فصل ۱ : آشنایی با نظریه اعداد

درس ۱ : استدلال ریاضی

اثبات مستقیم : اثبات هایی که در آنها بطور مستقیم از فرض شروع کنیم و به حکم برسیم اثبات های مستقیم نامیده می شوند. مثالهای زیر نمونه هایی از اثبات های مستقیم هستند. (تذکر مهم)

نمایش اعداد زوج صحیح $= 2k \quad (k \in \mathbb{Z})$ | عدد زوج طبیعی $= 2k \quad (k \in \mathbb{N})$

نمایش اعداد فرد صحیح $= 2k+1 \quad (k \in \mathbb{Z})$ | عدد فرد طبیعی $= 2k-1 \quad (k \in \mathbb{N})$

---

۱) ثابت کنید اگر ۳ واحد به سه برابر عددی فرد اضافه کنیم حاصل مضرب ۴ می باشد.

عدد فرد $= x = 2k+1 \quad (k \in \mathbb{Z})$

$$3x+3 = 3(2k+1)+3 = 6k+3+3 = 6k+6 = 6(k+1) = 6k' = \text{مضرب } 6 \quad (k' \in \mathbb{Z})$$

---

۲) ثابت کنید مربع هر عدد صحیح فرد بصورت $(8q+1)$ است.

عدد فرد $= x = 2k+1 \quad (k \in \mathbb{Z})$

$$x^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = \underbrace{4k(k+1)}_{2q}+1 = 4(2q)+1 = 8q+1$$

ضرب دو عدد متوالی $k(k+1)$ عددی زوج مانند $2q$ است.

---

۳) ثابت کنید حاصلضرب دو عدد فرد همواره عددی فرد است.

$x = 2k+1$

$y = 2k'+1$

$(k, k' \in \mathbb{Z})$

$$x \cdot y = (2k+1)(2k'+1) = 4kk'+2k+2k'+1 = 2(\underbrace{2kk'+k+k'}_{k''})+1$$

$$= 2k''+1 = \text{عددی فرد}$$

---

۴) ثابت کنید مجموع دو عدد فرد همواره زوج است.

$x = 2k+1$

$y = 2k'+1$

$(k, k' \in \mathbb{Z})$

$$x+y = 2k+1+2k'+1 = 2k+2k'+2 = 2(\underbrace{k+k'+1}_{k''}) = 2k'' = \text{زوج}$$

۵) ثابت کنید مکعب هر عدد فرد منهای یک، عددی زوج است.

عدد فرد مورد نظر $= x = 2k+1 \quad (k \in \mathbb{Z})$

$$x^3-1 = (2k+1)^3-1 = 8k^3+12k^2+6k+\cancel{1}-\cancel{1} = 2(\underbrace{4k^3+6k^2+3k}_{k'}) = 2k' = \text{زوج}$$

---

۶) ثابت کنید حاصلضرب سه عدد صحیح زوج متوالی مضرب ۲۴ است.

$x = 2k$

$y = 2k+2$

$z = 2k+4$

$(k \in \mathbb{Z})$

$$x \cdot y \cdot z = 2k(2k+2)(2k+4) = 2k \times 2(k+1) \times 2(k+2)$$

$$= 8\underbrace{k(k+1)(k+2)}_{3q} = 8(3q) = 24q$$

ضرب سه عدد متوالی $k(k+1)(k+2)$ مضرب ۳ است.

---

۷) ثابت کنید اگر k حاصلضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد آنگاه $4k+1$ مربع کامل است (هماهنگ دیماه ۹۷)

$$k = n(n+1) = n^2+n \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$4k+1 = 4(n^2+n)+1 = 4n^2+4n+1 = (2n+1)^2 = \text{مربع کامل}$$

(هماهنگ شهریور ۹۸)

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید (۰٫۵ نمره)

الف) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است ✓

ب) برای هر عدد طبیعی n بزرگتر از ۱، عدد 2^n-1 اول است ✗ $(n=4)$

مثال نقض:

به مثالی که نشان دهد یک نتیجه‌گیری کلی غلط است مثال نقض می‌گویند.

تمرین: عبارتهای زیر را در نظر بگیرید. دلیل درستی یا نادرستی هر کدام را نوشته و برای احکام نادرست یک مثال نقض بیاورید.

الف) اگر x گنگ و y گنگ باشد آنگاه xy گنگ است.

نادرست زیرا:

$x = \sqrt{2}$

$y = \sqrt{8}$

$$xy = \sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$$

ب) برای هر عدد حقیقی x داریم: $x^2>0$

نادرست زیرا: $x=0 \Rightarrow x^2=0$

ج) اعداد اول همگی فرد هستند

نادرست زیرا ۲ اول است و فرد نیست

د) اگر $x>1$ آنگاه داریم: $4-x^2<3$

درست زیرا: $x>1 \Rightarrow x^2>1 \Rightarrow -x^2<-1 \Rightarrow 4-x^2<-1+4 \Rightarrow 4-x^2<3$

اثبات با درنظر گرفتن همه حالت‌ها (روش اشباع):

گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است همه موارد ممکن در مورد مسئله را درنظر بگیریم این نوع اثبات را اثبات به روش اشباع می‌گویند

مثال ۱: ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n ، n^2-5n+7 عددی فرد است

حل: دو حالت را درنظر می‌گیریم:

الف) n زوج است $n=2k \quad (k\in N)$

$n^2-5n+7=(2k)^2-5(2k)+7=4k^2-10k+6+1=2(2k^2-5k+3)+1=2k'+1=$ فرد

ب) n فرد است. $n=2k-1 \quad (k\in N)$

$n^2-5n+7=(2k-1)^2-5(2k-1)+7=4k^2-14k+13=2(2k^2-7k+6)+1$

$=2k'+1=$ فرد

مثال ۲: ثابت کنید حاصلضرب ۳ عدد طبیعی متوالی همواره بر ۳ بخشپذیر است.

حل: سه عدد طبیعی متوالی را می‌توانیم بصورت n و $n+1$ و $n+2$ نشان دهیم باید ثابت کنیم: $n(n+1)(n+2)=3q$

اگر n را بر ۳ تقسیم کنیم با قیمانده‌ای برابر ۰ یا ۱ یا ۲ خواهیم داشت پس ۳ حالت داریم:

الف) $n=3k \Rightarrow n(n+1)(n+2)=3\underbrace{k(3k+1)(3k+2)}_{q}=3q=$ مضرب ۳

ب) $n=3k+1 \Rightarrow n(n+1)(n+2)=(3k+1)(3k+1+1)(3k+1+2)=(3k+1)(3k+2)(3k+3)$
$=(3k+1)(3k+2)3(k+1)=3\underbrace{(3k+1)(3k+2)(k+1)}_{q}=3q=$ مضرب ۳

ج) $n=3k+2 \Rightarrow n(n+1)(n+2)=(3k+2)(3k+2+1)(3k+2+2)$
$=(3k+2)(3k+3)(3k+4)=(3k+2)(3)(k+1)(3k+4)=3\underbrace{(3k+2)(k+1)(3k+4)}_{q}$
$=3q=$ مضرب ۳

اثبات غیر مستقیم (برهان خُلف):

گاهی برای اثبات یک گزاره، فرض می کنیم حکم نادرست است و به یک نتیجه غیر ممکن یا یک نتیجه متضاد با فرض می رسیم پس فرض نادرست بودن حکم باطل بوده و درستی حکم ثابت می شود این نوع اثبات را اثبات به روش برهان خلف یا غیر مستقیم می گوییم.

مثال ۱: با استدلال برهان خلف ثابت کنید برای هر عدد صحیح n، اگر n^2 زوج باشد n نیز زوج است.

اثبات: فرض کنیم n زوج نباشد (فرض خُلف) پس فرد است دراینصورت

$n=2k+1$

$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1=2k'+1=$ فرد

واین تناقض است زیرا طبق فرض n^2 زوج است پس فرض خُلف باطل و حکم برقرار است.

مثال ۲: با استدلال برهان خلف ثابت کنید $\sqrt{2}$ گنگ است.

اثبات: فرض کنیم $\sqrt{2}$ گنگ نباشد (فرض خلف) پس گویا است و بصورت کسر ساده نشدنی مانند $\frac{p}{q}$ است (p و q نسبت بهم اولند)

$\sqrt{2}=\frac{p}{q} \Rightarrow 2=\frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2=2q^2 \Rightarrow$ زوج $p^2 \Rightarrow$ زوج $p \Rightarrow p=2k \Rightarrow p^2=4k^2 \Rightarrow$

$2q^2=4k^2 \Rightarrow q^2=2k^2 \Rightarrow$ زوج $q^2 \Rightarrow$ زوج است $q \Rightarrow$ p و q هردو زوج $\Rightarrow$ $\frac{p}{q}$ کسر ساده شدنی است و این خلاف فرض است پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است

مثال ۳ : ثابت کنید $2+\sqrt{3}$ عددی گنگ است. (با استدلال برهان خلف)

اثبات: فرض کنیم $2+\sqrt{3}$ گنگ نباشد (فرض خلف) پس برابر کسر ساده نشدنی مانند $\frac{p}{q}$ است.

$$2+\sqrt{3}=\frac{p}{q} \Rightarrow \sqrt{3}=\underbrace{\frac{p}{q}}_{\text{گویا}}-\underbrace{2}_{\text{گویا}} \Rightarrow \sqrt{3}=\frac{m}{n}$$ (n و m نسبت بهم اول)

$$\Rightarrow 3=\frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2=3n^2 \Rightarrow m^2 \text{ مضرب } 3 \Rightarrow m \text{ مضرب } 3 \Rightarrow m=3k$$

$$\Rightarrow m^2=9k^2 \Rightarrow 3n^2=9k^2 \Rightarrow n^2=3k^2 \Rightarrow n \text{ مضرب } 3 \Rightarrow$$

m و n هر دو مضرب ۳ هستند و $\frac{m}{n}$ کسر ساده شدنی است و این خلاف فرض است پس حکم درست و فرض خلف باطل است.

(خرداد ۸۸)

مثال ۴: با استدلال برهان خلف ثابت کنید اگر $\sqrt{3}$ عددی گنگ باشد $\sqrt{\sqrt{3}+2}$ نیز عددی گنگ است (۱ نمره)

اثبات: فرض کنیم $\sqrt{\sqrt{3}+2}$ گنگ نباشد (فرض خلف) پس گویا است

$$\sqrt{\sqrt{3}+2}=\frac{a}{b} \Rightarrow \sqrt{3}+2=\frac{a^2}{b^2} \Rightarrow \underbrace{\sqrt{3}}_{\text{گنگ}}=\underbrace{\frac{a^2}{b^2}-2}_{\text{گویا}} \Rightarrow \text{گویا} = \text{گنگ}$$

و این تناقض است پس حکم اولیه درست است.

(خرداد ۸۹)

مثال ۵: b عددی گویا و $\sqrt{a}$ عددی گنگ است. با استدلال برهان خلف ثابت کنید $\sqrt{a}-b$ هم عددی گنگ می باشد.

اثبات: فرض کنیم $\sqrt{a}-b$ گنگ نباشد (فرض خلف) پس گویا است.

$$\sqrt{a}-b=\frac{p}{q} \Rightarrow \sqrt{a}=\frac{p}{q}+b \Rightarrow \text{گویا} = \text{گنگ}$$

و این تناقض است پس حکم اولیه درست است.

(هماهنگ دی ماه ۹۷)

اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد ثابت کنید $\alpha+2\beta$ گنگ است (۱/۲۵ نمره)

اثبات: فرض کنیم $\alpha+2\beta$ گنگ نباشد (فرض خلف) پس عددی گویا است از طرفی طبق فرض $\alpha+\beta$ نیز گویا است می دانیم تفاضل دو عدد گویا، عددی گویا است در نتیجه

$(\alpha+2\beta)-(\alpha+\beta)=\beta \in \mathbb{Q}$ تناقض است زیرا طبق فرض مسئله β گنگ است $\Rightarrow$ فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

اثبات بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز):

گاهی برای اثبات بعضی قضیه‌ها از حکم استفاده می‌کنیم و به یک نتیجه منطق درست می‌رسیم و برای تکمیل اثبات باید نشان دهیم که تمام مراحل انجام شده بازگشت‌پذیر هستند این نوع اثبات را اثبات بازگشتی می‌گوییم

مثال ۱: اگر $a>0$ ثابت کنید: $a+\frac{1}{a}\geq 2$ (هماهنگ دیماه ۹۸)

$$a+\frac{1}{a}\geq 2 \Leftrightarrow a\left(a+\frac{1}{a}\right)\geq 2a \Leftrightarrow a^2+1\geq 2a \Leftrightarrow a^2-2a+1\geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2\geq 0$$

طبق اثبات بازگشتی حکم برقرار است.

مثال ۲: اگر $a<0$ ثابت کنید: $a+\frac{1}{a}<2$

$$a+\frac{1}{a}<2 \overset{a<0}{\Longleftrightarrow} a\left(a+\frac{1}{a}\right)>2a \Leftrightarrow a^2+1>2a \Leftrightarrow a^2-2a+1>0 \Leftrightarrow (a-1)^2>0$$

طبق اثبات بازگشتی حکم برقرار است.

مثال ۳: اگر a و b دو عدد حقیقی باشند ثابت کنید: $a^2+b^2\geq -4(a+b+2)$

$$a^2+b^2\geq -4(a+b+2) \Leftrightarrow a^2+b^2+4(a+b+2)\geq 0 \Leftrightarrow (a^2+4a+4)+(b^2+4b+4)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a+2)^2+(b+2)^2\geq 0$$ همواره درست است

طبق اثبات بازگشتی حکم برقرار است

(هماهنگ خرداد ۹۸)

مثال ۴: ثابت کنید به ازای هر دو عدد حقیقی و مثبت a و b:

(میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آنها کمتر نیست)

$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b\geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab}\geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$$

همواره درست است

طبق اثبات بازگشتی حکم برقرار است.

مثال ۵: (هماهنگ دیماه ۹۷): به روش بازگشتی ثابت کنید برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: (۱ نمره)

$$x^2+y^2+1 \geq xy+x+y$$

$$x^2+y^2+1 \geq xy+x+y \xLeftrightarrow{\times 2} 2x^2+2y^2+2 \geq 2xy+2x+2y \Leftrightarrow$$

$$(x^2-2x+1)+(y^2-2y+1)+(x^2-2xy+y^2) \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(x-y)^2 \geq 0$$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$, $(y-1)^2 \geq 0$ و $(x-y)^2 \geq 0$ همواره درست است

طبق اثبات بازگشتی حکم برقرار است.

مثال ۶ (هماهنگ شهریور ۹۸): برای هر سه عدد حقیقی x و y و z ثابت کنید: (۱٫۵ نمره)

$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+xz$$

$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+xz \xLeftrightarrow{\times 2} 2x^2+2y^2+2z^2 \geq 2xy+2yz+2xz$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2-2xy)+(y^2+z^2-2yz)+(x^2+z^2-2xz) \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2 \geq 0$$

نابرابری آخری همواره درست است پس با بازگشت روابط حکم برقرار است

مثال ۷: برای هر دو عدد حقیقی مثبت a و b نشان دهید:

$$a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2$$

$$a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2 \Leftrightarrow (a+b)(a^2-ab+b^2) \geq ab(a+b) \xLeftrightarrow{\div(a+b)}$$

$$a^2-ab+b^2 \geq ab \Leftrightarrow a^2-2ab+b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$$ همیشه درست

طبق اثبات بازگشتی حکم برقرار است.

