1$ پس :

$$n^2 - 5n + 7 = (2k - 1)^2 - 5(2k - 1) + 7 = 4k^2 - 4k + 1 - 10k + 5 + 7$$

$$= 4k^2 - 14k + 13 = 4k^2 - 14k + 12 + 1 = 2(2k^2 - 7k + 6) + 1 = 2k' + 1$$

یعنی حاصل عددی فرد است.

حالت دوم : اگر n زوج باشد، در این صورت وجود دارد عدد طبیعی k طوری که $n = 2k$ پس :

$$n^2 - 5n + 7 = (2k)^2 - 5(2k) + 7 = 4k^2 - 10k + 7$$

$$= 4k^2 - 10k + 6 + 1 = 2(2k^2 - 5k + 3) + 1 = 2k'' + 1$$

یعنی حاصل عددی فرد است.

مثال : ثابت کنید که حاصل ضرب هر سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش پذیر است.

اثبات : اگر n یک عدد طبیعی باشد. در این صورت $n + 2$ و $n + 1$ و n متوالی هستند. در اینجا کافی است، نشان دهیم که حاصل ضرب این سه عدد، هم بر ۲ و هم بر ۳ بخش پذیر است. اکنون حالت های مختلف را بررسی می کنیم.

حالت اول : اگر n زوج باشد، لذا $n(n + 1)(n + 2)$ زوج بوده و پس بر ۲ بخش پذیر است.

حالت دوم : اگر n فرد باشد، واضح است که در این صورت $n + 1$ زوج است و لذا $n(n + 1)(n + 2)$ زوج بوده و پس بر ۲ بخش پذیر است.

از این دو حالت می توان نتیجه گرفت که در هر حالت $n(n + 1)(n + 2)$ بر ۲ بخش پذیر است.

حالت اول : اگر n بر ۳ بخش پذیر باشد، لذا $n(n + 1)(n + 2)$ بر ۳ بخش پذیر است.

حالت دوم : اگر n بر ۳ بخش پذیر نباشد، واضح است که در این صورت $n + 2$ یا $n + 1$ بر ۳ بخش پذیر خواهند بود. لذا $n(n + 1)(n + 2)$ نیز بر ۳ بخش پذیر است.

از این دو حالت نیز می توان نتیجه گرفت که در هر حالت $n(n + 1)(n + 2)$ بر ۳ بخش پذیر است.

مثال : ثابت کنید که اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab = 0$ آنگاه $a = 0$ یا $b = 0$

اثبات : در این مسئله کافی است نشان دهیم که حداقل یکی از دو عامل b یا a صفر می باشند. بنابراین این دو حالت زیر را می توان در نظر گرفت:

حالت اول : اگر a صفر باشد، بنابر ترکیب فصلی دو گزاره، حکم برقرار است. (حتی اگر b صفر نباشد.)

حالت دوم : اگر a صفر نباشد. نشان می دهیم در این حالت b باید صفر باشد. برای این کار به شکل زیر عمل می کنیم.

اگر a صفر نباشد، پس معکوس پذیر است و معکوس آن یعنی $\frac{1}{a}$ نیز غیر صفر است. اکنون دو طرف تساوی

$$ab = 0 \text{ را در } \frac{1}{a} \text{ ضرب می کنیم.}$$

$$\frac{1}{a} \times (ab) = \frac{1}{a} \times (0) \rightarrow \left(\frac{1}{a} \times a\right)b = 0 \rightarrow b = 0$$

در این حالت نیز حکم برقرار است.

مثال: نشان دهید که حاصل عبارت زیر فقط به ازای $n = 3$ و $n = 4$ از مجموعه $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ زوج می شود.

$$P = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

حل: کافی است به ازای تمام اعضای مجموعه S حاصل عبارت فوق را به دست آوریم. (بررسی تمام حالتها)

$$n = 1 \rightarrow P = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{(1)^2(2)^2}{4} = \frac{1 \times 4}{4} = 1 \quad \text{عدد فرد}$$

$$n = 2 \rightarrow P = \frac{2^2(2+1)^2}{4} = \frac{(2)^2(3)^2}{4} = \frac{4 \times 9}{4} = 9 \quad \text{عدد فرد}$$

$$n = 3 \rightarrow P = \frac{3^2(3+1)^2}{4} = \frac{(3)^2(4)^2}{4} = \frac{9 \times 16}{4} = 36 \quad \text{عدد زوج}$$

$$n = 4 \rightarrow P = \frac{4^2(4+1)^2}{4} = \frac{(4)^2(5)^2}{4} = \frac{16 \times 25}{4} = 100 \quad \text{عدد زوج}$$

$$n = 5 \rightarrow P = \frac{5^2(5+1)^2}{4} = \frac{(5)^2(6)^2}{4} = \frac{25 \times 36}{4} = 225 \quad \text{عدد فرد}$$

$$n = 6 \rightarrow P = \frac{6^2(6+1)^2}{4} = \frac{(6)^2(7)^2}{4} = \frac{36 \times 49}{4} = 441 \quad \text{عدد فرد}$$

لذا عبارت داده شده فقط به ازای $n = 3$ و $n = 4$ زوج می شود.

ب: برهان خلف

در روش برهان خلف، فرض می کنیم که حکم نادرست باشد و لذا خلاف آن را تحت عنوان فرض خلف می پذیریم. سپس با استفاده از قوانین منطق گزاره ها و دنباله ای از استدلالهای درست و مبتنی بر این فرض به یک نتیجهی غیر ممکن یا نتیجهی متضاد با فرض می رسیم و از آنجا معلوم می شود که فرض نادرست بودن حکم (فرض خلف) باطل است و درستی حکم ثابت می گردد.²

² در اینجا تفاوت های، اثبات های برهان خلف و عکس نقیض را مورد توجه قرار نمی دهیم.

مثال: اگر x یک عدد گنگ باشد، ثابت کنید $\frac{1}{x}$ نیز گنگ است.

اثبات: گیریم که $\frac{1}{x}$ عددی گویا باشد. چون می دانیم وارون هر عدد گویای ناصفر، عددی گویا است، پس

وارون $\frac{1}{x}$ یعنی x نیز گویا است که با فرض سؤال تناقض دارد، پس $\frac{1}{x}$ عددی گنگ است.

مثال: اگر f در $x = a$ پیوسته ولی g در $x = a$ ناپیوسته باشد، ثابت کنید $f + g$ در $x = a$ ناپیوسته است.

اثبات: گیریم $f + g$ در $x = a$ پیوسته باشد. از طرفی می دانیم که تفریق دو تابع پیوسته، پیوسته است، حال چون $f + g$ و f پیوسته اند، پس $(f + g) - f = g$ در $x = a$ پیوسته است که با فرض مسئله تناقض دارد، پس $f + g$ در $x = a$ ناپیوسته است.

مثال: اگر a_1 و a_2 و a_3 سه عدد صحیح باشند و b_1 و b_2 و b_3 همان اعداد ولی به ترتیب دیگری باشند. ثابت کنید $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ عددی زوج است.

اثبات: فرض کنیم که $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ زوج نباشد. پس عددی فرد است. لذا هر سه عامل آن یعنی $a_1 - b_1$ و $a_2 - b_2$ و $a_3 - b_3$ هم باید فرد باشند (چرا؟³) و در نتیجه مجموع آنها باید عددی فرد باشد. یعنی $(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3)$ باید عددی فرد باشد. اما مجموع این سه عدد صفر است و تناقض می باشد. پس فرض خلف باطل است و حکم درست است.

مثال: ثابت کنید که حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

اثبات: فرض کنیم که r یک عدد گویا و x یک عدد گنگ باشد. نشان می دهیم که $r + x$ یک عدد گنگ است. اگر $r + x$ گنگ نباشد. بنابراین عددی گویا است. از طرفی می دانیم که تفاضل دو عدد گویا، عددی گویا است. پس تفاضل $r + x$ و r باید عددی گویا باشد، یعنی $(r + x) - r \in Q$ و از آنجا $x \in Q$ که با فرض مسئله تناقض دارد. در نتیجه فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

³ . زیرا حاصل ضرب سه عددی وقتی زوج است که حداقل یکی از آنها زوج باشد. در اینجا چون حاصل ضرب سه عدد فرد

شده است، پس باید هر سه فرد باشند.

مثال : ثابت کنید که حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

اثبات : فرض کنیم r یک عدد گویای ناصفر و x عددی گنگ باشد ولی rx عددی گویا (فرض خلف)

باشد. می دانیم که حاصل ضرب هر دو گویا، عددی گویا است. علاوه بر این معکوس هر عدد گویای ناصفر

عددی گویاست. بنابراین $(\frac{1}{r})(rx) \in Q$ و از آنجا $x \in Q$ که با فرض در تناقض است.

د : گزاره های هم ارز

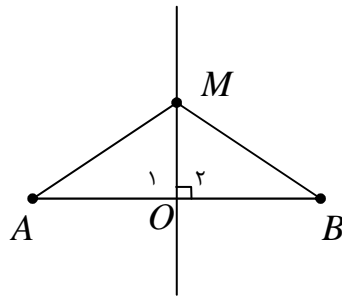
می دانیم که اگر ارزش دو گزاره یکسان باشد، آنها را گزاره های هم ارز (هم ارزش) می نامند. حال اگر دو

گزاره P و Q هم ارز (هر دو درست یا هر دو نادرست) باشند، آنگاه گزاره $P \Leftrightarrow Q$ درست می باشد.

برعکس اگر گزاره $P \Leftrightarrow Q$ درست باشد، نتیجه می شود که دو گزاره P و Q هم ارز هستند. حال با

فرض درست بودن $P \Leftrightarrow Q$ اگر ارزش یکی از این دو گزاره را بدانیم، ارزش گزاره دیگر نیز معلوم می شود.

نتیجه : دو گزاره P و Q را هم ارز گویند، هرگاه از P می توان Q و از Q می توان P را نتیجه گرفت.



مثال : نشان دهید که دو گزاره ی زیر هم ارز هستند.

(۱) نقطه ی M روی عمود منصف پاره خط AB قرار دارد.

(۲) فاصله ی نقطه ی M از دو سر پاره خط AB یکسان است.

اثبات :

حالت اول: گزاره ی (الف) گزاره ی (ب) را نتیجه می دهد.

$$\left. \begin{array}{l} OM = OM \\ \angle O_1 = \angle O_2 = 90^\circ \\ AO = BO \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ض ض)}} \Delta(AOM) \cong \Delta(BOM) \rightarrow AM = BM$$

حالت دوم : گزاره ی (ب) گزاره ی (الف) را نتیجه می دهد.

از نقطه ی M خطی رسم می کنیم که از وسط پاره خط AB بگذرد. در این صورت:

$$\left. \begin{array}{l} OM = OM \\ AO = BO \\ AM = BM \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ض ض ض)}} \Delta(AOM) \cong \Delta(BOM) \rightarrow \angle O_1 = \angle O_2$$

و چون $\angle O_1 + \angle O_2 = 180^\circ$ پس $\angle O_1 = \angle O_2 = 90^\circ$ لذا خط MO هم بر AB عمود است و هم

از وسط آن می گذرد، پس عمود منصف AB است.

مثال: اگر n یک عدد طبیعی باشد، نشان دهید که زوج بودن n و زوج بودن n^2 هم ارز هستند.

اثبات: گیریم که n زوج باشد، نشان می دهیم که n^2 زوج است. چون n زوج است. پس وجود دارد عدد

طبیعی k طوری که $n = 2k$

$$n = 2k \rightarrow n^2 = (2k)^2 \rightarrow n^2 = 4k^2 \rightarrow n^2 = 2(2k^2) = 2k'$$

اکنون فرض می کنیم که n^2 زوج است و نشان می دهیم n نیز زوج است. در اینجا از برهان خلف کمک می گیریم.

گیریم که n زوج نباشد، پس n عددی فرد خواهد بود. یعنی وجود دارد عدد طبیعی k طوری که

$n = 2k - 1$. لذا :

$$n = 2k - 1 \rightarrow n^2 = (2k - 1)^2 \rightarrow n^2 = 4k^2 - 4k + 1 \rightarrow n^2 = 2(2k^2 - 2k) + 1$$

$$\rightarrow n^2 = 2k' + 1$$

یعنی n^2 فرد است و این با زوج بودن n^2 تناقض دارد. پس باید n زوج باشد.

مثال: چون از تساوی $a = b$ می توان نتیجه گرفت که $a^3 = b^3$ ، همچنین از تساوی $a^3 = b^3$ می

توان نتیجه گرفت $a = b$. لذا دو گزاره‌ی $a = b$ و $a^3 = b^3$ هم ارز هستند و گزاره‌ی مرکب زیر درست است.

$$a = b \Leftrightarrow a^3 = b^3$$

مثال: چون از تساوی $a = b$ می توان نتیجه گرفت که $a^2 = b^2$ ، ولی از تساوی $a^2 = b^2$ نمی توان

نتیجه گرفت $a = b$. پس دو گزاره‌ی $a = b$ و $a^2 = b^2$ هم ارز نیستند.

مثال: کدام یک از ترکیب های دوشروطی زیر درست است؟

الف) $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$

ب) $a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3$

حل:

الف: گزاره نادرست است. زیرا از $2 < 3$ - نتیجه می شود که $4 < 9$ و این نامساوی نادرست است.

ب: گزاره درست است. زیرا هر یک از نامساوی ها را می توان از دیگری نتیجه گرفت.

ج : روش بازگشتی

گاهی برای اثبات درستی گزاره ها بهتر است که حکم را به کمک عملیات درست تغییر داده تا به یک رابطه‌ی بدیهی (همیشه درست) برسیم. سپس برای تکمیل اثبات باید نشان داد که تمام مراحل انجام شده بازگشت پذیر هستند، در غیر این صورت درستی اثبات تأیید نمی شود. در واقع اثبات بازگشتی زمانی معتبر است که کلیه‌ی مراحل برای رسیدن از حکم به یک نتیجه‌ی درست از لحاظ منطقی، برگشت پذیر باشند.

در واقع در این روش اثبات که به اثبات بازگشتی موسوم است، نشان می دهیم که ترکیب دو شرطی درست تشکیل می شود و چون یک گزاره‌ی این ترکیب درست (بدیهی) است. پس دیگری نیز درست است.

مثال : ثابت کنید که میانگین حسابی دو عدد حقیقی و مثبت بیشتر یا مساوی میانگین هندسی آنها است.

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \text{ یعنی اگر } x \text{ و } y \text{ دو عدد حقیقی و مثبت باشند، آنگاه}$$

اثبات : به روش بازگشتی

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \leftrightarrow x+y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$\longleftrightarrow (x+y)^2 \geq (2\sqrt{xy})^2 \leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy$$

$$\leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 - 4xy \geq 0 \leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$$

$$\leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0 \text{ بدیهی است.}$$

رابطه‌ی به دست آمده بدیهی (همواره درست) است. چون تمام مراحل قابل بازگشت هستند، لذا حکم درست است.

$$\text{مثال : اگر } a > 0 \text{ ثابت کنید که } a + \frac{1}{a} \geq 2$$

اثبات : روش بازگشتی

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \xrightarrow{\times a} a^2 + 1 \geq 2a \leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0 \leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0 \text{ بدیهی است}$$

رابطه‌ی به دست آمده بدیهی (همواره درست) است. چون تمام مراحل قابل بازگشت هستند، لذا حکم درست است.

مثال: اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید:

$$a^2 + ab + b^2 \geq 0$$

اثبات: روش بازگشتی

$$a^2 + ab + b^2 \geq 0 \xrightarrow{\times 2} 2a^2 + 2ab + 2b^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 + a^2 + b^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2 + a^2 + b^2 \geq 0 \text{ بدیهی است.}$$

رابطه‌ی به دست آمده بدیهی (همواره درست) است. چون تمام مراحل قابل بازگشت هستند، لذا حکم درست است.

مثال: برای هر دو عدد حقیقی x و y ، ثابت کنید:

$$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$$

اثبات: به روش بازگشتی

$$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y \xrightarrow{\times 2} 2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2xy + 2x + 2y$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0 \text{ بدیهی است.}$$

رابطه‌ی به دست آمده بدیهی (همواره درست) است. چون تمام مراحل قابل بازگشت هستند، لذا حکم درست است.

مثال: اگر x و y و z سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید.

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$$

اثبات: به روش بازگشتی

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2xz$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2xz + z^2 + y^2 - 2yz + z^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 \geq 0$$

رابطه‌ی به دست آمده بدیهی (همواره درست) است. چون تمام مراحل قابل بازگشت هستند، لذا حکم درست است.

مثال: اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $a + b > 0$ ، ثابت کنید. $\frac{a^3 + b^3}{a + b} \geq ab$

اثبات: به روش بازگشتی

$$\begin{aligned} \frac{a^3 + b^3}{a + b} \geq ab &\leftrightarrow a^3 + b^3 \geq ab(a + b) \\ &\leftrightarrow (a + b)(a^2 - ab + b^2) \geq ab(a + b) \leftrightarrow a^2 - ab + b^2 \geq ab \\ &\leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

رابطه‌ی به دست آمده بدیهی (همواره درست) است. چون تمام مراحل قابل بازگشت هستند، لذا حکم درست است.

تمرین برای حل:

۲: گزاره‌های زیر را اثبات یا با یک مثال نقض رد کنید.

الف: مربع و مکعب هر عدد فرد، عددی فرد است.

ب: حاصل عبارت $p = x^2 + x + 41$ به ازاء اعداد طبیعی همواره یک عدد اول است.

پ: میانگین، پنج عدد طبیعی متوالی، برابر عدد وسطی است.

ت: اگر m و n دو عدد صحیح فرد باشند، آنگاه $m^2 - n^2$ بر ۸ بخش پذیر است.

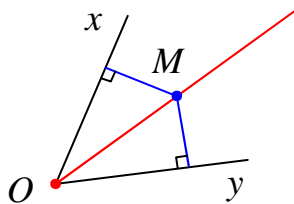
ث: اگر α یک عدد گنگ باشد، آنگاه $\alpha^2 + \alpha$ نیز گنگ است.

۳: با بررسی حالت‌های مختلف نشان دهید که اندازه‌ی هر زاویه‌ی محاطی، نصف کمان روبروی آن است.

۴: عددی حقیقی مانند x ارائه کنید به طوری که $x^3 < x^2$

۵: آیا اعدادی صحیح مانند y و x وجود دارند که $x^2 + y^2 = (x + y)^2$ ؟ اگر وجود دارد، یک نمونه

ذکر کنید.



۶: ثابت کنید که دو گزاره‌ی زیر هم‌ارز هستند.

الف: نقطه‌ی M روی نیمساز زاویه‌ی xOy قرار دارد.

ب: نقطه‌ی M از دو ضلع زاویه‌ی xOy به یک فاصله است.

۷: آیا مقادیر حقیقی و ناصفر a و b وجود دارند که

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad (a+b \neq 0)$$

۸: ثابت کنید که مجموع هر عدد گویای مثبت و معکوس آن حداقل برابر ۲ است.

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \quad \text{یعنی اگر } a, b > 0 \text{ آنگاه}$$

۹: اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید.

$$x^2 + y^2 \geq 2(x + y - 1)$$

۱۰: اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید.

$$y^2 + 1 \geq 2x(y - x + 1)$$

درس سوم: همنهشتی در اعداد صحیح و کاربرد آن

در این درس به بررسی مفهوم همنهشتی در اعداد صحیح می پردازیم و به دنبال آن ویژگی های همنهشتی را بررسی می کنیم. در نهایت کاربردهایی از آن را بیان خواهیم کرد.