مثال ۸: برای هر دو عدد حقیقی مثبت a و b ثابت کنید:

$$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}} \geq \frac{4}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}} \geq \frac{4}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{ab}} \geq \frac{4}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \Leftrightarrow (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \geq 4(\sqrt{ab})$$

$$\Leftrightarrow a+b+2\sqrt{ab} \geq 4\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$$ همیشه درست

طبق اثبات بازگشتی حکم برقرار است.

مثال ۹: برای هر سه عدد حقیقی a و b و c ثابت کنید:

$$a^2+b^2+c^2+3 \geq 2(a+b+c)$$

$$a^2+b^2+c^2+3 \geq 2(a+b+c) \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+3 \geq 2a+2b+2c \Leftrightarrow$$

$$a^2+b^2+c^2+1+1+1-2a-2b-2c \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2 \geq 0$$ همیشه درست

طبق اثبات بازگشتی حکم برقرار است.

مثال ۱۰: برای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید: $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 4$

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 4 \Leftrightarrow (a+b)\left(\frac{a+b}{ab}\right) \geq 4 \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow$$

$$a^2+b^2+2ab \geq 4ab \Leftrightarrow a^2+b^2-2ab \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$$ همیشه درست

طبق اثبات بازگشتی حکم برقرار است.

تمرین: با مثال نقض نشان دهید:

الف) مجموع دو عدد گنگ همواره گنگ نیست.

$a = 2+\sqrt{3}$

$b = 2-\sqrt{3}$

$$a+b = 2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3} = 4$$

ب) تفاضل دو عدد گنگ همواره گنگ نیست

$a = 5+\sqrt{2}$

$b = 3+\sqrt{2}$

$$a-b = 5+\sqrt{2}-3-\sqrt{2} = 2$$

ج) حاصلضرب دو عدد گنگ همواره گنگ نیست

$a = \sqrt{2}$

$b = \sqrt{8}$

$$a.b = \sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$$

د) حاصل تقسیم دو عدد گنگ همواره گنگ نیست

$a = \sqrt{27}$

$b = \sqrt{3}$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{27}{3}} = \sqrt{9} = 3$$

★ تمرینات مهم فصل ۱ درس ۱ با پاسخ ★

① هر یک از گزاره های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض رد کنید.

الف) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.

$x=2k+1$ ، $y=2k'+1$ ، $k, k' \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow x+y=2k+1+2k'+1=2k+2k'+2=2(\underbrace{k+k'+1}_{k''})=2k'' \quad k''\in \mathbb{Z}$$

زوج است

ب) برای هر دو عدد حقیقی x و y : $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

نادرست

$x=1$ ، $y=1$

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{x+y}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{1}+\sqrt{1}=2\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{x+y}\neq\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

ج) حاصلضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخشپذیر است.

چون در سه عدد متوالی حتماً یک عدد زوج داریم پس حاصلضربشان بر ۲ بخشپذیر است و چون از سه عدد متوالی حتماً یکی مضرب ۳ می باشد پس حاصلضربشان بر ۳ بخشپذیر است عددی که بر ۲ و ۳ بخشپذیر باشد بر ۶ بخشپذیر است

د) مجموع هر دو عدد گویا عددی گویا است.

$x=\frac{a}{b}$ ، $y=\frac{c}{d}$ $\quad a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ ، $b\neq 0$ ، $d\neq 0$ $\quad x+y=\frac{ad+bc}{bd}$

چون $ad+bc\in\mathbb{Z}$ و $bd\in\mathbb{Z}$ و $bd\neq 0$ پس $x+y$ هم عدد گویا است.

② اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد ثابت کنید a^2+b^2 زوج است.

اثبات: چون ab عددی فرد است پس a و b هر دو عدد فرد هستند

$a=2k+1$ ، $b=2k'+1$

$$\Rightarrow a^2+b^2=(2k+1)^2+(2k'+1)^2=4k^2+4k'^2+4k+4k'+2=2(\underbrace{2k^2+2k'^2+2k+2k'+1}_{k''})=2k''$$

عددی زوج است

③ درستی گزاره های زیر را با استفاده از روش برهان خلف ثابت کنید:

الف) اگر x یک عدد گنگ باشد ثابت کنید $\frac{1}{x}$ نیز گنگ است.

اثبات: فرض کنیم $\frac{1}{x}$ گنگ نباشد (فرض خلف) پس $\frac{1}{x}$ عدد گویاست می دانیم وارون هر عدد گویای مخالف صفر، عددی گویا است پس $\frac{1}{\frac{1}{x}}=x$ هم عددی گویا است یعنی x گویا است و این خلاف فرض است.

ب) اگر تابع f در $x=a$ پیوسته ولی تابع g در $x=a$ ناپیوسته باشد ثابت کنید $f+g$ در $x=a$ ناپیوسته است.

اثبات: فرض کنیم تابع $f+g$ در $x=a$ ناپیوسته نباشد پس پیوسته است
می‌دانیم تفاضل دو تابع پیوسته در $x=a$، تابعی پیوسته است (حسابان ۱)
پس تابع f-$g=f+g$-f هم در $x=a$ پیوسته است یعنی تابع g در $x=a$
پیوسته است و این خلاف فرض است.

---

④ اگر n یک عدد طبیعی باشد، آیا زوج بودن n و زوج بودن n^2 هم ارزند؟

n زوج باشد $\Rightarrow n=2k \Rightarrow n^2=4k^2=2(2k^2)=2k' \Rightarrow$ n^2 زوج است

حال اگر n^2 زوج باشد ثابت می‌کنیم n هم زوج است:

فرض کنیم n زوج نباشد (فرض خلف) پس n فرد است

$n=2k+1 \Rightarrow n^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1=2k'+1 \Rightarrow$ n^2 فرد

و این خلاف فرض است پس n هم زوج است پس: n^2 زوج $\Longleftrightarrow$ n زوج

---

⑤ به روش بازگشتی ثابت کنید: $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$ (x و y دو عدد حقیقی مخالف صفر)

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{xy}\geq 2 \Leftrightarrow x^2+y^2\geq 2xy \Leftrightarrow x^2+y^2-2xy\geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2\geq 0$$

---

⑥ عدد حقیقی مانند x ارائه کنید به طوری که: $x^3<x^2$

$$x=\frac{1}{2} \Rightarrow x^3=\frac{1}{8} \text{ و } x^2=\frac{1}{4} \quad x^3<x^2$$

---

⑦ اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد ثابت کنید $\alpha-\beta$ و $\alpha+2\beta$ گنگ هستند

می‌دانیم: $\alpha-\beta=2\alpha-(\alpha+\beta)$

α گنگ پس 2α گنگ است می‌دانیم تفاضل عدد گنگ 2α و گویای $\alpha+\beta$ عددی گنگ است پس $\alpha-\beta$ گنگ است.

می‌دانیم $\alpha+2\beta=\alpha+\beta+\beta$ چون β گنگ و $\alpha+\beta$ گویاست پس جمع آنها گنگ است یعنی $\alpha+2\beta$ گنگ است.

---

⑧ الف) ثابت کنید مربع و مکعب هر عدد فرد، عددی فرد است.

$$x=2k+1 \Rightarrow x^2=4k^2+4k+1=2(\underbrace{2k^2+2k}_{q})+1=2q+1 \quad \text{فرد}$$

$$x=2k+1 \Rightarrow x^3=8k^3+12k^2+6k+1=2(\underbrace{4k^3+6k^2+3k}_{q})+1=2q+1 \quad \text{فرد}$$

ب) میانگین پنج عدد طبیعی متوالی همان عدد وسطی است $\bar{x}=\frac{n-2+n-1+n+n+1+n+2}{5}=n$

ج) اگر $\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ ثابت کنید $a=b=0$

$$\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{a+b}=\frac{a+b}{ab} \Rightarrow (a+b)^2=ab \Rightarrow a^2+b^2+ab=0 \Rightarrow 2a^2+2b^2+2ab=0 \Rightarrow (a+b)^2+a^2+b^2=0 \Rightarrow a=b=0$$

درس ۲ : بخشپذیری در اعداد صحیح :

عدد صحیح a را بر عدد صحیح $b \neq 0$ بخشپذیر می‌گویند هرگاه عدد صحیح q پیدا شود بطوریکه $a=bq$ و آنرا بصورت $b|a$ می‌نویسند و می‌خوانند: b عاد می‌کند a را یا b می‌شمارد a را یا b شمارنده (مقسوم علیه) a است یا a بر b بخشپذیر است.

مثال)

$$-5|35 \Leftrightarrow 35=-5\times 7 \qquad 7|21 \Leftrightarrow 21=7\times 3$$

$$4|-12 \Leftrightarrow -12=4\times(-3) \qquad 3|0 \Leftrightarrow 0=3\times 0$$

$$3^4|3^9 \Leftrightarrow 3^9=3^4\times 3^5 \qquad a|a \Leftrightarrow a=a\times 1$$

مثال) جاهای خالی را پر کنید:

$$24=2\times 13 \Rightarrow 2|24 \text{ و } 13|24 \qquad a|1 \Rightarrow a=1 \text{ یا } a=-1$$

تذکر مهم ۱ : در سراسر فصل ۱ منظور از عدد، عدد صحیح است.

تذکر مهم ۲ : اگر عدد a بر عدد b بخشپذیر نباشد یا عدد b عدد a را عاد نکند می‌نویسیم : $b \nmid a$

ویژگی های رابطه عاد کردن :

ویژگی ۱ : اگر عدد a عدد b را بشمارد آنگاه هر مضرب صحیح عدد b را نیز می‌شمارد یعنی : $a|b \Leftrightarrow a|mb$

اثبات :
$$a|b \Rightarrow b=aq \overset{\times m}{\Rightarrow} mb=maq \Rightarrow mb=a(mq) \Rightarrow a|mb$$

مثال)
$$4|12 \Rightarrow 4|12\times 2 \text{ و } 4|12\times(-3) \text{ و } 4|12\times 5 \text{ و } \dots$$

نتیجه : اگر عدد a عدد b را بشمارد آنگاه b^2 و در حالت کلی b^n را می‌شمارد $(n\in\mathbb{N})$ یعنی :

$$a|b \Rightarrow a|b^2 \ , \ a|b^n \quad (n\in\mathbb{N})$$

اثبات :
$$a|b \Rightarrow b=aq \overset{\times b}{\Rightarrow} b^2=baq \Rightarrow b^2=a(bq) \Rightarrow a|b^2$$

$$a|b \Rightarrow b=aq \xrightarrow{\times b^{n-1}} b^n=b^{n-1}aq \Rightarrow b^n=a(b^{n-1}q) \Rightarrow a|b^n$$

مثال ۱: اگر $a|bc$ آیا می‌توان نتیجه گرفت که a حداقل یکی از دو عدد b و c را عاد می‌کند؟

جواب خیر زیرا:

$$3|6\times 9 \Rightarrow 3|6 \ , \ 3|9$$

$$3|6\times 5 \Rightarrow 3|6 \ , \ 3\nmid 5$$

$$6|3\times 4 \Rightarrow 6\nmid 3 \ , \ 6\nmid 4$$

مثال ۲: نشان دهید: $a|b \Leftrightarrow ka|kb$ ($k\in\mathbb{Z}$)

$$a|b \Rightarrow b=aq \xrightarrow{\times k} kb=kaq \Rightarrow ka|kb$$

$$ka|kb \Rightarrow kb=kaq \xrightarrow{\div k} b=aq \Rightarrow a|b$$

مثال ۳: عدد صحیح n را طوری تعیین کنید که $3n+7$ بر $2n-1$ بخشپذیر باشد:

حل: طبق ویژگی ۱ داریم:

$$\begin{cases} 2n-1 \mid 3n+7 \Rightarrow 2n-1 \mid 2(3n+7) \Rightarrow 2n-1 \mid 6n+14 & ① \\ 2n-1 \mid 2n-1 \Rightarrow 2n-1 \mid 3(2n-1) \Rightarrow 2n-1 \mid 6n-3 & ② \end{cases}$$

$$① - ② \Rightarrow 2n-1 \mid 6n+14-(6n-3) \Rightarrow 2n-1 \mid 17 \Rightarrow \begin{cases} 2n-1=1 \Rightarrow \boxed{n=1} \\ 2n-1=-1 \Rightarrow \boxed{n=0} \\ 2n-1=17 \Rightarrow \boxed{n=9} \\ 2n-1=-17 \Rightarrow \boxed{n=-8} \end{cases}$$

ویژگی ۲: اگر عدد a عدد b را بشمارد و عدد b عدد c را بشمارد آنگاه عدد a عدد c را می‌شمارد: $a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$ (خاصیت تعدی)

اثبات:
$$\begin{cases} a|b \Rightarrow b=aq_1 \\ b|c \Rightarrow c=bq_2 \end{cases} \Rightarrow c=(aq_1)q_2 \Rightarrow c=a(q_1q_2) \Rightarrow a|c$$

مثال) با استفاده از خاصیت تعدی در عاد کردن نشان دهید: $a|b \Rightarrow a|b^n$

$$\left.\begin{matrix} \text{فرض } a|b \\ \text{می‌دانیم } b|b^n \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تعدی}} a|b^n$$

ویژگی ۳: هرگاه عددی دو عدد را بشمارد آنگاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را می‌شمارد:

$$a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b\pm c$$

اثبات :
$$\left.\begin{array}{l} a|b \Rightarrow b=aq_1 \\ a|c \Rightarrow c=aq_2 \end{array}\right\} \Rightarrow b\pm c = a(\underbrace{q_1 \pm q_2}_{q}) \Rightarrow a|b\pm c$$

مثال ۱ : اگر $a|b+c$ آیا می‌توان همواره نتیجه گرفت که : $a|c$ یا $a|b$

خیر ← مثال نقض

$2|12 \Rightarrow 2|7+5 \Rightarrow 2\nmid 7$ یا $2\nmid 5$

(هماهنگ ـ خرداد ۹۹)
مثال ۲ : اگر عدد طبیعی a دو عدد $(9k+7)$ و $(7k+6)$ را عاد کند ثابت کنید : $a=1$ یا $a=5$ (۱ نمره)

$a|9k+7 \Longrightarrow a|7(9k+7) \Rightarrow a|63k+49$ (1)

$a|7k+6 \Rightarrow a|9(7k+6) \Rightarrow a|63k+54$ (2)

(1) و (2) $\Rightarrow a|(63k+54)-(63k+49) \Rightarrow a|5 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \in \mathbb{N} \\ \text{یا} \\ a=5 \in \mathbb{N} \end{cases}$

(هماهنگ ـ دیماه ۹۷۰) : اگر $a>1$ و $a|9k+4$ و $a|5k+3$ ثابت کنید a عددی اول است (۱ نمره)

$a|9k+4 \Rightarrow a|5(9k+4) \Rightarrow a|45k+20$ (1)

$a|5k+3 \Rightarrow a|9(5k+3) \Rightarrow a|45k+27$ (2)

(1) و (2) $\Rightarrow a|(45k+27)-(45k+20) \Rightarrow a|7 \xrightarrow[\text{اول } a]{a>1} \boxed{a=7}$

(هماهنگ ـ دیماه ۹۸) : اگر عدد طبیعی $a>1$ در دو شرط $a|4k+9$ و $a|6k+14$ صدق کند مقدار a را بیابید. (۱ نمره)

$a|4k+9 \Rightarrow a|6(4k+9) \Rightarrow a|24k+54$ (1)

$a|6k+14 \Rightarrow a|4(6k+14) \Rightarrow a|24k+56$ (2)

(1) و (2) $\Rightarrow a|(24k+56)-(24k+54) \Rightarrow a|2 \xrightarrow[a>1]{a\in\mathbb{N}} \boxed{a=2}$

ویژگی ۴: اگر $a|b$ و $b\neq 0$ در اینصورت: $|a|\leq|b|$

اثبات:

$$a|b \Rightarrow b=aq \xRightarrow{b\neq 0} q\neq 0 \xRightarrow{q\in\mathbb{Z}} |q|\geq 1$$

طرفین نامساوی اخیر را در $|a|$ ضرب می‌کنیم:

$$1\leq|q| \Rightarrow |a|\times 1\leq|a|\cdot|q| \Rightarrow |a|\leq|aq| \xRightarrow{b=aq} |a|\leq|b|$$

مثال) ثابت کنید اگر $a|b$ ، $b|a$ آنگاه $a=\pm b$

$$\left.\begin{array}{l} a|b \xRightarrow{\text{ویژگی ۴}} |a|\leq|b| \\ b|a \xRightarrow{\text{ویژگی ۴}} |b|\leq|a| \end{array}\right\} \Rightarrow |a|=|b| \Rightarrow a=\pm b$$

خواص بخشپذیری (عاد کردن) بطور کلی:

۱) $a|b \Rightarrow -a|b \ , \ a|-b \ , \ -a|-b$

۲) $a|b \Rightarrow a|kb \ , \ ka|kb \quad (k\in\mathbb{Z})$

۳) $a|b \Rightarrow a|b^n \ (n\in\mathbb{N}) \ , \ a^n|b^n \ (n\in\mathbb{N})$

۴) $a|b \Rightarrow |a|\leq|b| \quad (b\neq 0)$

۵) $a|b \Rightarrow a|mb \quad (m\in\mathbb{Z})$

۶) $a|b \ , \ b|a \Rightarrow a=\pm b$

۷) $a|b \ , \ a|c \Rightarrow a|b\pm c \ , \ a|mb\pm nc \quad (m,n\in\mathbb{Z})$

۸) $a|b \ , \ b|c \Rightarrow a|c$ (خاصیت تعدی)

۹) $a|b \ , \ c|d \Rightarrow ac|bd$

۱۰) $a|p \ , \ a\in\mathbb{N} \ , \ p\in$ اعداد اول $\Rightarrow a=1$ یا $a=p$

۱۱) $\forall k\leq n \Rightarrow k|n!$ مثال) $4|10! \ , \ 7|10! \ , \ 13|15!$

مثال) ثابت کنید اگر $a|b$ آنگاه $a|bc$ $(a,b,c\in\mathbb{Z})$

اثبات:

$$a|b \Rightarrow b=aq \xRightarrow{\times c} bc=a(cq) \Rightarrow bc=aq' \Rightarrow a|bc$$

مثال ۲: اگر $3a+4b \mid 5a-9b$ ثابت کنید: $3a+4b \mid a-30b$

$$3a+4b \mid 5a-9b \xrightarrow{\times 2} 3a+4b \mid 2(5a-9b) \Rightarrow 3a+4b \mid 10a-18b \quad (1)$$

$$3a+4b \mid 3a+4b \xrightarrow{\times 3} 3a+4b \mid 3(3a+4b) \Rightarrow 3a+4b \mid 9a+12b \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow 3a+4b \mid (10a-18b)-(9a+12b) \Rightarrow 3a+4b \mid a-30b$$

مثال ۳: به ازای چند عدد صحیح n، رابطه $n+1 \mid n^3+3n^2-7$ برقرار است؟

$$n+1 \mid n^3+3n^2-7 \quad (1)$$

$$n+1 \mid n+1 \xrightarrow{\times n^2} n+1 \mid n^2(n+1) \Rightarrow n+1 \mid n^3+n^2 \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow n+1 \mid (n^3+3n^2-7)-(n^3+n^2) \Rightarrow n+1 \mid 2n^2-7 \quad (3)$$

$$n+1 \mid n+1 \xrightarrow{\times 2n} n+1 \mid 2n(n+1) \Rightarrow n+1 \mid 2n^2+2n \quad (4)$$

$$(3),(4) \Rightarrow n+1 \mid (2n^2-7)-(2n^2+2n) \Rightarrow n+1 \mid -7-2n \quad (5)$$

$$n+1 \mid n+1 \xrightarrow{\times 2} n+1 \mid 2(n+1) \Rightarrow n+1 \mid 2n+2 \quad (6)$$

$$(5),(6) \Rightarrow n+1 \mid (-7-2n)+(2n+2) \Rightarrow n+1 \mid -5 \Rightarrow \begin{cases} n+1=1 \Rightarrow \boxed{n=0} \\ n+1=-1 \Rightarrow \boxed{n=-2} \\ n+1=5 \Rightarrow \boxed{n=4} \\ n+1=-5 \Rightarrow \boxed{n=-6} \end{cases}$$

چند نکته مهم ریاضی:

نکته ۱: $a-1 \mid a^n-1 \quad (n\in\mathbb{N})$

علت (حسابان) $\rightarrow (a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\dots+1)=a^n-1$

مثال: $8=9-1 \mid 9^n-1 \quad (n\in\mathbb{N})$ ، $4=5-1 \mid 5^n-1 \quad (n\in\mathbb{N})$

نکته ۲: $a-b \mid a^n-b^n \quad (n\in\mathbb{N})$

علت $\rightarrow (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+b^{n-1})=a^n-b^n$

مثال: $4=7-3 \mid 7^n-3^n$ ، $7=12-5 \mid 12^n-5^n$

نکته ۳: اگر n و k دو عدد طبیعی و $\frac{n}{k}\in\mathbb{N}$ آنگاه: $a^k-b^k \mid a^n-b^n$

مثال: $a^4-b^4 \mid a^{12}-b^{12} \quad (\frac{12}{4}\in\mathbb{N})$ (مثال) $a^3-b^3 \nmid a^8-b^8 \quad (\frac{8}{3}\notin\mathbb{N})$

مثال) همه عددهای دو رقمی را پیدا کنید که : $31 \mid 2^n - 1$

حل: می دانیم : $31 = 2^5 - 1$ پس :

$31 \mid 2^n - 1 \Rightarrow 2^5 - 1 \mid 2^n - 1 \Rightarrow \frac{n}{5} \in N \Rightarrow$ n باید مضرب ۵ باشد $\Rightarrow n \in \{10, 15, 20, \ldots, 95\}$

نکته ۴ : اگر P اول باشد و $a \mid p$ آنگاه: $a = \pm 1$ یا $a = \pm P$

قضیّهٔ تقسیم :

اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد با تقسیم a بر b ، اعداد صحیح و منحصر بفردی مانند q و r وجود دارند بطوریکه :

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline & q \\ - & \\ \hline r & \end{array} \qquad \begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leqslant r < b \end{cases}$$

a را مقسوم ، b را مقسوم علیه ، q را خارج قسمت و r را باقیمانده می گویند . باقیمانده هیچگاه منفی نبوده و از مقسوم علیه کوچکتر است

نکته ریاضی : خارج قسمت تقسیم a بر b برابر است با :

$q = [\frac{a}{b}]$ جزء صحیح

مثال ۱ : خارج قسمت و باقیمانده تقسیم (۴۸-) را بر ۵ بدست آورید.

$$q = \left[\frac{-48}{5}\right] = [-9.6] = -10 \xrightarrow[\text{تقسیم}]{\text{طبق رابطه}} -48 = 5(-10) + 2 \Rightarrow \boxed{r = 2}$$

مثال ۲ : باقیمانده تقسیم a بر ۱۵ برابر ۱ است. باقیمانده تقسیم ۲a-۶ را بر ۱۵ بدست آورید.

$$a = 15q + 1 \xrightarrow{\times 2} 2a = 15(2q) + 2 \Rightarrow 2a = 15q' + 2 \xrightarrow{-6} 2a - 6 = 15q' + 2 - 6$$

$$\Rightarrow 2a - 6 = 15q' - 4 \xrightarrow[\text{منفی باشد}]{\text{باقیمانده نباید}} 2a - 6 = 15q' - 15 + 11 \Rightarrow 2a - 6 = 15(q' - 1) + 11$$

$$\Rightarrow 2a - 6 = 15q'' + 11 \Rightarrow \boxed{r = 11}$$

مثال ۳: باقیمانده تقسیم اعداد m و n بر ۲۶ به ترتیب ۷ و ۲ است باقیمانده تقسیم $2m+5n$ را بر ۲۶ و ۱۳ پیدا کنید.

$$\left.\begin{array}{l} m=26q+7 \\ n=26q'+2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2m+5n=2(26q+7)+5(26q'+2)=26(\underbrace{2q+5q'}_{q''})+24$$

$$\Rightarrow 2m+5n=26q''+24 \Rightarrow \boxed{r=24}$$

باقیمانده تقسیم بر ۲۶

می دانیم باقیمانده باید از مقسوم علیه کوچکتر باشد پس:

$$2m+5n=26q''+24=13(2q'')+13+11=13(\underbrace{2q''+1}_{k})+11=13k+11$$

$$\Rightarrow \boxed{r=11}$$

باقیمانده تقسیم بر ۱۳

مثال ۴: باقیمانده تقسیم عدد a بر ۷ و ۶ به ترتیب برابر ۴ و ۳ است. باقیمانده تقسیم a بر ۴۲ را بدست آورید.

$$\begin{cases} a=7q+4 \xrightarrow{\times 6} 6a=42q+24 \quad (1) \\ a=6q'+3 \xrightarrow{\times 7} 7a=42q'+21 \quad (2) \end{cases} \qquad (2)-(1) \Rightarrow a=42(\underbrace{q'-q}_{q''})-3$$

$$\Rightarrow a=42q''-3 \Rightarrow a=42q''-42+39 \Rightarrow a=42(\underbrace{q''-1}_{k})+39$$

$$\Rightarrow a=42k+39 \Rightarrow \boxed{r=39}$$

مثال ۵: در تقسیم عدد طبیعی a بر عدد ۱۷۷، باقیمانده تقسیم سه برابر مربع خارج قسمت است. بزرگترین مقدار a را بدست آورید.

$$\left.\begin{array}{l} a=177q+r \\ r=3q^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 0\leqslant r<177 \Rightarrow 0\leqslant 3q^2<177 \Rightarrow 0\leqslant q^2<59$$

در رابطه فوق بیشترین مقدار q برابر ۷ است.

$$q=7 \Rightarrow a=177(7)+3(7)^2=1386 \text{ (بیشترین مقدار a)}$$

مثال ۶: در یک تقسیم ۲۵ واحد به مقسوم اضافه کرده ایم. از باقیمانده به اندازه $\frac{2}{7}$ مقسوم علیه کم و یک واحد به خارج قسمت اضافه می شود مقسوم علیه را حساب کنید.

$$a+25=b(q+1)+r-\frac{2}{7}b \xrightarrow{a=bq+r} bq+r+25=bq+b+r-\frac{2}{7}b$$

$$\Rightarrow 25=\frac{5}{7}b \Rightarrow \boxed{b=35}$$

مثال ۷ : (هماهنگ دیماه ۹۷) :

اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b|a+2$ در اینصورت باقیمانده تقسیم عدد (a^2+b^2+3) را بر ۸ بیابید. (۱٫۲۵ نمره)

حل : a عددی فرد است بنابراین $a+2$ عددی فرد است و $b|a+2$ بنابراین b نیز عددی فرد خواهد بود می دانیم مربع هر عدد فرد مضربی از ۸ به علاوه یک است پس :

$$\left.\begin{array}{l} a \text{ فرد} \Rightarrow a^2 = 8m+1 \\ b \text{ فرد} \Rightarrow b^2 = 8n+1 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2+b^2+3 = (8m+1)+(8n+1)+3 = 8(m+n)+5$$

$$\Rightarrow \boxed{r=5}$$

مثال ۸ : (هماهنگ شهریور ۹۸) :

اگر باقیمانده تقسیم a بر دو عدد ۶ و ۵ به ترتیب ۳ و ۲ باشد باقیمانده تقسیم عدد a را بر ۳۰ بیابید (۱٫۵ نمره)

$$a = 6q+3 \xrightarrow{\times 5} 5a = 30q+15 \quad (1)$$

$$a = 5q'+2 \xrightarrow{\times 6} 6a = 30q'+12 \quad (2) \qquad (2)-(1) \Rightarrow a = 30(q'-q)-3$$

باقیمانده نباید منفی باشد

$$\Rightarrow a = 30q''-30+27 \Rightarrow a = 30(\underbrace{q''-1}_{k})+27 = 30k+27 \Rightarrow \boxed{r=27}$$

مثال ۹ : (هماهنگ خرداد ۹۸) :

اگر باقیمانده تقسیم m و n بر ۱۳ به ترتیب اعداد ۲ و ۹ باشد در اینصورت باقیمانده تقسیم عدد $(5n-3m)$ بر ۱۳ را بدست آورید. (۱٫۵ نمره)

$$\left.\begin{array}{l} m = 13q+2 \xrightarrow{\times 3} 3m = 13(3q)+6 \\ n = 13q'+9 \xrightarrow{\times 5} 5n = 13(5q')+45 \end{array}\right\} \Rightarrow 5n-3m = 13(\underbrace{5q'-3q}_{q''})+39$$

$$\Rightarrow 5n-3m = 13q''+39 = 13(\underbrace{q''+3}_{k})+0 = 13k+0 \Rightarrow \boxed{r=0}$$

مثال ۱۰ : (هماهنگ خرداد ۹۹) :

اگر باقیمانده تقسیم عدد a بر ۴ برابر ۳ باشد در اینصورت باقیمانده تقسیم عدد $2a+3$ بر ۸ را بدست آورید (۱٫۲۵ نمره)

$$a = 4q+3 \Rightarrow 2a+3 = 2(4q+3)+3 = 8q+9 = 8q+8+1 = 8(\underbrace{q+1}_{q'})+1 = 8q'+1$$

$$\Rightarrow \boxed{r=1}$$

افراز اعداد صحیح :

عدد صحیح n را درنظر می‌گیریم به عنوان مثال اگر آن را بر ۴ تقسیم کنیم باقیمانده صفر یا ۱ یا ۲ یا ۳ می‌شود پس هر عدد صحیح را می‌توان به یکی از صورتهای $4k$ یا $4k+1$ یا $4k+2$ یا $4k+3$ نوشت به عبارت دیگر اعداد صحیح به ۴ زیر مجموعه افراز می‌شود اگر بر ۵ تقسیم می‌کردیم به ۵ زیر مجموعه بصورتهای $5k$ یا $5k+1$ یا $5k+2$ یا $5k+3$ یا $5k+4$ افراز می‌شد اینکه از کدام افراز استفاده کنیم بستگی به صورت مسئله دارد.