همنهشتی در اعداد صحیح

فرض کنیم که m یک عدد طبیعی باشد، دو عدد صحیح a و b را به پیمانه m همنهشت گویند و می

$$\text{نویسند } a \equiv b \pmod{m}, \text{ هرگاه } m \mid a - b$$

$$\text{مثال: چون } 18 - 4 = 14 \text{ پس } 18 \equiv 4 \pmod{7}$$

نتیجه: اگر m یک عدد طبیعی باشد، دو عدد صحیح a و b را به پیمانه m همنهشت گویند، هرگاه در تقسیم بر m هم باقی مانده باشند. در این صورت می نویسند.

$$a \equiv b \pmod{m} \text{ یا } a \equiv b \pmod{m}$$

و می خوانند « a همنهشت با b به پیمانه m » یا « a همنهشت با b به سنج m »

$$\text{مثال: دو عدد } 16 \text{ و } 9 \text{ به پیمانه } 7 \text{ هم باقی مانده اند. پس } 16 \equiv 9 \pmod{7}$$

$$\begin{array}{r|l} 9 & 7 \\ \hline 7 & 1 \\ \hline & 2 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 16 & 7 \\ \hline 14 & 2 \\ \hline & 2 \end{array}$$

تمرین ۱: نشان دهید که 13 و 17 به پیمانه 3 همنهشت هستند.

تمرین ۲: نشان دهید که 33 و 18 به پیمانه 5 همنهشت هستند.

مثال:

$$\text{الف: چون } 18 - 3 = 15 \text{ پس } 18 \equiv 3 \pmod{5} \quad \text{ب: چون } -11 - 1 = -12 \text{ پس } -11 \equiv 1 \pmod{6}$$

$$\text{ج: چون } 5 + 295 = 300 \text{ پس } 5 \equiv -295 \pmod{10} \quad \text{د: چون } 23 + 7 = 30 \text{ پس } 23 \equiv -7 \pmod{3}$$

تمرین ۳: نشان دهید که ۳۳ و ۱۸ به پیمانه‌ی ۵ همزهشت هستند.

تمرین ۴: ثابت کنید که اگر $a + b \equiv c \pmod{m}$ آنگاه $a \equiv c - b \pmod{m}$

حل:

$$a + b \equiv c \pmod{m} \rightarrow m \mid (a + b) - c \rightarrow m \mid a + (b - c) \rightarrow m \mid a - (c - b) \rightarrow a \equiv c - b \pmod{m}$$

مثلاً:

$$\overset{10}{23} \equiv \overset{10}{33} \rightarrow \overset{10}{20} + \overset{10}{3} \equiv \overset{10}{33} \rightarrow \overset{10}{20} \equiv \overset{10}{33} - \overset{10}{3} \rightarrow \overset{10}{20} \equiv \overset{10}{30}$$

نتیجه: از تمرین فوق نتیجه گرفته می‌شود که می‌توان یک عدد صحیح را از یک طرف رابطه‌ی

همزهستی به طرف دیگر منتقل کرد، به شرط اینکه قرینه شود.

$$\overset{5}{23} \equiv \overset{5}{18} \rightarrow \overset{5}{(30 + 3)} \equiv \overset{5}{18} \rightarrow \overset{5}{30} \equiv \overset{5}{(18 - 3)} \rightarrow \overset{5}{30} \equiv \overset{5}{15}$$

تمرین ۵: اگر $a \equiv b \pmod{m}$ و $n \mid m$ ثابت کنید که $a \equiv b \pmod{n}$

اثبات:

$$a \equiv b \pmod{m} \rightarrow m \mid a - b \xrightarrow{n \mid m} n \mid a - b \rightarrow a \equiv b \pmod{n}$$

مثلاً: چون $\overset{10}{23} \equiv \overset{10}{33}$ و $\overset{5}{5} \mid \overset{10}{10}$ پس $\overset{5}{23} \equiv \overset{5}{33}$

ویژگی های همزهستی اعداد صحیح

اگر m و n اعداد طبیعی و a و b و c و d اعداد صحیح دلخواهی باشند، آنگاه

۱) $a \equiv a \pmod{m}$

اثبات:

$$m \mid \cdot \rightarrow m \mid a - a \rightarrow a \equiv a \pmod{m}$$

.....

$$۲) a \equiv b \xrightarrow{m} b \equiv a$$

اثبات:

$$a \equiv b \xrightarrow{m} m | a - b \rightarrow m | -(a - b) \rightarrow m | b - a \rightarrow b \equiv a$$

$$۳) \begin{cases} a \equiv b \xrightarrow{m} a \equiv c \\ b \equiv c \end{cases} \quad \text{خاصیت تراگذری}$$

اثبات:

$$\begin{cases} a \equiv b \xrightarrow{m} m | a - b \rightarrow m | (a - b) + (b - c) \rightarrow m | a - c \rightarrow a \equiv c \\ b \equiv c \xrightarrow{m} m | b - c \end{cases}$$

$$۴) a \equiv b \xrightarrow{c \in \mathbb{Z}} a + c \equiv b + c$$

اثبات:

$$a \equiv b \xrightarrow{m} m | a - b \rightarrow m | a - b + c - c \rightarrow m | (a + c) - (b + c) \rightarrow a + c \equiv b + c$$

$$۵) a \equiv b \xrightarrow{c \in \mathbb{Z}} ac \equiv bc$$

اثبات:

$$a \equiv b \xrightarrow{m} m | a - b \rightarrow m | c(a - b) \rightarrow m | ac - bc \rightarrow ac \equiv bc$$

$$۶) \begin{cases} a \equiv b \xrightarrow{m} a + c \equiv b + d \\ c \equiv d \end{cases}$$

اثبات:

$$\begin{cases} a \equiv b \xrightarrow{m} m | a - b \rightarrow m | (a - b) + (c - d) \\ c \equiv d \xrightarrow{m} m | c - d \end{cases}$$

$$\rightarrow m \mid (a+c) - (b+d) \rightarrow a+c \equiv b+d \pmod{m}$$

$$v) \begin{cases} a \equiv b \pmod{m} \\ c \equiv d \pmod{m} \end{cases} \rightarrow ac \equiv bd \pmod{m}$$

اثبات:

$$\begin{cases} a \equiv b \pmod{m} \xrightarrow{\times c} ac \equiv bc \pmod{m} \\ c \equiv d \pmod{m} \xrightarrow{\times b} bc \equiv bd \pmod{m} \end{cases} \rightarrow ac \equiv bd \pmod{m}$$

$$\lambda) a \equiv b \pmod{m} \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} a^n \equiv b^n \pmod{m}$$

اثبات:

$$a \equiv b \pmod{m} \rightarrow m \mid a-b \xrightarrow{(a-b) \mid (a^n - b^n)} m \mid a^n - b^n \rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}$$

روش دوم:

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv b \pmod{m} \\ a \equiv b \pmod{m} \\ a \equiv b \pmod{m} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a \equiv b \pmod{m} \end{array} \right\} \rightarrow \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_n \equiv \underbrace{b \times b \times b \times \dots \times b}_n \pmod{m} \rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}$$

$$9) a \equiv b \pmod{m} \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} na \equiv nb \pmod{m}$$

اثبات:

$$\begin{cases} a \equiv b \pmod{m} \\ n \equiv n \pmod{m} \end{cases} \rightarrow na \equiv nb \pmod{m}$$

$$10) a \equiv b \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} a \equiv b + mk$$

اثبات:

$$\begin{cases} a \equiv b \\ \circ \equiv mk \end{cases} \xrightarrow{m} a + \circ \equiv b + mk \xrightarrow{m} a \equiv b + mk$$

توجه: این ویژگی نشان می دهد که می توان به یک طرف رابطه ی همزهستی، مضربی از پیمانۀ را اضافه کرد. البته با توجه به تمرین بعد مشاهده می شود که این مضرب یا هر مضرب دیگر را می توان به دو طرف نیز اضافه نمود.

تمرین ۵: ثابت کنید که اگر $a \equiv b$ آنگاه $a + mk \equiv b + mk$

حل:

$$\begin{cases} a \equiv b \\ mk \equiv mk \end{cases} \xrightarrow{+} a + mk \equiv b + mk$$

مثال:

$$7 \equiv 2 \xrightarrow{5} 7 + 3(5) \equiv 2 + 11(5) \xrightarrow{5} 22 \equiv 57$$

توجه: علاوه بر ویژگی های فوق، ویژگی های دیگری برای هم نهستی می توان نوشت که در اینجا بدون اثبات آنها را بیان می کنیم و فقط به ذکر مثال اکتفا می کنیم.

الف) $\begin{cases} a \equiv b \\ a \equiv b \end{cases} \xrightarrow{[m,n]} a \equiv b$

مثال:

$$\begin{cases} 13 \equiv 25 \\ 13 \equiv 25 \end{cases} \xrightarrow{12} 13 \equiv 25$$

نتیجه:

$$\begin{cases} m \\ a \equiv b \\ n \\ a \equiv b \\ (m, n) = 1 \end{cases} \rightarrow a \equiv b \xrightarrow{[m, n] = mn} a \equiv b$$

مثال :

$$\begin{cases} 4 \\ 22 \equiv 42 \\ 5 \\ 22 \equiv 42 \end{cases} \rightarrow 20 \\ 22 \equiv 42$$

ب) $a \equiv b \xrightarrow{m} (a, m) = (b, m)$

مثال :

$$20 \\ 22 \equiv 42 \rightarrow (22, 20) = (42, 20) = 2$$

تمرین ۶: فرض کنیم، $a \equiv b$ و $b \equiv c$ و $(m, n) = d$ در این صورت ثابت کنید $a \equiv c$

اثبات :

$$\begin{cases} m \\ a \equiv b \xrightarrow{d|m} a \equiv b \\ n \\ b \equiv c \xrightarrow{d|n} b \equiv c \end{cases} \rightarrow a \equiv c$$

تمرین ۷: باقی مانده‌ی تقسیم 2^{1380} بر ۷ بدست آورید.

حل:

$$7 \\ 8 \equiv 1 \rightarrow 2^3 \equiv 1 \rightarrow (2^3)^{460} \equiv (1)^{460} \rightarrow 2^{1380} \equiv 1$$

تمرین ۸: باقی مانده‌ی تقسیم 2^{1385} بر ۹ بدست آورید.