مثال ۱ : ثابت کنید ضرب دو عدد صحیح متوالی همواره زوج است یعنی :

$$2 \mid n(n+1)$$

حل : دو حالت برای n درنظر می‌گیریم :

$$n \text{ زوج} \Rightarrow n=2k \Rightarrow n(n+1)=\underbrace{2k(2k+1)}_{q}=2q=\text{زوج} \Rightarrow 2 \mid n(n+1)$$

$$n \text{ فرد} \Rightarrow n=2k+1 \Rightarrow n(n+1)=(2k+1)(2k+2)=2\underbrace{(2k+1)(k+1)}_{q}=2q=\text{زوج} \Rightarrow 2 \mid n(n+1)$$

مثال ۲ : اولاً : نشان دهید هر عدد فرد بصورت $4k+1$ یا $4k+3$ است

ثانیاً : ثابت کنید مربع هر عدد فرد در تقسیم بر ۸ دارای باقیمانده ۱ است

حل اولاً : می‌دانیم هر عدد صحیح به یکی از صورتهای $4k$ و $4k+1$ و $4k+2$ و $4k+3$ است . $4k$ و $4k+2$ زوج هستند پس هر عدد فرد به یکی از صورتهای $4k+1$ یا $4k+3$ می‌شود.

حل ثانیاً : نشان می‌دهیم مربع هر عدد فرد بصورت $8q+1$ است.

$$n=4k+1 \Rightarrow n^2=(4k+1)^2=16k^2+8k+1=8\underbrace{(2k^2+k)}_{q}+1=8q+1$$

$$n=4k+3 \Rightarrow n^2=(4k+3)^2=16k^2+24k+9=16k^2+24k+8+1=8\underbrace{(2k^2+3k+1)}_{q}+1=8q+1$$

مثال ۳ : فرض کنید $p>3$ عددی اول باشد نشان دهید p به یکی از دو صورت $6k+1$ یا $6k+5$ ممکن است باشد.

حل : طبق افراز اعداد صحیح ، هر عدد صحیح به یکی از صورتهای $6k$ یا $6k+1$ یا $6k+2$ یا $6k+3$ یا $6k+4$ یا $6k+5$ است . $6k$ و $6k+2$ و $6k+4$ زوج هستند

پس نمی‌توانند اول باشند، $4k+3$ هم مضرب ۳ است پس اول نیست
پس P به یکی از صورتهای $4k+1$ یا $4k+5$ است

بزرگترین مقسوم علیه مشترک (ب م م):
عدد طبیعی d را ب م م دو عدد a و b (که هردو باهم صفر نیستند) می‌گوئیم و می‌نویسیم $(a,b)=d$ هرگاه:

۱) d مقسوم علیه دو عدد باشد یعنی $d|a$ و $d|b$

۲) d از هر مقسوم علیه مشترک دلخواهی چون m بزرگتر باشد (m کوچکتر یا مساوی d باشد) یعنی: $\forall m>0,\ m|a,\ m|b \Rightarrow m\leqslant d$

مثال) ب م م ۱۲ و ۱۸ برابر ۶ می‌باشد زیرا:

$\{1,2,3,4,6,12\}$ = مجموعه مقسوم علیه‌های مثبت ۱۲

$\{1,2,3,6,9,18\}$ = مجموعه مقسوم علیه‌های مثبت ۱۸

$\{1,2,3,6\}$ = مجموعه مقسوم علیه‌های مثبت ۱۲ و ۱۸

ب م م ۱۲ و ۱۸ $=(12,18)=6$

مثالهای دیگر:

$(6,2)=2$ ، $(14,35)=7$ ، $(15,25)=5$

تذکر مهم:
دو عدد را نسبت به هم اول (متباین) می‌گویند هرگاه ب م م آنها برابر ۱ باشد

$(20,21)=1$ ، $(7,5)=1$ ، $(12,19)=1$ ، $(10,3)=1$

ویژگی های ب م م:

۱) علامت در ب م م بی تأثیر است یعنی: $(a,b)=(-a,-b)=(-a,b)=(a,-b)$

مثال) $(3,6)=(-3,-6)=(-3,6)=(3,-6)=3$

۲) اگر $a|b$ آنگاه: $(a,b)=|a|$

اثبات: باید نشان دهیم $|a|$ دو شرط ب م م را دارد.

شرط اول قبول است $\left.\begin{matrix}|a|\,|a\\ a|b\end{matrix}\right\}\Rightarrow |a|\,|b$ ، $|a|\,|a$

شرط دوم را بررسی می کنیم :

اگر $m>0$ و $m|a$ و $m|b$ آنگاه:
$\left.\begin{array}{l} m|a \Rightarrow |m| \leq |a| \\ (m>0) \Rightarrow m=|m| \end{array}\right\} \Rightarrow m \leq |a|$

پس شرط دوم هم برقرار است

نتیجه: $(a,a^2)=(a,a^3)=\dots=|a|$ یا $(2a,4a)=|2a|$

---

۳) اگر P عددی اول باشد و $a\in\mathbb{Z}$ و $P\nmid a$ آنگاه: $(P,a)=1$

اثبات :

فرض کنیم : $(P,a)=d \Rightarrow \begin{cases} d|P \xrightarrow{\text{اول } P} d=1 \text{ یا } d=P \\ d|a \end{cases}$

اگر $d=P \xrightarrow{d|a} P|a$ (تناقض است زیرا طبق فرض $P\nmid a$)

پس $d=1$ یا $(P,a)=1$ قابل قبول است.

---

۴) اگر دو عدد عامل مشترکی داشته باشند در ب م م می توانیم با فاکتور گیری آن عامل مشترک را بیرون بیاوریم یعنی: $(ka,kb)=|k|(a,b)$

مثال) مطلوبست محاسبه :

الف) $(75,35)=(5\times15,5\times7)=5(15,7)=5\times1=5$

ب) $(220,80)=(20\times11,20\times4)=20(11,4)=20\times1=20$

مثال: اگر a و b نسبت بهم اول باشند ثابت کنید $7a+5b$ و $3a+2b$ هم نسبت بهم اولند.

اثبات : کافی است ثابت کنیم : $(7a+5b,3a+2b)=1$

فرض کنیم : $(7a+5b,3a+2b)=d \Rightarrow \begin{cases} d|7a+5b \\ d|3a+2b \end{cases}$

$\begin{cases} d|7a+5b \xrightarrow{\times3} d|21a+15b \\ d|3a+2b \xrightarrow{\times7} d|21a+14b \end{cases} \xrightarrow{-} d|(21a+15b)-(21a+14b) \Rightarrow d|b$

$\begin{cases} d|7a+5b \xrightarrow{\times2} d|14a+10b \\ d|3a+2b \xrightarrow{\times5} d|15a+10b \end{cases} \xrightarrow{-} d|(14a+10b)-(15a+10b) \Rightarrow d|-a \Rightarrow d|a$

$d|a$ و $d|b$ و $(a,b)=1$ پس: $d=1$

مثال ۲: اگر a عددی فرد باشد ثابت کنید $(2a, a+2)=1$

حل: فرض کنیم $(2a, a+2)=d$ ثابت می‌کنیم: $d=1$

$$(2a,a+2)=d \Rightarrow \begin{cases} d|2a \\ d|a+2 \xRightarrow{\times 2} d|2a+4 \end{cases} \Rightarrow d|(2a+4)-2a \Rightarrow d|4 \Rightarrow d=1,2,4$$

چون a فرد است پس $a+2$ هم فرد است پس d زوج نیست یعنی فقط $d=1$ می‌تواند باشد.

کوچکترین مضرب مشترک دو عدد (ک م م):

دو عدد ناصفر a و b را درنظر بگیرید. عدد طبیعی c را ک م م دو عدد a و b می‌گوییم و می‌نویسیم $[a,b]=c$ هرگاه:

۱) عدد c مضرب هردو عدد a و b باشد یعنی: $a|c$, $b|c$

۲) c از هر مضرب مشترک دلخواهی مانند m کوچکتر باشد (m بزرگتر یا مساوی c باشد) به عبارت دیگر:

$\forall m>0 ,\ a|m ,\ b|m \Rightarrow c \leq m$

مثال) ک م م دو عدد ۳ و ۴ برابر ۱۲ است زیرا:

مجموعه مضربهای مثبت ۳ = {۳, ۶, ۹, ۱۲, ۱۵, ۱۸, ۲۱, ۲۴, ...}

مجموعه مضربهای مثبت ۴ = {۴, ۸, ۱۲, ۱۶, ۲۰, ۲۴, ...}

مجموعه مضربهای مشترک مثبت ۳ و ۴ = {۱۲, ۲۴, ...}

ک م م ۳ و ۴ $= [3,4] = 12$

مثالهای دیگر: $[1,4]=4$, $[3,6]=6$, $[7,5]=35$

ویژگی‌های ک م م:

۱) علامت در ک م م بی‌تاثیر است یعنی: $[a,b]=[-a,-b]=[-a,b]=[a,-b]$

۲) اگر $a|b$ آنگاه $[a,b]=|b|$

اثبات:
شرط اول را بررسی می‌کنیم: $\begin{cases} a|b \\ b||b| \end{cases} \Rightarrow a||b| \Rightarrow$ $|b|$ مضرب مشترک a و b است.

واضح است $b||b|$

شرط دوم را بررسی می‌کنیم:

فرض کنیم $m>0$ و $a|m$ و $b|m$ داریم:

$b|m \Rightarrow |b| \leqslant |m| \xRightarrow{m>0} |b| \leqslant m \Rightarrow$ $|b|$ کـمم a، b می‌باشد

۳) اگر دو عدد نسبت بهم اول باشند (یعنی ب‌مم دو عدد برابر 1 باشد) در اینصورت کـمم آن دو عدد برابر حاصلضرب آنها است یعنی:

$$(a,b)=1 \Rightarrow [a,b]=|ab|$$

مثال) $[3,5]=15$ $\quad [4,7]=28$ $\quad [4,11]=44$

۴) از ویژگی ۲ می‌توان نتیجه گرفت: $[a,a^2]=a^2$, $[a,a^n]=|a^n|$

$$[2a,4a]=|4a|$$

۵) $[ka,kb]=|k|[a,b]$ یعنی از عامل مشترک می‌توانیم فاکتور بگیریم

مثال) $[15,12]=[3\times5,3\times4]=3[5,4]=3\times20=60$

مثال) $[60,144]=[12\times5,12\times12]=12[5,12]=12\times60=720$

۶) $(a,b)|a \Rightarrow [a,(a,b)]=|a|$ و $(a,b)|[a,b] \Rightarrow [[a,b],(a,b)]=[a,b]$

تذکر مهم: رابطه بین کـمم و ب‌مم:

$$[a,b]=\frac{|a\times b|}{(a,b)}$$

$$[a,b]=(a,b) \Rightarrow |a|=|b|$$

مثال) اگر $(a,b)=|a|$ باشد $[3a,3b]$ را بدست آورید.

روش I:

$$[3a,3b]=\frac{|3a\times3b|}{(3a,3b)}=\frac{9|a||b|}{3(a,b)}=\frac{3|a||b|}{|a|}=3|b|$$

روش II: چون $(a,b)=|a|$ پس a مقسوم علیه b است یعنی $a|b$ پس $[a,b]=|b|$ درنتیجه:

$$[3a,3b]=3[a,b]=3|b|$$

(مطالب خارج از کتاب درسی) :

۱) $[a,b](a,b)=|ab|$ یا $[a,b]=\dfrac{|ab|}{(a,b)}$

۲) اگر $(a,b)=d$ آنگاه $(\dfrac{a}{d},\dfrac{b}{d})=1$ در نتیجه : $[a,b]=c$

$\dfrac{a}{d}=a' \Rightarrow a=a'd$ $\quad ab=[a,b](a,b)=cd$

$\dfrac{b}{d}=b' \Rightarrow b=b'd$ $\quad \Rightarrow a'db'd=cd \Rightarrow \boxed{a'b'd=c}$

مثال ۱ : اگر مجموع دو عدد ۱۰۲ و کوچکترین مضرب مشترک آنها ۴۳۲ باشد بزرگترین مقسوم علیه مشترک این دو عدد را بیابید .

$(a,b)=d \quad , \quad a=a'd \quad , \quad b=b'd \quad , \quad (a',b')=1$

$$\begin{cases} a+b=102 \Rightarrow a'd+b'd=102 \Rightarrow (a'+b')d=102 \quad ① \\ c=432 \Rightarrow a'b'd=432 \quad ② \end{cases}$$

$$\frac{①}{②} \Rightarrow \frac{(a'+b')\cancel{d}}{a'b'\cancel{d}}=\frac{102}{432}=\frac{17}{72} \Rightarrow \begin{cases} a'+b'=17 \\ a'b'=72 \\ (a',b')=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a'=9 \\ b'=8 \end{cases}$$

$$(a'+b')d=102 \Rightarrow (9+8)d=102 \Rightarrow d=\frac{102}{17}=6$$

مثال ۲ : از تساوی‌های $a-b=36$ و $[a,b]=120$ مقادیر a و b را بیابید.

$$\begin{cases} a-b=36 \\ [a,b]=120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a'd-b'd=36 \\ a'b'd=120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a'-b')d=36 \quad ① \\ a'b'd=120 \quad ② \end{cases}$$

$$\frac{①}{②} \Rightarrow \frac{(a'-b')\cancel{d}}{a'b'\cancel{d}}=\frac{36}{120}=\frac{3}{10} \Rightarrow \begin{cases} a'-b'=3 \\ a'b'=10 \\ (a',b')=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a'=5 \\ b'=2 \end{cases}$$

$$a'b'd=120 \Rightarrow 5\times2\times d=120 \Rightarrow d=12 \Rightarrow \begin{cases} a=a'd=5\times12 \Rightarrow \boxed{a=60} \\ b=b'd=2\times12 \Rightarrow \boxed{b=24} \end{cases}$$

★ تمرینات مهم فصل ۱ درس ۲ با پاسخ ★

۱) فرض می‌کنیم $ab=cd$ (a، b، c و d اعداد صحیح و ناصفرند) در اینصورت پنج رابطه عاد کردن از این تساوی نتیجه بگیرید.

$$ab=cd \xRightarrow{d=q} c\mid ab \qquad ab=cd \xRightarrow{c=q} d\mid ab \qquad cd=ab \xRightarrow{b=q} a\mid cd$$

$$cd=ab \xRightarrow{a=q} b\mid cd \qquad ab=cd \xRightarrow{q=1} cd\mid ab$$

---

۲) ثابت کنید اگر $a\mid b$ آنگاه $a\mid -b$ و $-a\mid b$ و $-a\mid -b$

$$a\mid b \Rightarrow b=aq \Rightarrow \begin{cases} -b=a(-q) \Rightarrow a\mid -b \\ b=-a(-q) \Rightarrow -a\mid b \\ -b=-aq \Rightarrow -a\mid -b \end{cases}$$

---

۳) اگر $a>1$ و $a\mid 9k+4$ و $a\mid 5k+3$، ثابت کنید a عددی اول است.