حل:

$$9 \\ 8 \equiv -1 \rightarrow 2^3 \equiv -1 \rightarrow (2^3)^{461} \equiv (-1)^{461} \rightarrow 2^{1383} \equiv -1 \rightarrow 2^{1383} \times 2^2 \equiv -1 \times 2^2 \\ \rightarrow 2^{1385} \equiv -4 \xrightarrow{a \equiv b + mk} 2^{1385} \equiv -4 + 9(1) \rightarrow 2^{1385} \equiv 5$$

تمرین ۹: آخرین رقم سمت راست عدد 7^{10^3} را بدست آورید.

حل: باقی مانده‌ی تقسیم هر عدد طبیعی بر ۱۰ برابر آخرین رقم سمت راست آن است.

$$\begin{aligned} 49 &\equiv -1 \rightarrow 7^2 \equiv -1 \rightarrow (7^2)^{50} \equiv (-1)^{50} \rightarrow 7^{100} \equiv 1 \rightarrow 7^{100} \times 7^3 \equiv 1 \times 7^3 \\ &\rightarrow 7^{103} \equiv 7^3 \end{aligned}$$

تمرین ۱۰: باقی مانده‌ی تقسیم $3^{2000} + 2^{1380}$ بر ۷ بدست آورید.

حل: ابتدا باقی مانده‌های هر یک از این اعداد را جداگانه تعیین می‌کنیم.

$$8 \equiv 1 \rightarrow 2^3 \equiv 1 \rightarrow (2^3)^{460} \equiv (1)^{460} \rightarrow 2^{1380} \equiv 1$$

$$\begin{aligned} 27 &\equiv -1 \rightarrow 3^3 \equiv -1 \rightarrow (3^3)^{666} \equiv (-1)^{666} \rightarrow 3^{1998} \equiv 1 \rightarrow 3^{1998} \times 3^2 \equiv 1 \times 3^2 \\ &\rightarrow 3^{2000} \equiv 9 \xrightarrow{9 \equiv 2} 3^{2000} \equiv 2 \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} 2^{1380} \equiv 1 \\ 3^{2000} \equiv 2 \end{cases} \rightarrow 2^{1380} + 3^{2000} \equiv 1 + 2 \rightarrow 2^{1380} + 3^{2000} \equiv 3$$

تمرین ۱۱: باقی مانده‌ی تقسیم $8^{12} + 7^{12} + 6^{12} + 5^{12}$ بر ۱۳ بدست آورید.

حل: ابتدا باقی مانده‌های هر یک از این اعداد را جداگانه تعیین می‌کنیم.

$$25 \equiv -1 \rightarrow 5^2 \equiv -1 \rightarrow (5^2)^6 \equiv (-1)^6 \rightarrow 5^{12} \equiv 1$$

$$\begin{cases} 36 \equiv -3 \rightarrow 6^2 \equiv -3 \rightarrow (6^2)^6 \equiv (-3)^6 \rightarrow 6^{12} \equiv 3^6 \rightarrow 6^{12} \equiv 1 \\ 27 \equiv 1 \rightarrow 3^3 \equiv 1 \rightarrow (3^3)^2 \equiv (1)^2 \rightarrow 3^6 \equiv 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 49 \equiv 10 \rightarrow (7^2)^6 \equiv (10)^6 \rightarrow 7^{12} \equiv (10)^6 \\ 10 \equiv -3 \rightarrow (10)^6 \equiv (-3)^6 \rightarrow (10)^6 \equiv 3^6 \rightarrow 7^{12} \equiv 1 \\ 27 \equiv 1 \rightarrow 3^3 \equiv 1 \rightarrow (3^2)^3 \equiv (1^2)^3 \rightarrow 3^6 \equiv 1 \end{cases}$$

$$64 \equiv -1 \rightarrow 8^2 \equiv -1 \rightarrow (8^2)^6 \equiv (-1)^6 \rightarrow 8^{12} \equiv 1$$

$$\begin{cases} 5^{12} \equiv 1 \\ 6^{12} \equiv 1 \\ 7^{12} \equiv 1 \\ 8^{12} \equiv 1 \end{cases} \rightarrow (5^{12} + 6^{12} + 7^{12} + 8^{12})^{13} \equiv 1 + 1 + 1 + 1 \rightarrow (5^{12} + 6^{12} + 7^{12} + 8^{12})^{13} \equiv 4$$

روش دوم:

$$\begin{aligned} 5^{12} + 6^{12} + 7^{12} + 8^{12} &\equiv 5^{12} + 6^{12} + (-6)^{12} + (-5)^{12} \\ &\rightarrow 5^{12} + 6^{12} + 7^{12} + 8^{12} \equiv 5^{12} + 6^{12} + 6^{12} + 5^{12} \\ &\rightarrow 5^{12} + 6^{12} + 7^{12} + 8^{12} \equiv 2(5^{12} + 6^{12}) \\ &\xrightarrow{\rightarrow 5^{12} \equiv 1, \rightarrow 6^{12} \equiv 1} 5^{12} + 6^{12} + 7^{12} + 8^{12} \equiv 2(1+1) \rightarrow 5^{12} + 6^{12} + 7^{12} + 8^{12} \equiv 4 \end{aligned}$$

تمرین ۱۲: باقی مانده‌ی تقسیم $5^{17} + 6^{17} + 7^{17} + 8^{17}$ بر ۱۳ بدست آورید.

حل:

$$5^{17} + 6^{17} + 7^{17} + 8^{17} \equiv 5^{17} + 6^{17} + (-6)^{17} + (-5)^{17} \rightarrow 5^{17} + 6^{17} + 7^{17} + 8^{17} \equiv 0$$

تمرین ۱۳: دو رقم سمت راست عدد 7^{103} را بدست آورید.

حل: باقی مانده‌ی تقسیم هر عدد طبیعی بر ۱۰۰ برابر دو رقم سمت راست آن است.

$$49 \equiv -51 \rightarrow 7^2 \equiv -51 \rightarrow (7^2)^2 \equiv (-51)^2$$

$$\frac{(-51)^2 = 2601 \equiv 1}{\rightarrow 7^4 \equiv 1 \rightarrow (7^4)^{25} \equiv 1^{25}}$$

$$\rightarrow 7^{100} \equiv 1 \rightarrow 7^{100} \times 7^3 \equiv 1 \times 7^3 \xrightarrow{7^3 = 343 \equiv 43} 7^{103} \equiv 43$$

تمرین ۱۴: اگر $a + 8^9$ بر ۱۱ بخش پذیر باشد، آنگاه کوچکترین مقدار طبیعی برای a کدام است؟

$$7(4) \quad 4(3) \quad 3(2) \quad 2(1)$$

حل: ابتدا باقی مانده ی تقسیم عدد 8^9 بر ۱۱ را تعیین می کنیم.

$$8^9 \equiv -2 \rightarrow (8^2)^4 \equiv (-2)^4 \rightarrow 8^8 \equiv 16 \rightarrow 8^8 \times 8 \equiv 16 \times 8 \rightarrow 8^9 \equiv 128$$

$$\frac{128 \equiv 7}{8^9 \equiv 7}$$

$$8^9 \equiv 7 \rightarrow 8^9 + a \equiv 7 + a \xrightarrow{8^9 + a \equiv 0} 7 + a \equiv 0$$

$$7 + a \equiv 0 \rightarrow 7 + a = 0 + 11k \rightarrow a = -7 + 11k$$

حال برای تعیین کمترین مقدار طبیعی a لازم است. مقدار k را برابر ۱ قرار دهیم. در این صورت:

$$a = -7 + 11k \xrightarrow{k=1} a = 4$$

تمرین ۱۵: اگر $a \equiv 3^6$ و $a \equiv 5^8$. باقی مانده ی تقسیم a بر ۲۴ چند است؟

حل:

$$a \equiv 3^6 \rightarrow a - 3 = 6k_1 \rightarrow a = 3 + 6k_1 \xrightarrow{\times 4} 4a = 24k_1 + 12$$

$$a \equiv 5^8 \rightarrow a - 5 = 8k_2 \rightarrow a = 5 + 8k_2 \xrightarrow{\times 3} 3a = 24k_2 + 15$$

$$\rightarrow 4a - 3a = 24(k_1 - k_2) - 3 \rightarrow a = 24k - 3 \rightarrow a \equiv -3 \rightarrow a \equiv -3 + 1(24)$$

$$\rightarrow a \equiv 21$$

تمرین ۱۶: برای هر دو عدد صحیح a و b ثابت کنید که:

$$(a \pm b)^3 \equiv a^3 \pm b^3 \pmod{ab} \quad (\text{ب})$$

$$(a \pm b)^2 \equiv a^2 + b^2 \pmod{ab} \quad (\text{الف})$$

حل:

الف:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$\rightarrow (a \pm b)^2 \equiv a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$\rightarrow (a \pm b)^3 \equiv a^3 \pm b^3 \pm 2(ab) \rightarrow (a \pm b)^3 \equiv a^3 \pm b^3$$

ب :

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$\rightarrow (a \pm b)^3 \equiv a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$\rightarrow (a \pm b)^3 \equiv a^3 \pm b^3 + 3ab(b \pm a) \rightarrow (a \pm b)^3 \equiv a^3 \pm b^3$$

تمرین ۱۷ : باقی مانده‌ی تقسیم 37^{2n+1} بر ۸ را به ازای هر عدد طبیعی n به دست آورید.

حل :

$$37 \equiv 5 \rightarrow (37)^2 \equiv (5)^2 \xrightarrow{25 \equiv 1} (37)^2 \equiv 1 \rightarrow (37)^{2n} \equiv (1)^n$$

$$\rightarrow (37)^{2n} \times 37 \equiv 1 \times 37 \rightarrow (37)^{2n+1} \equiv 37 \xrightarrow{37 \equiv 5} (37)^{2n+1} \equiv 5$$

تمرین ۱۸ : نشان دهید به ازای هر عدد طبیعی n ، عدد $6^{n+2} + 7^{2n+1}$ بر ۴۳ بخش پذیر است.