$$\left.\begin{array}{l} a\mid 9k+4 \xRightarrow{\times 5} a\mid 45k+20 \\ a\mid 5k+3 \xRightarrow{\times 9} a\mid 45k+27 \end{array}\right\} \Rightarrow a\mid (45k+27)-(45k+20) \Rightarrow a\mid 7$$

$$\Rightarrow a=1 \text{ یا } 7 \xRightarrow{a>1} \boxed{a=7} \text{ اول است}$$

---

۴) اگر $a\neq 0$ عددی صحیح و دو عدد $(7m+6)$ و $(6m+5)$ بر a بخشپذیر باشند ثابت کنید: $a=\pm 1$

$$\left.\begin{array}{l} a\mid 7m+6 \xRightarrow{\times 6} a\mid 42m+36 \\ a\mid 6m+5 \xRightarrow{\times 7} a\mid 42m+35 \end{array}\right\} \Rightarrow a\mid (42m+36)-(42m+35) \Rightarrow a\mid 1$$

$$\Rightarrow \boxed{a=\pm 1}$$

---

۵) اگر عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ باشد بطوریکه $5\mid 4k+1$ ثابت کنید: $25\mid 16k^2+28k+6$

$$\left.\begin{array}{l} 5\mid 4k+1 \Rightarrow 5^2\mid (4k+1)^2 \Rightarrow 25\mid 16k^2+8k+1 \\ 5\mid 4k+1 \xRightarrow{\times 5} 5\times 5\mid 5(4k+1) \Rightarrow 25\mid 20k+5 \end{array}\right\} \Rightarrow 25\mid (16k^2+8k+1)+(20k+5)$$

$$\Rightarrow 25\mid 16k^2+28k+6$$

---

۶) آیا از اینکه $a\mid b$ و $c\mid d$ همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a+c\mid b+d$ ؟

جواب: خیر با مثال نقض

$$\begin{array}{l} 2\mid 4 \\ 5\mid 20 \end{array} \Rightarrow 2+5 \nmid 4+20$$

۷) ثابت کنید: الف) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت بهم اول اند.
ب) هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اول اند.
(راهنمایی: فرض کنید $(m, m+1)=d$ و ثابت کنید $d|1$ و نتیجه بگیرید $d=1$)

الف) $(m, m+1)=d \Rightarrow \begin{cases} d|m \\ d|m+1 \end{cases} \Rightarrow d|(m+1)-m \Rightarrow d|1 \xRightarrow{d>0} d=1$

ب) فرض کنیم m و n دو عدد فرد متوالی باشند پس داریم:

$m=2k+1$, $n=2k+3$, $(2k+1, 2k+3)=d$

$\begin{matrix} d|2k+3 \\ d|2k+1 \end{matrix} \Rightarrow d|(2k+3)-(2k+1) \Rightarrow d|2 \xRightarrow{d>0} d=1$ یا ۲

اگر $d=2$ باشد $2|2k+1$ نادرست است زیرا $(2k+1)$ فرد است پس: $d=1$

۸) اگر $p \neq q$ و p و q هر دو عدد اول باشند ثابت کنید: $(p,q)=1$

فرض کنیم: $(p,q)=d \Rightarrow \begin{cases} d|p \Rightarrow d=1 \text{ یا } p \\ d|q \Rightarrow d=1 \text{ یا } q \end{cases}$

اگر $d=p$ باشد در اینصورت $p|q$ که این یک تناقض است (q اول است) و
اگر $d=q$ باشد در اینصورت $q|p$ که این یک تناقض است (p اول است) پس

$d=1 \Rightarrow (p,q)=1$

۹) اگر $m,n \in \mathbb{N}$ و $a,b \in \mathbb{Z}$ ثابت کنید: $m \le n$ و $a|b \Rightarrow a^m|b^n$

$\left. \begin{matrix} m \le n \Rightarrow a^m|a^n \\ a|b \Rightarrow a^n|b^n \end{matrix} \right\} \xRightarrow{\text{تعدی}} a^m|b^n$

۱۰) اگر باقیمانده تقسیم عدد a بر دو عدد ۷ و ۸ به ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقیمانده تقسیم عدد a را بر ۵۶ بیابید.

$\left. \begin{matrix} a=7q+5 \xRightarrow{\times 8} 8a=56q+40 \\ a=8q'+7 \xRightarrow{\times 7} 7a=56q'+49 \end{matrix} \right\} \Rightarrow 8a-7a=56(\underbrace{q-q'}_{q''})-9$

$\Rightarrow a=56q''-9=56q''-56+47 \Rightarrow a=56(q''-1)+47 \Rightarrow \boxed{r=47}$

۱۱) اگر n عددی صحیح باشد ثابت کنید: $3|n^3-n$

(راهنمایی: برای n سه حالت $n=3k$ و $n=3k+1$ و ... درنظر بگیرید و در هر حالت ثابت کنید $3|n^3-n$).

حل: طبق افراز اعداد صحیح، هر عدد صحیح به یکی از صورتهای $3k$ و $3k+1$ و $3k+2$ است.

$$n=3k \Rightarrow n^3-n=(3k)^3-3k=27k^3-3k=3(\underbrace{9k^3-k}_{q})=3q \Rightarrow 3|n^3-n$$

$$n=3k+1 \Rightarrow n^3-n=(3k+1)^3-(3k+1)=27k^3+27k^2+9k+1-3k-1=3(\underbrace{9k^3+9k^2+2k}_{q})$$

$$=3q \Rightarrow 3|n^3-n$$

$$n=3k+2 \Rightarrow n^3-n=(3k+2)^3-(3k+2)=27k^3+54k^2+36k+8-3k-2$$

$$=3(\underbrace{9k^3+17k^2+11k+2}_{q})=3q \Rightarrow 3|n^3-n$$

چون هر عدد صحیح n در تقسیم بر 3 به یکی از صورتهای $3k$ و $3k+1$ و $3k+2$ می باشد پس همواره $3|n^3-n$

---

۱۲) اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخشپذیر باشند ثابت کنید باقیمانده تقسیم نیز همواره بر n بخشپذیر است.

حل: فرض کنیم $n|a$ و $n|b$ و $a=bq+r$ درنتیجه: $a-bq=r$

$$\begin{cases} n|a \\ n|b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n|a \\ n|bq \end{cases} \Rightarrow n|a-bq \Rightarrow n|r$$

---

۱۳) اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+2$ یا $a+4$ بر 3 بخشپذیر است.

حل: فرض کنیم $a\in\mathbb{Z}$ باشد:

$a=3k \Rightarrow$ a بر 3 بخشپذیر است

$a=3k+1 \Rightarrow a+2=3k+1+2=3k+3=3(k+1) \Rightarrow$ $a+2$ مضرب 3 است

$a=3k+2 \Rightarrow a+4=3k+2+4=3k+6=3(k+2) \Rightarrow$ $a+4$ مضرب 3 است

---

۱۴) ثابت کنید تفاضل مکعب های دو عدد صحیح متوالی عددی فرد است

حل: فرض کنیم $n \in \mathbb{Z}$ باشد:

$$n^3-(n-1)^3 = n^3-(n^3-3n^2+3n+1) = 3n^2-3n+1 = 3\underbrace{(n)(n-1)}_{2q}+1 = 3(2q)+1$$

$$= 2\underbrace{(3q)}_{k}+1 = 2k+1 = \text{فرد}$$

تذکر:

n و $n-1$ دو عدد متوالی هستند و حاصلضرب دو عدد متوالی زوج است $n(n-1)=2q$

۱۵) ثابت کنید حاصلضرب سه عدد صحیح متوالی همواره بر $3!$ بخش‌پذیر است.

حل: می‌دانیم $6 = 3!$ و حاصلضرب ۳ عدد متوالی بصورت $A=(n-1)n(n+1)$ می‌باشد

طبق افراز اعداد صحیح داریم:

$n=6k \Rightarrow A=(6k-1)(6k)(6k+1) \Rightarrow 6|A$

$n=6k+1 \Rightarrow A=(6k)(6k+1)(6k+2) \Rightarrow 6|A$

$n=6k+2 \Rightarrow A=(6k+1)(6k+2)(6k+3) = 6(6k+1)(3k+1)(2k+1) \Rightarrow 6|A$

$n=6k+3 \Rightarrow A=(6k+2)(6k+3)(6k+4) = 6(3k+1)(2k+1)(6k+4) \Rightarrow 6|A$

$n=6k+4 \Rightarrow A=(6k+3)(6k+4)(6k+5) = 6(2k+1)(3k+2)(6k+5) \Rightarrow 6|A$

$n=6k+5 \Rightarrow A=(6k+4)(6k+5)(6k+6) = 6(6k+4)(6k+5)(k+1) \Rightarrow 6|A$

پس همواره $3! = 6|A$

۱۶) حاصل هر یک را بدست آورید. ($m \in \mathbb{Z}$)

الف) $([m^2, m], m^5) = (m^2, m^5) = m^2 \qquad (m|m^2 \text{ و } m^2|m^5)$

ب) $(2m, 6m^2) = (2m\times 1 \text{ و } 2m\times 3m) = 2m(1, 3m) = 2m\times 1 = 2m$

پ) $(3m+1 \text{ و } 3m+2) = ?$

$$(3m+1 \text{ و } 3m+2) = d \Rightarrow \begin{cases} d \mid 3m+1 \\ d \mid 3m+2 \end{cases} \Rightarrow d \mid (3m+2)-(3m+1) \Rightarrow d|1 \xrightarrow{d>0} d=1$$

ت) $[m^7 \text{ و } (m^2, m^3)] = [m^7, m^2] = m^7 \qquad (m^2|m^3 \text{ و } m^2|m^7)$

ث) $[(72, 48), 120] = [(24\times 3 \text{ و } 24\times 2), 120] = [24\underbrace{(3 \text{ و } 2)}_{=1} \text{ و } 120] = [24 \text{ و } 120]$

$= [24\times 1 \text{ و } 24\times 5] = 24[1 \text{ و } 5] = 24\times 5 = 120$

نکته ریاضی: حاصلضرب عاملهای مشترک با کمترین توان = ب‌م‌م

ک‌م‌م = حاصلضرب عاملهای مشترک و غیرمشترک با بیشترین توان

$24 = 2^3\times 3^1$

$30 = 2^1\times 3^1\times 5^1$

$(24, 30) = 2^1\times 3^1 = 6$

$[24, 30] = 2^3\times 3^1\times 5^1 = 120$

درس ۳: هم‌نهشتی در اعداد صحیح و کاربردها:

تعریف هم‌نهشتی:

دو عدد صحیح a و b را به سنج (پیمانه) طبیعی m همنهشت می‌گویند هرگاه $a-b$ بر m بخش‌پذیر باشد و می‌نویسند: $a \overset{m}{\equiv} b$
و می‌خوانیم a به سنج (پیمانه) m با b هم‌نهشت است به عبارت دیگر:

$$\forall a,b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}, \quad a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow m | a-b \Leftrightarrow a-b=mq$$

مثال)

$7 \overset{12}{\equiv} -5 \Leftrightarrow 12 | 7-(-5)$ و $-6 \overset{4}{\equiv} 2 \Leftrightarrow 4 | -6-2$

$13 \overset{9}{\equiv} -14 \Leftrightarrow 9 | 13-(-14)$ و $10 \overset{4}{\equiv} 2 \Leftrightarrow 4 | 10-2$ و $25 \overset{12}{\equiv} 1 \Leftrightarrow 12 | 25-1$

ویژگی‌های هم‌نهشتی:

1) $a \overset{m}{\equiv} a$ مثال) $3 \overset{8}{\equiv} 3 \Leftrightarrow 8 | 3-3$

2) $a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow b \overset{m}{\equiv} a$ مثال) $9 \overset{5}{\equiv} 4 \Leftrightarrow 5 | 9-4$ ، $4 \overset{5}{\equiv} 9 \Leftrightarrow 5 | 4-9$

3) $\left.\begin{matrix} a \overset{m}{\equiv} b \\ b \overset{m}{\equiv} c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} c$ (رابطه تعدی) $\left.\begin{matrix} 7 \overset{2}{\equiv} 5 \\ 5 \overset{2}{\equiv} 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 7 \overset{2}{\equiv} 3$

---

4) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} a+c \overset{m}{\equiv} b+c \\ a-c \overset{m}{\equiv} b-c \end{cases}$ (به دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی می‌توان عددی صحیح را اضافه یا از آن کم کرد)

اثبات:

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m | a-b \Rightarrow m | a+c-b-c \Rightarrow m | (a+c)-(b+c) \Rightarrow a+c \overset{m}{\equiv} b+c$$

---

5) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$ (دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی را می‌توان در عددی صحیح ضرب کرد)

اثبات:

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m | a-b \Rightarrow m | c(a-b) \Rightarrow m | ac-bc \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$$

عکس این ویژگی برقرار نیست یعنی اگر $ac \overset{m}{\equiv} bc$ لزوماً نمی‌توان نتیجه گرفت که $a \overset{m}{\equiv} b$
(قانون حذف در هم‌نهشتی در حالت کلی برقرار نیست)
$15 \overset{3}{\equiv} 12 \xRightarrow{\div 3} 5 \overset{3}{\not\equiv} 4$

۶) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n \ (n \in N)$ (دو طرف یک رابطه همنهشتی را می‌توان به توان n رساند)

اثبات: از اتحاد $(a^n - b^n) = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$ استفاده می‌کنیم

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid a-b \Rightarrow m \mid (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}) \Rightarrow m \mid a^n - b^n \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$$

عکس این ویژگی درست نیست: $۵^۲ \overset{۴}{\equiv} ۳^۲ \Rightarrow ۵ \overset{۴}{\not\equiv} ۳$

مثال) $۳ \overset{۴}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۳^{۱۰۰} \overset{۴}{\equiv} (-۱)^{۱۰۰} \Rightarrow ۳^{۱۰۰} \overset{۴}{\equiv} ۱$ مثال) $۷ \overset{۴}{\equiv} ۳ \Rightarrow ۷^۲ \overset{۴}{\equiv} ۳^۲$

---

۷) $\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ c \overset{m}{\equiv} d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ac \overset{m}{\equiv} bd \\ a+c \overset{m}{\equiv} b+d \\ a-c \overset{m}{\equiv} b-d \end{cases}$ (دو طرف دو رابطه هم نهشتی را که پیمانه‌های یکسان داشته باشند می‌توان باهم جمع یا ازهم منها و یا درهم ضرب کرد)

اثبات اولی:

$$\left.\begin{array}{l} a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid a-b \overset{\times c}{\Longrightarrow} m \mid ac-bc \\ c \overset{m}{\equiv} d \Rightarrow m \mid c-d \overset{\times b}{\Longrightarrow} m \mid bc-bd \end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} m \mid (ac-bc)+(bc-bd) \Longrightarrow$$

$$m \mid ac-bd \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bd$$

اثبات دومی:

$$\left.\begin{array}{l} a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid a-b \\ c \overset{m}{\equiv} d \Rightarrow m \mid c-d \end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} m \mid a-b+c-d \Rightarrow m \mid (a+c)-(b+d)$$

$$\Rightarrow a+c \overset{m}{\equiv} b+d$$

---

۸) $a = mq + r \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} r$ (اگر باقیمانده تقسیم a بر m مساوی با r باشد در اینصورت: $a \overset{m}{\equiv} r$)

اثبات:

$$a = mq + r \Rightarrow a - r = mq \Rightarrow m \mid a-r \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} r$$

نتیجه ۱: هرگاه بخواهیم کوچکترین عدد نامنفی و هم نهشت با عدد a به پیمانه m را مشخص کنیم کافی است عدد a را بر m تقسیم کرده و باقیمانده را بدست آوریم

مثال) $۲۹۴ \overset{۱۱}{\equiv} ?$ $\quad ۲۹۴ \div ۱۱ = ۲۶,\ ۲۸۶,\ ۱۰$ $\quad$ پس: $۲۹۴ \overset{۱۱}{\equiv} ۱۰$