حل :

$$6^n \equiv 6^n \xrightarrow{\times 36} 6^n \times 36 \equiv 6^n \times 36 \rightarrow 6^{n+2} \equiv 6^n \times 36$$

$$7^2 \equiv 6 \rightarrow (7^2)^n \equiv (6)^n \xrightarrow{\times 7} 7^{2n+1} \equiv 6^n \times 7$$

حال موارد بالا را نظیر به نظیر جمع می کنیم.

$$6^{n+2} + 7^{2n+1} \equiv 6^n \times 36 + 6^n \times 7$$

$$\rightarrow 6^{n+2} + 7^{2n+1} \equiv 6^n (36 + 7) \rightarrow 6^{n+2} + 7^{2n+1} \equiv 6^n (43) \rightarrow 6^{n+2} + 7^{2n+1} \equiv 0$$

تمرین ۱۹: نشان دهید به ازای هر عدد طبیعی n ، عدد $11^{3n-1} - 7$ بر ۱۹ بخش پذیر است.

حل:

$$11^{3n-1} - 7 = 11^{3(n-1)+2} - 7 = (11^3)^{n-1} \times 11^2 - 7$$

اما:

$$11^3 \equiv 1 \rightarrow (11^3)^{n-1} \equiv (1)^{n-1} \rightarrow 11^{3n-3} \equiv 1$$

$$\frac{11^2 \equiv 7}{\rightarrow 11^{3n-3} \times 11^2 \equiv 1 \times 7 \rightarrow 11^{3n-1} \equiv 7 \rightarrow 11^{3n-1} - 7 \equiv 0}$$

تمرین ۲۲: باقی مانده‌ی تقسیم عدد $9 \times (7 + 2^{11})$ را بر ۲۳ بیابید.

حل:

$$2^5 \equiv 9 \rightarrow (2^5)^2 \equiv (9)^2 \rightarrow 2^{10} \equiv 81 \xrightarrow{81 \equiv 12} 2^{10} \equiv 12 \xrightarrow{\times 2} 2^{11} \equiv 24$$

$$\frac{2^4 \equiv 1}{\rightarrow 2^{11} \equiv 1 \xrightarrow{+7} 2^{11} + 7 \equiv 8 \xrightarrow{\times 9} (2^{11} + 7) \times 9 \equiv 72}$$

$$\frac{72 \equiv 3}{\rightarrow (2^{11} + 7) \times 9 \equiv 3 \rightarrow r = 3}$$

تمرین ۲۲: اگر دو عدد $3a - 5$ و $4a - 7$ رقم یکان برابر داشته باشند، $9a + 6$ رقم یکان عدد را به

دست آورید.

حل: چون این دو عدد رقم یکان مساوی دارند، پس به پیمانه‌ی ۱۰ همبسته هستند.

$$4a - 7 \equiv 3a - 5 \rightarrow 4a - 3a \equiv 7 - 5 \rightarrow a \equiv 2$$

$$\xrightarrow{\times 9} 9a \equiv 18 \xrightarrow{+6} 9a + 6 \equiv 24 \xrightarrow{24 \equiv 4} 9a + 6 \equiv 4$$

تمرین ۲۳: باقی مانده‌ی تقسیم عدد $\sum_{n=1}^{500} n!$ بر ۱۰ را به دست آورید.

حل:

$$\sum_{n=1}^{500} n! = 1! + 2! + 3! + \dots + 500!$$

$$\begin{array}{l}
 10 \\
 1! \equiv 1 \\
 10 \\
 2! \equiv 2 \\
 10 \\
 3! \equiv 6 \\
 10 \quad 10 \\
 4! \equiv 24 \equiv 4 \\
 10 \quad 10 \\
 5! \equiv 120 \equiv 0 \\
 10 \\
 6! \equiv 0 \\
 \vdots \\
 10 \\
 500 \equiv 0
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} 10 \\ 1! \equiv 1 \\ 10 \\ 2! \equiv 2 \\ 10 \\ 3! \equiv 6 \\ 10 \quad 10 \\ 4! \equiv 24 \equiv 4 \\ 10 \quad 10 \\ 5! \equiv 120 \equiv 0 \\ 10 \\ 6! \equiv 0 \\ \vdots \\ 10 \\ 500 \equiv 0 \end{array}} \right\} + \rightarrow r = 1 + 2 + 6 + 4 + 0 + 0 + \dots + 0 = 13 \xrightarrow{10} 13 \equiv 3 \rightarrow r = 3$$

تمرین ۲۴: اگر اول مهر ماه در یک سال یکشنبه باشد، ۷ اسفند ماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

حل: کافی است تعداد روزهای از اول مهر تا ۷ اسفند را تعیین و باقی مانده‌ی تقسیم عدد بدست آمده بر ۷ را با توجه به جدول زیر محاسبه کنیم.

یکشنبه	دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه	پنجشنبه	جمعه	شنبه
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

تعداد روزهای ماه‌های مهر و آبان و آذر و دی و بهمن و ۷ روز از اسفند برابر

$$(30 - 1) + 30 + 30 + 30 + 30 + 7 = 156$$

و چون $156 \equiv 2 \pmod{7}$ پس ۷ اسفند، سه شنبه است.

تمرین ۲۵: اگر ۱۲ بهمن در یک سال جمعه باشد، ۳۱ مرداد ماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

حل: کافی است تعداد روزهای از ۳۱ مرداد تا ۱۲ بهمن را تعیین و باقی مانده‌ی تقسیم عدد بدست آمده بر ۷ را با توجه به جدول زیر محاسبه کنیم.

شنبه	یک شنبه	دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه	پنجشنبه	جمعه
۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰

تعداد روزهای ماه‌های شهریور و مهر و آبان و آذر و دی و ۱۲ روز از بهمن برابر

$$31 + 30 + 30 + 30 + 30 + 12 = 163$$

و چون $163 \equiv 2 \pmod{7}$ پس ۳۱ مرداد چهارشنبه است.

تمرین برای حل :

۲۶: باقی مانده‌ی تقسیم عدد $19 + 27^7$ بر ۱۳ را تعیین کنید.

۲۷: باقی مانده‌ی تقسیم عدد $10 + 12 \times 1000^{13}$ بر ۷ را تعیین کنید.

۲۸: باقی مانده‌ی تقسیم عدد ۱۳۵۸۱۱۲ بر عدد ۹ را به دست آورید.

۲۹: باقی مانده‌ی تقسیم $\sum_{n=1}^{100} n!$ بر ۸ را تعیین کنید.

۳۰: یکان عدد $3^{424} + 7^{101}$ را تعیین کنید.

۳۱: باقی مانده‌ی تقسیم $(251)^{161} + \dots + (243)^{161} + (242)^{161} + (241)^{161}$ بر ۱۲ بدست آورید.

۳۲: نشان دهید که $2^{11} - 1$ بر ۲۳ بخش پذیر است.

۳۳: باقی مانده‌ی تقسیم $5 + 2^{1381}$ بر ۷ را به دست آورید.

۳۴: اتحاد زیر به بسط دو جمله ای خیام موسوم است.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \dots + \binom{n}{n}b^n$$

به کمک این اتحاد، ثابت کنید که برای هر $n \in N$ و $a, b \in Z$ همواره $(a+b)^n \equiv a^n + b^n \pmod{ab}$

۳۵: با استفاده از تمرین قبل ثابت کنید که عدد $12^{51} + 11^{51} - 23^{51}$ بر ۱۳۲ بخش پذیر است.

حل :

$$23 = 11 + 12 \rightarrow (23)^{51} = (11 + 12)^{51} \rightarrow (11 + 12)^{51} \stackrel{11 \times 12}{\equiv} 11^{51} + 12^{51} \\ \rightarrow 23^{51} - 11^{51} - 12^{51} \equiv 0$$

۳۶: ثابت کنید که باقی مانده‌ی تقسیم هر عدد صحیح بر ۳ برابر مجموع ارقام آن عدد است (برای سادگی

کار عدد مورد نظر را ۵ رقمی فرض کنید).

۳۷: باقی مانده‌ی تقسیم ۴۵۲۷۱ بر ۳ را به دست آورید.

۳۸: اول فروردین سال ۱۳۹۷ چهارشنبه است. روز تولد خودتان چه روزی است؟

دسته‌ی همنهشتی یک عدد صحیح

در درس قبل دیدیم که باقی مانده‌های تقسیم اعداد صحیح بر ۴ عبارتند از ۰ و ۱ و ۲ و ۳ می‌باشند. حال اگر هر کدام از این باقی مانده‌ها را یک نماینده‌ی مجموعه‌ی اعداد صحیح در نظر بگیریم که باقی مانده‌ی تقسیم هر عضو آن مجموعه بر عدد ۴ به ترتیب ۰ و ۱ و ۲ و ۳ باشد، داریم:

$$A_0 = \{x \in Z \mid x = 4k\} = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, 12, 16, \dots\} = [0]_4$$

$$A_1 = \{x \in Z \mid x = 4k + 1\} = \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, 13, 17, \dots\} = [1]_4$$

$$A_2 = \{x \in Z \mid x = 4k + 2\} = \{\dots, -6, -2, 2, 6, 10, 14, 18, \dots\} = [2]_4$$

$$A_3 = \{x \in Z \mid x = 4k + 3\} = \{\dots, -5, -1, 3, 7, 11, 15, 19, \dots\} = [3]_4$$

یعنی مجموعه‌ی اعداد صحیح با عمل تقسیم بر ۴ به چهار مجموعه افراز می‌شود. همچنین در هر مجموعه تفاضل هر دو عضو بر ۴ بخش پذیر است.