نتیجه ۲: اگر دو عدد a و b در تقسیم بر عدد طبیعی m، هم باقیمانده باشند در اینصورت $a \overset{m}{\equiv} b$

مثال)

$$\begin{array}{r|l} 13 & 5 \\ \hline -10 & 2 \\ \hline (3) & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 8 & 5 \\ \hline -5 & 1 \\ \hline (3) & \end{array} \qquad 13 \overset{5}{\equiv} 8$$

مثال ۱: باقیمانده تقسیم عدد $A=(27)^7+19$ را بر ۱۳ بیابید.

$$27 = 13\times 2+1 \Rightarrow 27 \overset{13}{\equiv} 1 \Rightarrow (27)^7 \overset{13}{\equiv} 1^7 \Rightarrow (27)^7 \overset{13}{\equiv} 1 \quad (1)$$

$$19 = 13\times 1+6 \Rightarrow 19 \overset{13}{\equiv} 6 \quad (2)$$

$$(1)+(2) \Rightarrow (27)^7+19 \overset{13}{\equiv} 1+6 \Rightarrow A \overset{13}{\equiv} 7 \xRightarrow{\text{نتیجه ۱}} \boxed{r=7}$$

مثال ۲: باقیمانده تقسیم عدد $A=(1000)^{13}\times 12+10$ را بر ۷ بیابید.

$$\left.\begin{array}{l} 1000 = 7\times 142+6 \Rightarrow 1000 \overset{7}{\equiv} 6 \\ 6 \overset{7}{\equiv} -1 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{تعدی}} 1000 \overset{7}{\equiv} -1 \Rightarrow (1000)^{13} \overset{7}{\equiv} (-1)^{13}$$

$$\Rightarrow (1000)^{13} \overset{7}{\equiv} -1 \Rightarrow (1000)^{13}\times 12 \overset{7}{\equiv} (-1)\times 12 = -12 \Rightarrow (1000)^{13}\times 12+10 \overset{7}{\equiv} -12+10$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow (1000)^{13}\times 12+10 \overset{7}{\equiv} -2 \\ \text{از طرفی} \quad -2 \overset{7}{\equiv} 5 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{تعدی}} (1000)^{13}\times 12+10 \overset{7}{\equiv} 5 \Rightarrow \boxed{r=5}$$

مثال ۳: باقیمانده تقسیم عدد $3\times(27)^{100}+15$ را بر ۱۳ بدست آورید.

$$27 = 13\times 2+1 \Rightarrow 27 \overset{13}{\equiv} 1 \Rightarrow (27)^{100} \overset{13}{\equiv} 1^{100} \Rightarrow (27)^{100} \overset{13}{\equiv} 1 \Rightarrow$$

$$3\times(27)^{100} \overset{13}{\equiv} 1\times 3 \Rightarrow 3\times(27)^{100} \overset{13}{\equiv} 3 \Rightarrow 3\times(27)^{100}+15 \overset{13}{\equiv} 3+15 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 3\times(27)^{100}+15 \overset{13}{\equiv} 18 \\ \text{از طرفی} \quad 18 \overset{13}{\equiv} 5 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{تعدی}} 3\times(27)^{100}+15 \overset{13}{\equiv} 5 \Rightarrow \boxed{r=5}$$

مثال ۴: باقیمانده تقسیم 2^{30} بر ۱۷ را بدست آورید.

$$16 \overset{17}{\equiv} -1 \Rightarrow 2^4 \overset{17}{\equiv} -1 \Rightarrow (2^4)^7 \overset{17}{\equiv} (-1)^7 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2^{28} \overset{17}{\equiv} -1 \\ \text{از طرفی} \quad 2^2 \overset{17}{\equiv} 4 \end{array}\right\} \xRightarrow{\times} 2^{30} \overset{17}{\equiv} -4 \overset{17}{\equiv} 13 \Rightarrow \boxed{r=13}$$

مثال ۵: (هماهنگ دیماه ۹۸) باقیمانده تقسیم 13^{22} را بر ۱۷ بدست آورید (۱ نمره)

$$13 \overset{17}{\equiv} -4 \Rightarrow 13^{2} \overset{17}{\equiv} (-4)^{2} \Rightarrow 13^{2} \overset{17}{\equiv} 16 \overset{17}{\equiv} -1 \Rightarrow (13^{2})^{11} \overset{17}{\equiv} (-1)^{11} \Rightarrow 13^{22} \overset{17}{\equiv} -1$$

$$\xrightarrow{-1 \overset{17}{\equiv} 16} 13^{22} \overset{17}{\equiv} 16 \Rightarrow \boxed{r=16}$$

(هماهنگ خرداد ۹۹)

مثال ۶: باقیمانده تقسیم 7^{30} بر ۱۵ را بدست آورید. (۱/۵ نمره)

$$49 \overset{15}{\equiv} 4 \Rightarrow 7^{2} \overset{15}{\equiv} 4 \Rightarrow (7^{2})^{2} \overset{15}{\equiv} 4^{2} \Rightarrow 7^{4} \overset{15}{\equiv} 16 \overset{15}{\equiv} 1 \Rightarrow (7^{4})^{7} \overset{15}{\equiv} 1^{7}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow 7^{28} \overset{15}{\equiv} 1 \\ 7^{2} \overset{15}{\equiv} 4 \quad \text{از طرفی} \end{array}\right\} \Rightarrow 7^{28} \times 7^{2} \overset{15}{\equiv} 1 \times 4 \Rightarrow 7^{30} \overset{15}{\equiv} 4 \Rightarrow \boxed{r=4}$$

مثال ۷: اگر دو عدد $5a-7$ و $4a+2$ رقم یکان برابر داشته باشند رقم یکان عدد $7a+4$ را بدست آورید.

حل: دو عدد رقم یکان برابر دارند یعنی باقیمانده تقسیم هردو عدد بر ۱۰، یکسان است. درنتیجه هردو عدد به پیمانه ۱۰ هم‌نهشت هستند

$$5a-7 \overset{10}{\equiv} 4a+2 \Rightarrow 5a-4a \overset{10}{\equiv} 2+7 \Rightarrow a \overset{10}{\equiv} 9 \Rightarrow 7a \overset{10}{\equiv} 63$$

$\Rightarrow 7a+4 \overset{10}{\equiv} 63+4 \Rightarrow 7a+4 \overset{10}{\equiv} 67 \overset{10}{\equiv} 7 \Rightarrow$ رقم یکان عدد $7a+4$ برابر ۷ است.

مثال ۸: باقیمانده تقسیم a بر ۷ برابر ۳ است. باقیمانده تقسیم عدد $a^{2}+2a-1$ را بر ۷ پیدا کنید

$$\left.\begin{array}{l} a \overset{7}{\equiv} 3 \Rightarrow a^{2} \overset{7}{\equiv} 9 \\ a \overset{7}{\equiv} 3 \Rightarrow 2a \overset{7}{\equiv} 6 \end{array}\right\} \Rightarrow a^{2}+2a \overset{7}{\equiv} 9+6 \Rightarrow a^{2}+2a-1 \overset{7}{\equiv} 15-1$$

$$\Rightarrow a^{2}+2a-1 \overset{7}{\equiv} 14 \overset{7}{\equiv} 0 \Rightarrow \boxed{r=0}$$

9) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b+mk \\ a+mt \overset{m}{\equiv} b+mk \\ a-mt \overset{m}{\equiv} b-mk \end{cases}$

می‌توان به یک طرف یا دو طرف یک رابطه هم نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا کم کرد.

(مثال $7 \overset{5}{\equiv} 2 \Rightarrow 7+3\times5 \overset{5}{\equiv} 2+5\times5 \Rightarrow 22 \overset{5}{\equiv} 27$ برقرار است ✓

مثال) باقیمانده تقسیم عدد $1!+2!+3!+\dots+100!$ را بر ۲۴ بدست آورید.

حل: می دانیم $4!=24$ پس از $4!$ به بعد همه فاکتوریل ها مضرب ۲۴ هستند پس همنهشت صفر می شوند.

$$1! \overset{24}{\equiv} 1,\quad 2! \overset{24}{\equiv} 2,\quad 3! \overset{24}{\equiv} 6,\quad 4! \overset{24}{\equiv} 0,\quad 5! \overset{24}{\equiv} 0,\quad \vdots \quad 100! \overset{24}{\equiv} 0$$

$$1!+2!+3!+\dots+100! \overset{24}{\equiv} 1+2+6+0+0+\dots$$

$$\Rightarrow 1!+2!+3!+\dots+100! \overset{24}{\equiv} 9 \Rightarrow \boxed{r=9}$$

---

۱۰) $ac \overset{m}{\equiv} bc \ , \ (c,m)=d \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$

اگر بخواهیم دو طرف یک رابطه هم نهشتی را بر عددی تقسیم کنیم باید پیمانه آن هم نهشتی را بر ب م م آن عدد و پیمانه تقسیم کنیم

(مثال $24 \overset{3}{\equiv} 12 \Rightarrow 4\times6 \overset{3}{\equiv} 4\times3 \xrightarrow[\div 4]{(4,3)=1} 6 \overset{\frac{3}{1}}{\equiv} 3 \Rightarrow 6 \overset{3}{\equiv} 3$

کلاس (دسته های) هم نهشتی:

مجموعه همه اعداد صحیح که در تقسیم بر m باقیمانده ای برابر r دارند را کلاس یا دسته هم نهشتی r به پیمانه m می گوئیم و آنرا با $[r]_m$ نمایش می دهیم به عبارت دیگر:

$$[r]_m = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = mk+r \ , k \in \mathbb{Z}\}$$

در تقسیم اعداد صحیح بر m دقیقاً m باقیمانده به وجود می آید پس مجموعه اعداد صحیح دقیقاً به m کلاس یا دسته هم نهشتی افراز می شود

به عنوان مثال می دانیم هر عدد صحیح به یکی از صورتهای $4k$ و $4k+1$ و $4k+2$ و $4k+3$ است (افراز اعداد صحیح) می دانیم با باقیمانده تقسیم هر

عدد صحیح بر ۴ برابر ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۳ است اگر مجموعه اعدادی که در تقسیم بر ۴ باقیمانده‌ای برابر صفر دارند را با $[0]_4$ و مجموعه اعدادی که در تقسیم بر ۴ باقیمانده‌ای برابر یک دارند را با $[1]_4$ و ... نشان دهیم خواهیم داشت:

$$[0]_4=\{x\in\mathbb{Z} \mid x\overset{4}{\equiv}0\}=\{x\in\mathbb{Z} \mid x=4k\ ,\ k\in\mathbb{Z}\}=\{\dots,-8,-4,0,4,8,\dots\}$$

$$[1]_4=\{x\in\mathbb{Z} \mid x\overset{4}{\equiv}1\}=\{x\in\mathbb{Z} \mid x=4k+1\ ,\ k\in\mathbb{Z}\}=\{\dots,-7,-3,1,5,9,\dots\}$$

$$[2]_4=\{x\in\mathbb{Z} \mid x\overset{4}{\equiv}2\}=\{x\in\mathbb{Z} \mid x=4k+2,\ k\in\mathbb{Z}\}=\{\dots,-6,-2,2,6,10,\dots\}$$

$$[3]_4=\{x\in\mathbb{Z} \mid x\overset{4}{\equiv}3\}=\{x\in\mathbb{Z} \mid x=4k+3,\ k\in\mathbb{Z}\}=\{\dots,-5,-1,3,7,11\}$$

مثال) عدد ۳۸۲۱ به کدام کلاس هم نهشتی به پیمانه ۷ تعلق دارد؟

حل: باقیمانده تقسیم ۳۸۲۱ بر ۷ برابر ۶ است پس عدد ۳۸۲۱ به کلاس $[6]_7$ تعلق دارد. یعنی در مجموعه اعداد صحیحی قرار دارد که باقیمانده تقسیم همه آن عددها بر ۷ برابر ۶ است.

$$\begin{array}{r|l} 3821 & 7 \\ \hline & 545 \\ 6 & \end{array}$$

به دست آوردن باقیمانده تقسیم بر اعداد خاص:

نکته ۱: باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۳ برابر است با باقیمانده تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۳ یعنی:

$$\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_0}\overset{3}{\equiv}a_0+a_1+\dots+a_n$$

مثال) باقیمانده تقسیم عدد $A=598348$ را بر ۳ بدون انجام عمل تقسیم بیابید.

$$598348\overset{3}{\equiv}5+9+8+3+4+8=37\overset{3}{\equiv}1 \Rightarrow \boxed{r=1}$$

نکته ۲: باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۹ برابر است با باقیمانده تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۹ یعنی:

$$\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_0}\overset{9}{\equiv}a_0+a_1+\dots+a_n$$

مثال) باقیمانده تقسیم عدد ۲۷۱۳۹۱ را بر عدد ۹ بدون انجام عمل تقسیم بیابید.

$$۲۷۱۳۹۱ \overset{۹}{\equiv} ۲+۷+۱+۳+۹+۱ = ۲۳ \overset{۹}{\equiv} ۵ \Rightarrow \boxed{r=۵}$$

نکته ۳: برای بدست آوردن باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۱۱، بین ارقام را از سمت راست یک در میان + و − قرار می‌دهیم.

مثال) باقیمانده تقسیم عدد ۵۷۳۴۱۶ را بر ۱۱ بدون انجام عمل تقسیم بیابید.

$$۵۷۳۴۱۶ \overset{۱۱}{\equiv} +۶-۱+۴-۳+۷-۵ = ۸ \Rightarrow \boxed{r=۸}$$

$$۷۳۶۱ \overset{۱۱}{\equiv} +۱-۶+۳-۷ = -۹ \overset{۱۱}{\equiv} ۲ \Rightarrow \boxed{r=۲}$$

نکته ۴: برای بدست آوردن باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۴ و ۲۵ و ۵۰ و ۱۰۰ کافی است دو رقم سمت راست آن عدد را در نظر بگیریم.

$$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0} \overset{۴}{\equiv} \overline{a_1 a_0} \qquad \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0} \overset{۲۵}{\equiv} \overline{a_1 a_0}$$

$$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0} \overset{۵۰}{\equiv} \overline{a_1 a_0} \qquad \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0} \overset{۱۰۰}{\equiv} \overline{a_1 a_0}$$

مثال) باقیمانده تقسیم عدد ۳۸۵۲۲۷ را بر ۴ بدون انجام عمل تقسیم بیابید.

$$۳۸۵۲۲۷ \overset{۴}{\equiv} ۲۷ \overset{۴}{\equiv} ۳ \Rightarrow \boxed{r=۳}$$

نکته ۵: برای بدست آوردن باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۸ کافی است سه رقم سمت راست آن عدد را در نظر بگیریم.

مثال) باقیمانده تقسیم عدد ۷۹۶۸۵۳۴ را بر ۸ بدون انجام عمل تقسیم بیابید.

$$۷۹۶۸۵۳۴ \overset{۸}{\equiv} ۵۳۴ \overset{۸}{\equiv} ۶ \Rightarrow \boxed{r=۶}$$

تمرین: باقیمانده تقسیم عدد چهار رقمی $\overline{۳a۲۶}$ بر ۹ برابر ۳ است. رقم a را بدست آورید.

a رقم است $\Rightarrow a \in \{۰, ۱, ۲, \dots, ۹\}$

$$\overline{۳a۲۶} \overset{۹}{\equiv} ۳+a+۲+۶ \overset{۹}{\equiv} ۳ \Rightarrow ۱۱+a \overset{۹}{\equiv} ۳ \Rightarrow ۸+a \overset{۹}{\equiv} ۰ \Rightarrow \boxed{a=۱}$$

نکته ۶ : برای بدست آوردن باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۲ و ۵ و ۱۰ کافی است رقم یکان آن عدد را در نظر بگیریم.

$$\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_0} \overset{2}{\equiv} a_0 \qquad \overline{a_n a_{n-1}\cdots a_0} \overset{5}{\equiv} a_0 \qquad \overline{a_n a_{n-1}\cdots a_0} \overset{10}{\equiv} a_0$$

مثال) باقیمانده تقسیم عدد ۸۵۳۹۴۷ را بر ۲ و ۵ و ۱۰ بدون انجام عمل تقسیم بیابید.

$$853947 \overset{2}{\equiv} 7 \overset{2}{\equiv} 1 \Rightarrow \boxed{r=1}$$

$$853947 \overset{5}{\equiv} 7 \overset{5}{\equiv} 2 \Rightarrow \boxed{r=2} \qquad 853947 \overset{10}{\equiv} 7 \Rightarrow \boxed{r=7}$$

تذکر مهم :

$$\begin{cases} 10^n \overset{11}{\equiv} 1 & (\text{زوج باشد } n) \\ 10^n \overset{11}{\equiv} -1 & (\text{فرد باشد } n) \end{cases}$$

محاسبه روز هفته برحسب تاریخ :

یکی از کاربردهای هم‌نهشتی این است که پیدا کنیم فلان تاریخ، چند شنبه است. می‌دانیم هر روز از روزهای هفته مثلاً شنبه، پس از گذشت ۷ روز دوباره تکرار می‌شود. به عنوان مثال اگر ۱۲ فروردین در یک سال یکشنبه باشد در این صورت ۱۹=۷+۱۲ فروردین و ۲۶=۷+۱۹ فروردین نیز یکشنبه می‌باشد همچنین می‌دانیم شش ماه اول سال همگی ۳۱ روزه و شش ماه دوم سال غیر از اسفند (که به جز سال کبیسه، ۲۹ روز است) همگی ۳۰ روزه می‌باشند.

مثال ۱ : اگر ۱۴ اردیبهشت ۲شنبه باشد، ۱۷ آذر چند شنبه است؟

حل : ۱۴ اردیبهشت را متناظر صفر می‌گیریم و بقیه را طبق جدول زیر جلو می‌رویم (هم‌نهشتی به پیمانه ۷)

دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنج‌شنبه	جمعه	شنبه	یکشنبه
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

۱۷=۱۴-۳۱ = روزهای باقیمانده اردیبهشت

۴×۳۱ = روزهای خرداد، تیر، مرداد و شهریور

۲×۳۰ = روزهای مهر و آبان

۱۷ روز در آذر

$$17+(4\times 31)+(2\times 30)+17 \overset{7}{\equiv} 218 \overset{7}{\equiv} 1$$

در جدول سه شنبه متناظر با عدد ۱ است پس ۱۷ آذر سه شنبه است.

مثال ۲ : اگر در یک سال ، اول مهر شنبه باشد در این صورت ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی است،

شنبه	یک شنبه	دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه	پنج شنبه	جمعه
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

۲۹ = ۱ - ۳۰ = روزهای باقیمانده در مهرماه

۳ × ۳۰ = روزهای آبان و آذر و دی

۱۲ روز در بهمن

$$29+(3\times 30)+12 \overset{7}{\equiv} 131 \overset{7}{\equiv} 5$$

در جدول پنج شنبه متناظر با عدد ۵ است پس ۱۲ بهمن پنجشنبه است

مثال ۳: اگر ۲۲ بهمن در یک سال پنجشنبه باشد ۳ خرداد همان سال چه روزی از هفته است؟

پنج شنبه	جمعه	شنبه	یک شنبه	دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

۲۸ = ۳ - ۳۱ = روزهای باقیمانده خرداد

۹۳ = ۳ × ۳۱ = سه ماه تابستان

۱۲۰ = ۴ × ۳۰ = روزهای مهر، آبان، آذر و دی

۲۲ روز در بهمن ماه

۲۶۳ = ۲۲ + ۱۲۰ + ۹۳ + ۲۸ = کل روزها

چون باید از ۲۲ بهمن تا ۳ خرداد عقب برویم آن را منفی می گیریم

$$-263 \overset{7}{\equiv} -4 \overset{7}{\equiv} 3$$ سوم خرداد یکشنبه است $(-263 = 7\times(-37)-4)$

معادله هم نهشتی :

یک رابطه هم نهشتی همراه با مجهولی چون x به فرم $ax \overset{m}{\equiv} b$ را یک معادله هم نهشتی می نامیم و منظور از حل معادله هم نهشتی پیدا کردن همه جوابهایی چون $x_0 \in \mathbb{Z}$ است که در این معادله صدق کنند یعنی: $ax_0 \overset{m}{\equiv} b$ $(a,b \in \mathbb{Z})$

قضیه: معادله هم نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $(a,m)\mid b$

مثال ۱: جوابهای عمومی معادله $4x \overset{5}{\equiv} 17$ را بدست آورید.

حل: $(4,5)=1$ و $1|17$ پس معادله دارای جواب است.

$$\left.\begin{array}{l} 4x \overset{5}{\equiv} 17 \\ 17 \overset{5}{\equiv} 2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تعدی}} 4x \overset{5}{\equiv} 2 \xrightarrow{\text{ویژگی ۹}} 4x \overset{5}{\equiv} 2+(2\times 5) \Rightarrow 4x \overset{5}{\equiv} 12$$

$$\xrightarrow[\div 4]{(4,5)=1} x \overset{\frac{5}{1}}{\equiv} 3 \Rightarrow x \overset{5}{\equiv} 3 \Rightarrow 5|x-3 \Rightarrow x-3=5k \Rightarrow \boxed{x=5k+3} \quad (k\in Z)$$

(ویژگی ۱۰)

یعنی ۵ برابر اعداد صحیح به اضافه ۳ جوابهای معادله بالا هستند

مثال ۲: جوابهای عمومی معادله $4x \overset{6}{\equiv} 18$ را بدست آورید.

حل: چون $(4,6)=2$ و $2|18$ پس معادله دارای جواب است.

$$4x \overset{6}{\equiv} 18 \xrightarrow[\div 2]{(4,6)=2} 2x \overset{\frac{6}{2}}{\equiv} 9 \Rightarrow 2x \overset{3}{\equiv} 9 \Rightarrow 2x \overset{3}{\equiv} 9+(1\times 3)$$

$$\Rightarrow 2x \overset{3}{\equiv} 12 \xrightarrow[\div 2]{(2,3)=1} x \overset{\frac{3}{1}}{\equiv} 6 \Rightarrow x \overset{3}{\equiv} 6 \Rightarrow 3|x-6 \Rightarrow x-6=3k \Rightarrow \boxed{x=3k+6} \quad (k\in Z)$$

یعنی سه برابر اعداد صحیح به اضافه ۶ جوابهای معادله بالا هستند

مثال ۳: معادله هم نهشتی $434x \overset{11}{\equiv} 68$ را حل کنید.

حل: ابتدا ضرایب را کوچک می کنیم

$$434 \overset{11}{\equiv} +4-3+4 \Rightarrow 434 \overset{11}{\equiv} 5$$

$$68 \overset{11}{\equiv} +8-6 \Rightarrow 68 \overset{11}{\equiv} 2$$

$$434x \overset{11}{\equiv} 68 \Rightarrow 5x \overset{11}{\equiv} 2 \Rightarrow 5x \overset{11}{\equiv} 2+(3\times 11) \Rightarrow 5x \overset{11}{\equiv} 35 \xrightarrow[\div 5]{(5,11)=1} x \overset{11}{\equiv} 7$$

$$\Rightarrow 11|x-7 \Rightarrow x-7=11k \Rightarrow \boxed{x=11k+7} \quad k\in Z$$

مثال ۴: معادله هم نهشتی $173x \overset{9}{\equiv} 231$ را حل کنید.

حل: ابتدا ضرایب را کوچک می کنیم

$$173 \overset{9}{\equiv} 1+7+3=11 \overset{9}{\equiv} 2 \Rightarrow 173 \overset{9}{\equiv} 2$$

$$231 \overset{9}{\equiv} 2+3+1 \Rightarrow 231 \overset{9}{\equiv} 6$$

$$173x \overset{9}{\equiv} 231 \Rightarrow 2x \overset{9}{\equiv} 6 \xrightarrow[\div 2]{(2,9)=1} x \overset{9}{\equiv} 3 \Rightarrow 9|x-3 \Rightarrow x-3=9k \Rightarrow$$

$$\boxed{x=9k+3} \quad k\in Z$$

مثال ۵ : همه اعداد صحیحی را بیابید که سه برابر آنها منهای ۱۳ بر ۷ بخشپذیر باشند.

x = عدد مورد نظر $\Rightarrow 7 \mid 3x-13 \Rightarrow 3x \overset{7}{\equiv} 13 \Rightarrow 3x \overset{7}{\equiv} 13-(1\times 7)$

$\Rightarrow 3x \overset{7}{\equiv} 6 \xrightarrow[\div 3]{(3,7)=1} x \overset{7}{\equiv} 2 \Rightarrow 7 \mid x-2 \Rightarrow x-2=7k \Rightarrow \boxed{x=7k+2}$

$k \in \mathbb{Z}$

حل معادله سیّاله :

هر معادله بصورت $ax+by=c$ را که در آن همه ضرایب و مجهولات عدد صحیح هستند ($a,b,c,x,y \in \mathbb{Z}$)، معادله سیّاله خطی درجه اول می گوییم.

تذکر مهم : شرط لازم و کافی برای آنکه معادله سیّاله $ax+by=c$ دارای جواب باشد آن است که : $(a,b) \mid c$

برای حل معادله سیاله، می توان آنرا بصورت زیر به معادله هم نهشتی تبدیل و حل کرد :

$ax+by=c \Rightarrow ax-c=(-b)y \Rightarrow -b \mid ax-c \Rightarrow b \mid ax-c \Rightarrow \boxed{ax \overset{b}{\equiv} c}$

$ax+by=c \Rightarrow by-c=(-a)x \Rightarrow -a \mid by-c \Rightarrow a \mid by-c \Rightarrow \boxed{by \overset{a}{\equiv} c}$

بعد از اینکه یکی از معادلات هم نهشتی را حل و متغیر را پیدا کردیم باید آنرا در معادله سیاله قرار دهیم تا مجهول دیگر بدست آید.

مثال) معادلات سیاله زیر را حل کنید:

الف) $4x+5y=9$

$4x \overset{5}{\equiv} 9 \Rightarrow 4x \overset{5}{\equiv} 9-(1\times 5) \Rightarrow 4x \overset{5}{\equiv} 4 \xrightarrow[\div 4]{(4,5)=1} x \overset{5}{\equiv} 1 \Rightarrow 5 \mid x-1 \Rightarrow x-1=5k$

$\Rightarrow \boxed{x=5k+1}$ $\quad 4x+5y=9 \Rightarrow 4(5k+1)+5y=9$

$\Rightarrow 20k+4+5y=9 \Rightarrow 20k+5y=5 \Rightarrow 4k+y=1 \Rightarrow \boxed{y=-4k+1}$

ب) $3x+2y=5$

$3x \overset{2}{\equiv} 5 \Rightarrow 3x \overset{2}{\equiv} 5-(1\times 2) \Rightarrow 3x \overset{2}{\equiv} 3 \xrightarrow[\div 3]{(3,2)=1} x \overset{2}{\equiv} 1 \Rightarrow 2 \mid x-1 \Rightarrow x-1=2k \Rightarrow \boxed{x=2k+1}$

$3x+2y=5 \Rightarrow 3(2k+1)+2y=5 \Rightarrow 6k+3+2y=5 \Rightarrow 2y=-6k+2 \Rightarrow \boxed{y=-3k+1}$

(هماهنگ خرداد ۹۸):

با تبدیل معادله سیاله خطی $5x+2y=18$ به معادله هم‌نهشتی و حل آن، جوابهای عمومی این معادله را بیابید (۱/۵ نمره)

$5x+2y=18 \Rightarrow 2y \overset{5}{\equiv} 18 \xrightarrow[\div 2]{(2,5)=1} y \overset{5}{\equiv} 9 \overset{5}{\equiv} 4 \Rightarrow 5 \mid y-4$

$\Rightarrow y-4=5k \Rightarrow \boxed{y=5k+4}$

$5x+2(5k+4)=18 \Rightarrow 5x+10k-10=0 \Rightarrow 5x=-10k+10 \xrightarrow{\div 5} \boxed{x=-2k+2}$

(هماهنگ شهریور ۹۸):

با تبدیل معادله سیاله $2000x+5000y=29000$ به معادله هم‌نهشتی و حل آن، جوابهای عمومی این معادله را بیابید (۱/۵ نمره)

$2000x+5000y=29000 \xrightarrow{\div 1000} 2x+5y=29 \Rightarrow 2x \overset{5}{\equiv} 29 \Rightarrow$

$2x \overset{5}{\equiv} 29-(5\times 5) \Rightarrow 2x \overset{5}{\equiv} 4 \xrightarrow[\div 2]{(2,5)=1} x \overset{5}{\equiv} 2 \Rightarrow 5 \mid x-2 \Rightarrow \boxed{x=5k+2}$

$2x+5y=29 \Rightarrow 2(5k+2)+5y=29 \Rightarrow \boxed{y=-2k+5}$

مثال) به چند طریق می‌توان ۱۸۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

$x=$ تعداد اسکناس‌های ۲۰۰۰ تومان $y=$ تعداد اسکناس‌های ۵۰۰۰ تومان

$2000x+5000y=18000 \xrightarrow{\div 1000} 2x+5y=18 \Rightarrow 2x \overset{5}{\equiv} 18 \overset{5}{\equiv} 8$

$\xrightarrow[\div 2]{(2,5)=1} x \overset{5}{\equiv} 4 \Rightarrow 5 \mid x-4 \Rightarrow x-4=5k \Rightarrow \boxed{x=5k+4}$

$2x+5y=18 \Rightarrow 2(5k+4)+5y=18 \Rightarrow 10k+5y=10 \Rightarrow \boxed{y=-2k+2}$

فقط به ازای $k=0$ و $k=1$ برای x و y جوابها نامنفی هستند.

پس به دو طریق می‌توان تبدیل کرد.