برای مثال در مجموعه‌ی A_3 می‌توان نوشت:

$$a, b \in A_3 \rightarrow a - b = (4k_1 + 3) - (4k_2 + 3) = 4(k_1 - k_2) \rightarrow 4 \mid a - b$$

این موضوع برای هر عدد طبیعی برقرار است و لذا مجموعه‌ی همه‌ی اعداد صحیح که باقی مانده‌ی تقسیم آنها بر عدد طبیعی m برابر r می‌باشد را کلاس یا دسته‌ی هم‌نهشتی r به پیمانه‌ی m می‌نامند و آن را با $[r]_m$ نمایش می‌دهند. یعنی:

$$A_r = \{x \in Z \mid x = mk + r\} = [r]_m$$

تمرین ۳۹: در همنهشتی به پیمانه‌ی ۳ کلاس هم‌ارزی ۲ را بنویسید.

حل:

$$[2]_3 = \{x \in Z \mid x = 3k + 2\} = \{\dots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, 14, \dots\}$$

تمرین ۴۰: در همنهشتی به پیمانه‌ی ۵ تمام کلاسهای هم‌ارزی را بنویسید.

$$[0]_5 = \{x \in Z \mid x = 5k\} = \{\dots, -5, 0, 5, 10, 15, 20, \dots\}$$

$$[1]_5 = \{x \in Z \mid x = 5k + 1\} = \{\dots, -4, 1, 6, 11, 16, 21, \dots\}$$

$$[2]_5 = \{x \in Z \mid x = 5k + 2\} = \{\dots, -3, 2, 7, 12, 17, 22, \dots\}$$

$$[3]_9 = \{x \in Z \mid x = 9k + 3\} = \{\dots, -2, 3, 8, 13, 18, 23, \dots\}$$

$$[4]_9 = \{x \in Z \mid x = 9k + 4\} = \{\dots, -1, 4, 9, 14, 19, 24, \dots\}$$

تمرین ۴۱: عدد ۱۳۹۸ به کدام دسته‌ی هم‌نهشتی به پیمانه‌ی ۹ تعلق دارد؟

حل:

$$1398 \equiv 1 + 3 + 9 + 8 \rightarrow 1398 \equiv 21 \xrightarrow{21 \equiv 3} 1398 \equiv 3$$

$$\rightarrow r = 3 \rightarrow 1398 \in [3]_9$$

تمرین ۴۲: عدد -۲۱۰ به کدام یک از کلاس‌های هم‌نهشتی به پیمانه‌ی ۸ تعلق دارد؟

$$(1) [6] \quad (2) [2] \quad (3) [3] \quad (4) [1]$$

حل: کافی است باقی مانده‌ی اصلی تقسیم عدد -۲۱۰ بر ۸ را تعیین کنیم.

$$\begin{array}{r} 210 \overline{) 8} \\ \underline{26} \\ \dots \\ 2 \end{array} \quad 210 \equiv 2 \xrightarrow{\times(-1)} -210 \equiv -2 \rightarrow -210 \equiv -2 + 8(1) \rightarrow -210 \equiv 6$$

$$\rightarrow r = 6 \rightarrow -210 \in [6]_8$$

تمرین ۴۳: دو عدد a و b به صورت‌های زیر نوشته شده‌اند.

$$a = 7k_1 + 5 \quad \text{و} \quad b = 7k_2 - 2$$

دسته‌ی هم‌نهشتی $a + 2b$ را به پیمانه‌ی ۷ مشخص کنید.

حل: کافی است که باقی مانده اصلی تقسیم $a + 2b$ به ۷ را تعیین کنیم.

$$\begin{aligned} a &\equiv 5 \\ b &\equiv -2 \xrightarrow{\times 2} 2b \equiv -4 \\ \xrightarrow{+} a + 2b &\equiv 5 + (-4) \rightarrow a + 2b \equiv 1 \\ \rightarrow r = 1 &\rightarrow (a + 2b) \in [1]_7 \end{aligned}$$

تمرین ۴۴: اگر k یک عدد صحیح باشد. نشان دهید که به ازای هر k فقط یکی از حالت‌های زیر برقرار

است.

$$k \in [2]_3 \quad \text{یا} \quad k \in [1]_3 \quad \text{یا} \quad k \in [0]_3$$

حل: باقی مانده‌ی تقسیم هر عدد صحیح همچون k بر عدد ۳، یکی از اعداد ۰ یا ۱ یا ۲ می باشد. پس k باید فقط به یکی از دسته‌ی هم ارزی به پیمانه‌ی ۳ تعلق داشته باشد.

تمرین ۴۵: مجموعه‌ی همه‌ی دسته‌های هم ارزی به پیمانه‌ی ۵ چنین است.

$$\{[0], [a], [a^2], [a^3], [a^4]\}$$

عدد a کدام است؟

$$1(1) \qquad 2(2) \qquad 3(3) \qquad 4(4)$$

حل: مجموعه‌ی دسته‌های هم ارزی به پیمانه‌ی ۵ بصورت زیر می باشد.

$$\{[0], [1], [2], [3], [4]\}$$

حال به جای a در مجموعه‌ی داده شده عددی قرار دهیم که این دو مجموعه مساوی شوند. قرار می دهیم.

$$a = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [0] = [0] \\ [a] = [2] \\ [a^2] = [2^2] = [4] \\ [a^3] = [2^3] = [8] = [3] \\ [a^4] = [2^4] = [16] = [1] \end{cases}$$

تمرین ۴۶: همه‌ی اعداد صحیحی چون a را بیابید که ۵ برابر آنها بعلاوه‌ی ۹ بر ۱۱ بخش پذیر باشد.

حل:

$$5a + 9 \equiv 0 \pmod{11} \rightarrow 5a \equiv -9 \pmod{11} \rightarrow 5a \equiv -9 + (4 \times 11) \pmod{11} \rightarrow 5a \equiv 35 \pmod{11} \xrightarrow{\div 5} a \equiv 7 \pmod{11}$$

$$\rightarrow a = 11k + 7 \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

تمرین برای حل:

۴۷: اگر $(3x + 1) \in [4]_7$ ، آنگاه با محاسبه تعیین کنید که $5x^2 + 3$ به کدام دسته‌ی همنهشتی تعلق

دارد؟

معادله‌ی همنهشتی

هر رابطه‌ی همنهشتی به شکل $ax \equiv b \pmod{m}$ (دو عدد صحیح m و a و b را یک معادله‌ی همنهشتی می‌نامند. منظور از حل معادله‌ی همنهشتی یافتن اعداد صحیحی مانند x_0 است که ax_0 با b به پیمانه m هم باقی مانده باشند. به عبارتی دیگر

$$ax_0 = mk + b \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

مثال: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$x \equiv 2 \pmod{7}$$

حل: وجود دارد $k \in \mathbb{Z}$ که $x = 7k + 2$ لذا x می‌تواند به ازای مقادیر مختلف k یکی از اعداد زیر باشد.

k	-3	-2	-1	0	1	2	3
x	-19	-12	-5	2	9	16	23

توجه داشته باشید که جواب کلی $x = 7k + 2$ را **جواب عمومی معادله** می‌نامند.

در معادله‌ی مثال فوق، ضریب x عدد یک است ولی گاهی این ضریب یک نمی‌باشد. برای دست یابی به **جواب های عمومی** معادله باید ضریب x را حذف کنیم. این کار به کمک ویژگی های زیر که قبلاً با برخی از آنها آشنا شده اید، انجام می‌شود.

الف: اگر $a \equiv b \pmod{m}$ آنگاه $a + mk \equiv b + mk \pmod{m}$

ب: اگر $ac \equiv bc \pmod{m}$ و $(c, m) = d$ آنگاه $a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$ (اثبات این ویژگی جزء اهداف کتاب نمی‌باشد).

نتیجه: اگر $ac \equiv bc \pmod{m}$ و $(c, m) = 1$ آنگاه $a \equiv b \pmod{m}$

تمرین ۴۸: معادله‌ی همنهشتی $3x \equiv 9 \pmod{5}$ را حل کنید.

حل:

$$3x \equiv 9 \pmod{5} \rightarrow 3x \equiv 3 \pmod{5} \xrightarrow{(3,5)=1} x \equiv 3 \pmod{5} \rightarrow x = 5k + 3 \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

تمرین ۴۹: معادله‌ی همبستگی $۴x \equiv ۱۲ \pmod{۹}$ را حل کنید.

حل:

$$۴x \equiv ۱۲ \pmod{۹} \rightarrow ۴x \equiv ۴ \times ۳ \xrightarrow{(۹,۴)=۱} x \equiv ۳ \pmod{۹} \rightarrow x = ۹k + ۳ ; k \in Z$$

تمرین ۵۰: معادله‌ی همبستگی $۴x \equiv ۱۳ \pmod{۹}$ را حل کنید.

حل:

$$۴x \equiv ۱۳ \pmod{۹} \xrightarrow{۱۳ \equiv ۴} ۴x \equiv ۴ \pmod{۹} \xrightarrow{(۹,۴)=۱} x \equiv ۱ \pmod{۹} \rightarrow x = ۹k + ۱ ; k \in Z$$

تمرین ۵۱: معادله‌ی همبستگی $۴x \equiv ۱۷ \pmod{۵}$ را حل کنید.

حل:

$$۴x \equiv ۱۷ \pmod{۵} \xrightarrow{۱۷ \equiv ۲} ۴x \equiv ۲ \pmod{۵} \rightarrow ۴x \equiv ۲ + (۲ \times ۵)$$

$$\rightarrow ۴x \equiv ۱۲ \pmod{۵} \xrightarrow{(۴,۵)=۱} x \equiv ۳ \pmod{۵} \rightarrow x = ۵k + ۳ ; k \in Z$$

تمرین ۵۲: معادله‌های همبستگی زیر را حل کنید.

$$۴۲۳x \equiv ۷۹ \pmod{۱۱} \text{ (ج)}$$

$$۹x \equiv ۱۳ \pmod{۴} \text{ (ب)}$$

$$۱۰x \equiv ۴۰ \pmod{۱۵} \text{ (الف)}$$

حل:

الف:

$$۱۰x \equiv ۴۰ \pmod{۱۵} \xrightarrow{(۱۰,۱۵)=۵} x \equiv ۴ \pmod{۳} \xrightarrow{۴ \equiv ۱} x \equiv ۱ \pmod{۳} \rightarrow x = ۳k + ۱ ; k \in Z$$

ب:

$$۹x \equiv ۱۳ \pmod{۴} \xrightarrow{۱۳ \equiv ۹} ۹x \equiv ۹ \pmod{۴} \xrightarrow{(۹,۴)=۱} x \equiv ۱ \pmod{۴} \rightarrow x = ۴k + ۱ ; k \in Z$$

ج:

$$۴۲۳x \equiv ۷۹ \pmod{۱۱} \xrightarrow{۴۲۳ \equiv ۵ \text{ و } ۷۹ \equiv ۲} ۵x \equiv ۲ \pmod{۱۱} \rightarrow ۵x \equiv ۲ + (۳ \times ۱۱) \rightarrow ۵x \equiv ۳۵$$

$$\xrightarrow{(۵,۱۱)=۱} x \equiv ۷ \pmod{۱۱} \rightarrow x = ۱۱k + ۷ ; k \in Z$$

توجه : معادله‌ی هم نهشتی $ax \equiv b^m$ دارای جواب است، اگر و فقط اگر $(a, m) = d$ و $d | b$ (این

موضوع را بدون اثبات می پذیریم.)

لذا اگر $(a, m) = 1$ معادله ، همواره دارای جواب است.

مثال : معادله‌ی $6x \equiv 11^9$ دارای جواب نیست. زیرا $(6, 9) = 3$ و $3 \nmid 11$

مثال : معادله‌ی $4x \equiv 18^6$ دارای جواب است. زیرا $(4, 6) = 2$ و $2 | 18$ و جواب آن می شود.

$$4x \equiv 18^6 \rightarrow 2 \times 2x \equiv 2 \times 9^6 \xrightarrow{(2,6)=2} 2x \equiv 9^3 \rightarrow 2x \equiv 9 + 3 \rightarrow 2x \equiv 12$$

$$\xrightarrow{(2,3)=1} x \equiv 6 \xrightarrow{6 \equiv 0} x \equiv 0 \rightarrow x = 3k$$

تمرین برای حل :

۵۳ : معادله های همنهشتی زیر را در صورت امکان حل کنید.

$$\begin{array}{ll} \text{الف) } 8x \equiv 20^{12} & \text{ب) } 51x \equiv 11^6 \end{array}$$

۵۴ : همه‌ی اعداد صحیحی را بیابید که اگر از سه برابر آنها 13 واحد کم کنیم، حاصل بخش پذیر 7 شود.

معادله‌ی سیاله

هر معادله‌ی دو یا چند متغیره که دامنه‌ی متغیرهای آن مجموعه‌ی اعداد صحیح باشند، را معادله‌ی سیاله (دیوفانتی) می‌گویند. اگر متغیرهای معادله‌ی سیاله از درجه‌ی یک باشند، آنرا **معادله‌ی سیاله‌ی خطی** می‌نامند.

مثلاً معادله‌ی $ax + by = c$ یک معادله‌ی سیاله‌ی خطی است که در آن $a, b, c \in \mathbb{Z}$ و $a^2 + b^2 \neq 0$. منظور از حل یک معادله‌ی سیاله، یافتن جواب‌های صحیح معادله است. یعنی زوج مرتب (x_0, y_0) از اعداد صحیح را یک جواب معادله‌ی سیاله‌ی $ax + by = c$ می‌نامند، هرگاه $ax_0 + by_0 = c$.

مثال: زوج مرتب $(2, -3)$ یک جواب معادله‌ی $3x - 2y = 12$ است. زیرا $3(2) - 2(-3) = 12$.

توجه: معادله‌ی سیاله را می‌توان به یک معادله‌ی همبهنشتی تبدیل کرد. برای مثال:

$$ax + by = c \rightarrow ax - c = (-b)y \rightarrow -b \mid ax - c \rightarrow b \mid ax - c \rightarrow ax \equiv c \pmod{b}$$

$$ax + by = c \rightarrow by - c = (-a)x \rightarrow -a \mid by - c \rightarrow a \mid by - c \rightarrow by \equiv c \pmod{a}$$

بنابراین معادله‌ی سیاله‌ی خطی $ax + by = c$ دارای جواب است، اگر و فقط اگر $(a, b) = d \mid c$.

نتیجه ۱: اگر $(a, b) = d$ و $d \nmid c$ آنگاه معادله‌ی سیاله‌ی $ax + by = c$ دارای جواب صحیح نیست.

مثلاً: معادله‌ی سیاله‌ی $4x + 6y = 7$ دارای جواب صحیح نیست.

نتیجه ۲: اگر $(a, b) = 1$ چون $1 \mid c$ آنگاه معادله‌ی سیاله‌ی $ax + by = c$ همواره دارای جواب صحیح است.

تمرین ۵۵: ثابت کنید که معادله $(7n + 9)x + (3n + 4)y = 5$ به ازاء هر عدد صحیح n دارای جواب است.

حل: گیریم که $(7n + 9, 3n + 4) = d$

$$(7n + 9, 3n + 4) = d \rightarrow \begin{cases} d \mid 7n + 9 \rightarrow d \mid -3(7n + 9) \\ d \mid 3n + 4 \rightarrow d \mid 7(3n + 4) \end{cases}$$
$$\rightarrow d \mid -3(7n + 9) + 7(3n + 4) \rightarrow d \mid 1 \xrightarrow{d \in \mathbb{N}} d = 1$$

روش های حل یک معادله ی سیاله

برای حل یک معادله ی سیاله روش های مختلفی وجود دارد. از جمله ی این روش های می توان موارد زیر را معرفی کرد.

الف : روش تبدیل به معادله ی همنهشتی

با تبدیل یک معادله ی سیاله به معادله ی همنهشتی می توان به جواب های کلی آن دست یافت. بدین شکل

که ابتدا معادله ی $ax + by = c$ را به صورت $ax \equiv c \pmod{|b|}$ می نویسیم و با حل این معادله ی همنهشتی یک جواب عمومی برای x به دست می آوریم. با جایگزین کردن این جواب در معادله ی سیاله ی اصلی جواب عمومی برای y بدست می آید.

مثال : معادله ی $2x + 3y = 8$ را حل کنید.

حل : چون $(2,3) = 1$ و $1 \mid 8$ ، لذا معادله دارای جواب است.

$$2x + 3y = 8 \rightarrow 2x \equiv 8 \pmod{3} \xrightarrow{(2,3)=1} x \equiv 4 \pmod{3} \rightarrow x \equiv 1 + 3 \pmod{3} \rightarrow x \equiv 1 \pmod{3} \rightarrow x = 3k + 1$$

$$2x + 3y = 8 \xrightarrow{x=3k+1} 2(3k+1) + 3y = 8 \rightarrow y = -2k + 2$$

مثال : معادله ی $4x + 5y = 9$ را حل کنید.

حل : چون $(4,5) = 1$ و $1 \mid 9$ ، لذا معادله دارای جواب است.

$$4x + 5y = 9 \rightarrow 4x \equiv 9 \pmod{5} \rightarrow 4x \equiv 4 + 5 \pmod{5} \rightarrow 4x \equiv 4 \pmod{5} \xrightarrow{(4,5)=1} x \equiv 1 \pmod{5} \rightarrow x = 5k + 1$$

$$4x + 5y = 9 \xrightarrow{x=5k+1} 4(5k+1) + 5y = 9 \rightarrow y = -4k + 1$$

ب : روش اویلر

در این روش مجهولی را که ضریب آن از لحاظ قدرمطلق کمتر از ضریب دیگری است، برحسب بقیه ی عناصر معادله حساب می کنیم که یک عبارت کسری به دست آید. این عبارت را تا حد امکان تفکیک می نماییم و کسر جدیدی که حاصل می شود را برابر عدد صحیحی مانند k قرار داده و از آنجا x و y را بر حسب k بدست می آوریم.

مثال : معادله‌ی $2x + 3y = 8$ را حل کنید.

حل: چون $(2, 3) = 1$ و $1/8$ ، لذا معادله دارای جواب است. چون ضریب x دارای قدرمطلق کوچکتر از ضریب y است پس:

$$x = \frac{8 - 3y}{2} = \frac{8 - 2y - y}{2} = \frac{8 - 2y}{2} + \frac{-y}{2} = 4 - y + \frac{-y}{2}$$

حال $\frac{-y}{2}$ را برابر عدد صحیح k قرار می دهیم.

$$\frac{-y}{2} = k \rightarrow y = -2k$$

پس:

$$x = 4 - y + \frac{-y}{2} \rightarrow x = 4 + 2k + k = 4 + 3k$$

در نهایت داریم:

$$\begin{cases} x = 4 + 3k \\ y = -2k \end{cases}$$

مثال : معادله‌ی $2x + 5y = 11$ را حل کنید.

حل: چون $(2, 5) = 1$ و $1/11$ ، لذا معادله دارای جواب است. چون ضریب x دارای قدرمطلق کوچکتر از ضریب y است پس:

$$x = \frac{11 - 5y}{2} = \frac{10 + 1 - 4y - y}{2} = 5 - 2y + \frac{1 - y}{2}$$

حال $\frac{1 - y}{2}$ را برابر عدد صحیح k قرار می دهیم.

$$\frac{1 - y}{2} = k \rightarrow y = 1 - 2k$$

پس:

$$x = 5 - 2y + \frac{1 - y}{2} \rightarrow x = 5 - 2(1 - 2k) + k = 3 + 5k$$

در نهایت داریم:

$$\begin{cases} x = 3 + 5k \\ y = 1 - 2k \end{cases}$$

مثال: معادله‌ی $5x - 3y = 11$ را حل کنید.

حل: چون $(5, -3) = 1$ و 11 ، لذا معادله دارای جواب است. چون ضریب y دارای قدرمطلق کوچکتر از

ضریب x است پس:

$$y = \frac{11 - 5x}{-3} = \frac{9 + 2 - 6x + x}{-3} = -3 + 2x + \frac{2 + x}{-3}$$

حال $\frac{2 + x}{-3}$ را برابر عدد صحیح k قرار می‌دهیم.

$$\frac{2 + x}{-3} = k \rightarrow x = -2 - 3k$$

پس:

$$y = -3 + 2x + \frac{2 + x}{-3} = -3 + 2(-2 - 3k) + k = -7 - 5k$$

در نهایت داریم:

$$\begin{cases} x = -2 - 3k \\ y = -7 - 5k \end{cases}$$

ج: روش کلاسیک

روش کلاسیک برای حل معادلات سیاله بر اساس قضیه‌ی زیر است.

قضیه: اگر (x_0, y_0) یک جواب معادله‌ی سیاله‌ی $ax + by = c$ باشد، آنگاه ثابت می‌شود که کلیه‌ی

جوابهای معادله عبارتند از:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d}k \\ y = y_0 - \frac{a}{d}k \end{cases}$$

که در آن $(a, b) = d$ و $k \in Z$ می‌باشند.

نتیجه: طبق این قضیه بدیهی است که اگر معادله‌ی سیاله‌ی $ax + by = c$ دارای جوابی به صورت

(x_0, y_0) باشد، در حقیقت بی‌شمار جواب دارد که از رابطه‌ی فوق بدست می‌آیند.

مثال: معادله‌ی $2x + 3y = 8$ را حل کنید.

حل: چون $(2,3) = 1$ و $1/8$ ، لذا معادله دارای جواب است. با جستجو به جواب $(1,2)$ می رسیم. پس کلیه ی جواب های این معادله عبارتند از:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d}k = 1 + \frac{3}{1}k = 1 + 3k \\ y = y_0 - \frac{a}{d}k = 2 - \frac{2}{1}k = 2 - 2k \end{cases}$$

مثال: معادله ی $4x + 6y = 10$ را حل کنید.

حل: چون $(4,6) = 2$ و $2/10$ ، لذا معادله دارای جواب است. با جستجو به جواب $(1,1)$ می رسیم. پس کلیه ی جواب های این معادله عبارتند از:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d}k = 1 + \frac{6}{2}k = 1 + 3k \\ y = y_0 - \frac{a}{d}k = 1 - \frac{4}{2}k = 1 - 2k \end{cases}$$

مثال: معادله ی $4x + 6y = 7$ را حل کنید.

حل: چون $(4,6) = 2$ و $2/7$ ، لذا معادله دارای جواب نیست.

تمرین برای حل:

۵۶: معادله ی زیر را به سه روش بیان شده حل کنید.

$$7x + 5y = 11$$

حل چند مسئله کاربردی

در انتهای بحث چند مسئله ریاضی که به کمک معادله ی سیاله حل می شوند. معرفی می کنیم.

مثال: جوابهای طبیعی^۱ معادله ی $2x + 5y = 11$ را بیابید.

حل: ابتدا معادله را حل می کنیم. با توجه به تمرین های قبل داریم.

$$\begin{cases} x = 3 + 5k \\ y = 1 - 2k \end{cases}$$

حال جدولی مانند جدول زیر تشکیل می دهیم و جوابهای طبیعی معادله را به کمک آن تعیین می کنیم.

k	-۴	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲
x	-۱۷	-۱۲	-۷	-۲	۳	۸	۱۳
y	۹	۷	۵	۳	۱	-۱	-۳

با توجه به این جدول بدیهی است که معادله دارای یک جواب طبیعی (۳,۱) است.

توجه: برای تعیین جواب های طبیعی معادله ، می توان به شکل زیر نیز عمل کرد.

$$x > 0 \rightarrow 3 + 5k > 0 \rightarrow k > \frac{-3}{5}$$

$$y > 0 \rightarrow 1 - 2k > 0 \rightarrow -2k > -1 \rightarrow k < \frac{1}{2}$$

اکنون تعداد اعداد صحیح (تعداد k صحیح) بین $\frac{-3}{5}$ و $\frac{1}{2}$ را تعیین می کنیم. در این مسئله فقط یک عدد

صحیح و آن هم در حالت $k = 0$ بین $\frac{-3}{5}$ و $\frac{1}{2}$ وجود دارد. لذا معادله فقط یک جواب طبیعی دارد که به

ازای $k = 0$ بدست می آید.

$$\begin{cases} x = 3 + 5k \\ y = 1 - 2k \end{cases} \xrightarrow{k=0} \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

¹ . منظور از جواب طبیعی، جوابی است مانند (x_0, y_0) که در آن x_0 و y_0 هر دو عدد طبیعی باشند.

مثال: در یک دفتر پستی فقط تمبرهای ۹۰ و ۵۰ ریالی موجود است. برای چسباندن تمبر روی یک بسته‌ی

پستی که نیاز به ۸۵۰ ریال تمبر دارد، از هر کدام از تمبرهای فوق به چه مقدار لازم است؟

حل: تعداد تمبرهای ۹۰ و ۵۰ ریالی را به ترتیب x و y در نظر بگیریم. معادله‌ی سیاله‌ی

$$90x + 50y = 850 \text{ حاصل می شود.}$$

$$90x + 50y = 850 \xrightarrow{\div 10} 9x + 5y = 85$$

هدف تعیین جواب‌های صحیح غیر منفی y و x است که در معادله‌ی $9x + 5y = 85$ صدق کند.

چون $(9, 5) = 1$ و $1/85$ ، لذا معادله دارای جواب است. چون ضریب y دارای قدرمطلق کوچکتر از ضریب x

است پس:

$$y = \frac{85 - 9x}{5} = \frac{85 - 10x + x}{5} = 17 - 2x + \frac{1}{5}x$$

حال $\frac{1}{5}x$ را برابر عدد صحیح k قرار می دهیم.

$$\frac{1}{5}x = k \rightarrow x = 5k$$

پس:

$$y = 17 - 2x + \frac{1}{5}x = 17 - 10k + k = 17 - 9k$$

در نهایت داریم:

$$\begin{cases} x = 5k \\ y = 17 - 9k \end{cases}$$

حال برای تعیین جوابهای صحیح غیر منفی می توان نوشت:

$$\begin{cases} x = 5k \\ y = 17 - 9k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \rightarrow 5k \geq 0 \rightarrow k \geq 0 \\ y \geq 0 \rightarrow 17 - 9k \geq 0 \rightarrow k \leq \frac{17}{9} \rightarrow k \leq 1/88 \end{cases} \rightarrow 0 \leq k \leq 1/88$$

که در این بازه ، فقط دو عدد صحیح برای k وجود دارد. این دو عدد عبارتند از : $k = 0$ و $k = 1$ لذا

$$k = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 5k \\ y = 17 - 9k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 17 \end{cases} \quad \text{و} \quad k = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 5k \\ y = 17 - 9k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 8 \end{cases}$$

با تشکیل جدول نیز می توان جوابهای صحیحی غیر منفی را نیز تعیین کرد.

k	-۱	۰	۱	۲
x	-۵	۰	۵	۱۰
y	۲۶	۱۷	۸	-۱

پس دو جواب زیر حاصل می شود.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 17 \end{cases}, \begin{cases} x = 5 \\ y = 8 \end{cases}$$

مثال: به چند طریق می توان از بین دو نوع گل، یک دسته گل شامل ۹ شاخه به دلخواه انتخاب کرد؟

حل: تعداد گل های نوع اول را x و تعداد گل های نوع دوم را y فرض می کنیم. با توجه به صورت مسئله

$$x + y = 9 \text{ داریم}$$

پس اگر $x = k$ آنگاه $y = 9 - k$ و می توان جدول زیر را تشکیل داد.

k	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
$x = k$	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
$y = 9 - k$	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰

یعنی به ده طریق می توان یک دسته گل شامل ۹ شاخه تهیه کرد.

نکته: اگر $(k \in N)$ تعداد جوابهای طبیعی معادله سیاله $x + y = k$ برابر $k - 1$ است.

اثبات: با تشکیل جدول به راحتی می توان این موضوع را مشاهده کرد.

x	۰	۱	۲	۳	$k - 2$	$k - 1$	k
y	k	$k - 1$	$k - 2$	$k - 3$	۲	۱	۰

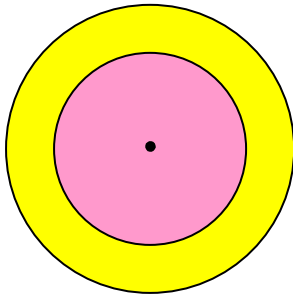
که فقط جواب های هاشور خورده در جدول قابل قبول هستند و تعداد آنها $k - 1$ می باشد.

تمرین برای حل:

۵۷: به چند طریق می توان ۱۸۰۰۰ تومان را به اسکناس های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد.

۵۸: در یک رستوران فقط دو نوع خورش قورمه سبزی و قیمه وجود دارد. اگر ۵ نفر وارد این رستوران شوند

به چند طریق می توانند سفارش غذا بدهند. (هر نفر فقط یک پرس غذا می کند).



۵۹: تیر اندازی به سمت یک هدف ، شامل دو دایره‌ی هم مرکز ، تیر اندازی می‌کند. اگر او تیر را به دایره‌ی با شعاع کوچکتر بزند ۵ امتیاز و اگر به دایره‌ی با شعاع بزرگتر و خارج دایره‌ی کوچکتر بزند، ۳ امتیاز می‌گیرد. اگر او کمتر از ۱۵ تیر انداخته و همه‌ی تیرها به داخل دایره‌ی بزرگتر اصابت کرده باشند و در پایان ۴۲ امتیاز گرفته باشد، چند حالت برای او در این تیراندازی می‌تواند ثبت کند.

۶۰: ثابت کنید که تعداد جوابهای طبیعی معادله‌ی $x + y = 11$ برابر ۱۰ جواب است.

۶۱: به چند طریق می‌توان یک کیسه‌ی ۲۳ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟

۶۲: شخصی در یک مسابقه‌ی علمی شرکت کرده است. او به سؤالات ۷ امتیازی و ۹ امتیازی پاسخ داده و مجموعاً ۷۳ امتیاز کسب کرده است. این شخص به چه صورت‌هایی توانسته این امتیاز را به دست آورد. (پاسخ به هر سؤال یا امتیاز کامل دارد و یا امتیازی ندارد).