$k=0 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$ و $k=1 \Rightarrow \begin{cases} x=9 \\ y=0 \end{cases}$

مثال) در یک رستوران سوپ و سالاد به عنوان پیش غذا ارائه می‌شود اگر ۹ نفر وارد این رستوران شوند به چند طریق می‌توانند سفارش پیش غذا بدهند؟ (هر نفر فقط یک پرس پیش غذا میل می‌کند)

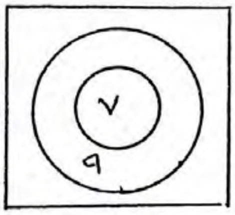
$y =$ تعداد سالادها ، $x =$ تعداد سوپ‌ها

$$x+y=9 \Rightarrow x \overset{1}{\equiv} 9 \overset{1}{\equiv} 0 \Rightarrow \boxed{x=k} \Rightarrow \boxed{y=9-k}$$

فقط به ازای $k=0,1,2,\dots,9$ ، x و y هر دو بزرگتر یا مساوی صفر در می‌آیند یعنی معادله ۱۰ جواب دارد

$$k=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=9 \end{cases} \quad \text{یا} \quad k=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=8 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \dots \quad \text{یا} \quad k=9 \Rightarrow \begin{cases} x=9 \\ y=0 \end{cases}$$

مثال) تیراندازی به سمت هدفی که ناحیه‌هایی با امتیازهای ۷ و ۹ دارد، تیرهایی پرتاب می‌کند. او به چند صورت ممکن است ۷۳ امتیاز کسب کرده باشد، به شرط آن که بدانیم همه تیرها به یکی از ناحیه‌ها برخورد کرده است؟



$y =$ تعداد تیرهای ۹ امتیازی　　$x =$ تعداد تیرهای ۷ امتیازی

$$7x+9y=73 \Longrightarrow 9y \overset{7}{\equiv} 73 \xrightarrow[73 \overset{7}{\equiv} 3]{9 \overset{7}{\equiv} 2} 2y \overset{7}{\equiv} 3$$

$$\Rightarrow 2y \overset{7}{\equiv} 3+(1\times 7) \Rightarrow 2y \overset{7}{\equiv} 10 \xrightarrow[\div 2]{(2,7)=1} y \overset{7}{\equiv} 5$$

$$\Rightarrow \boxed{y=7k+5} \Rightarrow 7x+9(7k+5)=73 \Rightarrow \boxed{x=-9k+4}$$

x و y هر دو تعداد هستند پس هیچکدام منفی نیستند و فقط به ازای $k=0$ هیچکدام منفی نمی‌شوند پس معادله فقط یک جواب دارد $\begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}$

(هماهنگ دیماه ۹۷)

معادله هم‌نهشتی $3x \overset{7}{\equiv} 13$ را حل و جواب عمومی آنرا بدست آورید (۱ نمره)

$$3x \overset{7}{\equiv} 13 \Rightarrow 3x \overset{7}{\equiv} 13-(1\times 7) \Rightarrow 3x \overset{7}{\equiv} 6 \xrightarrow[\div 3]{(3,7)=1} x \overset{7}{\equiv} 2 \Rightarrow \boxed{x=7k+2} \quad k\in \mathbb{Z}$$

(هماهنگ دیماه ۹۸):

جوابهای عمومی معادله سیاله خطی $9x+13y=7$ را بدست آورید. (۱ نمره)

$$9x+13y=7 \Rightarrow 13y \overset{9}{\equiv} 7 \xrightarrow[7\overset{9}{\equiv}16]{13\overset{9}{\equiv}4} 4y \overset{9}{\equiv} 16 \xrightarrow[\div 4]{(4,9)=1} y \overset{9}{\equiv} 4$$

$$\Rightarrow \boxed{y=9k+4} \Rightarrow \boxed{x=-13k-5}$$

(هماهنگ خرداد ۹۹):

معادله هم نهشتی $5x \overset{11}{\equiv} 2$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید (۱/۲۵ نمره)

$$5x \overset{11}{\equiv} 2 \overset{11}{\equiv} 35 \Rightarrow 5x \overset{11}{\equiv} 35 \xrightarrow[\div 5]{(5,11)=1} x \overset{11}{\equiv} 7 \Rightarrow \boxed{x=11k+7}$$

(هماهنگ شهریور ۹۹):

معادله سیاله $2x+5y=19$ را حل کنید. (۱ نمره)

$$2x+5y=19 \Rightarrow 2x \overset{5}{\equiv} 19 \overset{5}{\equiv} 4 \Rightarrow 2x \overset{5}{\equiv} 4 \xrightarrow[\div 2]{(2,5)=1} x \overset{5}{\equiv} 2$$

$$\Rightarrow \boxed{x=5k+2} \Rightarrow \boxed{y=-2k+3}$$

★ تمرینات مهم فصل ۱ درس ۳ با پاسخ ★

۱) عدد ۱۳۹۸ به کدام دسته همنهشتی به پیمانه ۹ تعلق دارد؟

$$1398 \overset{9}{\equiv} 1+3+9+8 \overset{9}{\equiv} 21 \overset{9}{\equiv} 3 \Rightarrow 1398 \in [3]_9$$

۲) اگر $k \in \mathbb{Z}$، ثابت کنید فقط یکی از سه حالت زیر امکان پذیر است

$k \overset{3}{\equiv} 2$ یا $k \overset{3}{\equiv} 1$ یا $k \overset{3}{\equiv} 0$ (به عبارت دیگر $k \in [0]_3$ یا $k \in [1]_3$ یا $k \in [2]_3$)

حل: اگر k را به عدد سه تقسیم کنیم داریم: $k = 3q + r \quad 0 \leq r < 3$

پس $r=0$ یا $r=1$ یا $r=2$ می باشد پس:

اگر $r=0 \Rightarrow k \overset{3}{\equiv} 0$ اگر $r=1 \Rightarrow k \overset{3}{\equiv} 1$ اگر $r=2 \Rightarrow k \overset{3}{\equiv} 2$

۳) اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $n \mid m$ ثابت کنید $a \overset{n}{\equiv} b$

$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid a-b$ فرض $\left.\begin{array}{l} n \mid m \\ m \mid a-b \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{تعدی}} n \mid a-m \Rightarrow a \overset{n}{\equiv} b$

۴) فرض کنیم $a \overset{m}{\equiv} b$ و $b \overset{n}{\equiv} c$ و $(m,n)=d$ در اینصورت ثابت کنید: $a \overset{d}{\equiv} c$

$$(m,n)=d \Rightarrow d \mid m \ , \ d \mid n$$

$\left.\begin{array}{l} a \overset{m}{\equiv} b \\ d \mid m \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{طبق تمرین ۳}} a \overset{d}{\equiv} b$ $\left.\begin{array}{l} b \overset{n}{\equiv} c \\ d \mid n \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{طبق تمرین ۳}} b \overset{d}{\equiv} c$

$$\left.\begin{array}{l} a \overset{d}{\equiv} b \\ b \overset{d}{\equiv} c \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{تعدی}} a \overset{d}{\equiv} c$$

۵) ثابت کنید: اگر باقیمانده های تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی باشند آنگاه: $a \overset{m}{\equiv} b$

$$\left.\begin{array}{l} a = mq + r \\ b = mq' + r \end{array}\right\} \Rightarrow a-b = mq + r - mq' - r \Rightarrow a-b = m(q-q') \Rightarrow a-b = mq''$$

$$\Rightarrow m \mid a-b \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} b$$

۶) عکس تمرین ۵ را بیان و اثبات کنید.

اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ باشد آنگاه a و b در تقسیم بر m هم باقیمانده هستند

اثبات: فرض کنیم باقیمانده a بر m عدد r باشد ثابت می‌کنیم باقیمانده تقسیم b بر m نیز برابر r است.

$$a = mq + r \,,\quad 0 \leq r < m \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid a-b \Rightarrow a-b = mk$$

$$\Rightarrow a = b + mk$$

$$a = mq + r \Rightarrow b + mk = mq + r \Rightarrow b = mq - mk + r \Rightarrow b = m(q-k) + r$$

$\Rightarrow b = mq' + r \,,\ 0 \leq r < m \Rightarrow$ r باقیمانده تقسیم b بر m $\Rightarrow$ a و b در تقسیم بر m هم باقیمانده اند

---

۷) با استفاده از بسط دو جمله‌ای خیام یعنی:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} \times a^n + \binom{n}{1} \times a^{n-1} b + \binom{n}{2} \times a^{n-2} b^2 + \binom{n}{3} \times a^{n-3} b^3 + \cdots + \binom{n}{n} \times b^n$$

ثابت کنید که برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $a, b \in \mathbb{Z}$ همواره: $(a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$

اثبات:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{n} b^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + b^n$$

$$\Rightarrow (a+b)^n = a^n + b^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1}$$

$$\Rightarrow (a+b)^n = a^n + b^n + ab \Big(\underbrace{\binom{n}{1} a^{n-2} + \binom{n}{2} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{n-1} b^{n-2}}_{q} \Big)$$

$$\Rightarrow (a+b)^n = a^n + b^n + abq \Rightarrow (a+b)^n - (a^n + b^n) = abq \Rightarrow (a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$$

---

۸) با توجه به تمرین ۷ ثابت کنید $12^{51} - 11^{51} - 23^{51}$ بر عدد ۱۳۲ بخشپذیر است.

می‌دانیم: $(a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$

$a = 12$
$b = 11$
$n = 51$

$$\Rightarrow (12+11)^{51} \overset{12 \times 11}{\equiv} 12^{51} + 11^{51} \Rightarrow 23^{51} \overset{132}{\equiv} 12^{51} + 11^{51} \Rightarrow 23^{51} - 12^{51} - 11^{51} \overset{132}{\equiv} 0$$

$\boxed{r = 0} \Leftarrow$ بخشپذیر است.

۹) باقیمانده تقسیم عدد $A=(2^{11}+7)\times 9$ را بر ۲۳ بیابید.

$$32 \overset{23}{\equiv} 9 \Rightarrow 2^5 \overset{23}{\equiv} 9 \Rightarrow (2^5)^2 \overset{23}{\equiv} 9^2 \Rightarrow 2^{10} \overset{23}{\equiv} 81 \overset{23}{\equiv} 81-(3\times 23) \overset{23}{\equiv} 12$$

$$\Rightarrow 2^{10}\overset{23}{\equiv}12 \xrightarrow{\times 2} 2^{11}\overset{23}{\equiv}24 \overset{23}{\equiv} 24-(1\times 23) \Rightarrow 2^{11}\overset{23}{\equiv}1 \xrightarrow{+7} 2^{11}+7\overset{23}{\equiv}8$$

$$\xrightarrow{\times 9}(2^{11}+7)\times 9 \overset{23}{\equiv}72\overset{23}{\equiv}72-(3\times 23)\overset{23}{\equiv}3 \Rightarrow \boxed{r=3}$$

۱۰) اگر دو عدد $(3a-5)$ و $(4a-7)$ رقم یکان برابر داشته باشند، رقم یکان عدد $(9a+6)$ را بدست آورید.

حل: می‌دانیم اگر رقم یکان دو عدد برابر باشند آن دو عدد به پیمانه ۱۰ باهم هم‌نهشت هستند پس:

$$4a-7 \overset{10}{\equiv} 3a-5 \Rightarrow 4a-7-3a+5\overset{10}{\equiv}0 \Rightarrow a-2\overset{10}{\equiv}0 \Rightarrow a\overset{10}{\equiv}2$$

$$\xrightarrow{\times 9} 9a\overset{10}{\equiv}18\overset{10}{\equiv}8 \xrightarrow{+6} 9a+6\overset{10}{\equiv}8+6 \Rightarrow 9a+6\overset{10}{\equiv}14\overset{10}{\equiv}4 \Rightarrow \text{رقم یکان}=4$$

۱۱) باقیمانده تقسیم عدد $A=1!+2!+3!+\dots+500!$ را بر ۱۰ بدست آورید. (رقم یکان A را بیابید)

حل: می‌دانیم $5!=120$ پس $5!\overset{10}{\equiv}0$
درنتیجه از $5!$ به بعد، همه فاکتوریل‌ها
مضرب ۱۰ هستند پس هم‌نهشت صفرند

$1!\overset{10}{\equiv}1$

$2!\overset{10}{\equiv}2$

$3!\overset{10}{\equiv}6$

$4!\overset{10}{\equiv}24\overset{10}{\equiv}4$

$5!\overset{10}{\equiv}0$

$\vdots$

$500!\overset{10}{\equiv}0$

$$A\overset{10}{\equiv}1+2+6+4+0+0+\dots\overset{10}{\equiv}13\overset{10}{\equiv}3$$

← رقم یکان A برابر ۳ می‌باشد.

۱۲) جواب عمومی معادله سیاله خطی $7x+5y=11$ را بدست آورید.

$$7x+5y=11 \Rightarrow 7x\overset{5}{\equiv}11 \Rightarrow 7x\overset{5}{\equiv}11-(5\times 5) \Rightarrow 7x\overset{5}{\equiv}-14 \Rightarrow x\overset{5}{\equiv}-2 \Rightarrow \boxed{x=5k-2}$$

$$7(5k-2)+5y=11 \Rightarrow 5y=-35k+25 \Rightarrow \boxed{y=-7k+5}$$

۱۳) به چند طریق می‌توان ۲۹۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

$x=$ تعداد اسکناس‌های ۲۰۰۰ تومانی $y=$ تعداد اسکناس‌های ۵۰۰۰ تومانی

$$2000x+5000y=29000 \xrightarrow{\div 1000} 2x+5y=29 \Rightarrow 5y \overset{2}{\equiv} 29 \Rightarrow 5y \overset{2}{\equiv} 29-(2\times 2)$$

$$\Rightarrow 5y \overset{2}{\equiv} 25 \xrightarrow{\div 5} y \overset{2}{\equiv} 5 \overset{2}{\equiv} 1 \Rightarrow \boxed{y=2k+1} \qquad x\geq 0$$

$$2x+5(2k+1)=29 \Rightarrow 2x=-10k+24 \Rightarrow \boxed{x=-5k+12} \qquad y\geq 0$$

$K=0 \Rightarrow \begin{cases} x=12 \\ y=1 \end{cases}$ $\quad k=1 \Rightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases}$ $\quad K=2 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$ به سه روش

۱۴) معادله های هم نهشتی زیر را در صورت امکان حل کرده و جوابهای عمومی آنها را بدست آورید:

الف) $423x \overset{11}{\equiv} 79$ $\qquad 423 \overset{11}{\equiv} 3-2+4 \overset{11}{\equiv} 5$ $\qquad 79 \overset{11}{\equiv} 9-7 \overset{11}{\equiv} 2$

$$5x \overset{11}{\equiv} 2 \xrightarrow[\text{معادله جواب دارد}]{1|2 \text{ و } (5,11)=1} 5x \overset{11}{\equiv} 2+(3\times 11) \Rightarrow 5x \overset{11}{\equiv} 35 \Rightarrow x \overset{11}{\equiv} 7 \Rightarrow \boxed{x=7k+11}$$

ب) $8x \overset{12}{\equiv} 20 \xrightarrow[\text{معادله جواب دارد}]{(8,12)=4 \text{ و } 4|20} 8x \overset{12}{\equiv} 20-(1\times 12) \Rightarrow 8x \overset{12}{\equiv} 8 \xrightarrow{(8,12)=4} x \overset{3}{\equiv} 1 \Rightarrow \boxed{x=3k+1}$

ج) $51x \overset{6}{\equiv} 11$ $\qquad (51,6)=3$ و $3 \nmid 11 \Rightarrow$ معادله جواب ندارد

۱۵) اگر اول مهرماه در یک سال روز یکشنبه باشد، ۱۷ اسفندماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

یکشنبه	دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه	پنج شنبه	جمعه	شنبه
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

مهر، آبان، آذر، دی، بهمن، اسفند

$29+30+30+30+30+17=156$

$156 \overset{7}{\equiv} 2 \Rightarrow$ سه شنبه

۱۶) اگر ۱۲ بهمن در یک سال جمعه باشد، ۳۱ مردادماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

جمعه	شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه	پنج شنبه
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

شهریور، مهر، آبان، آذر، دی، بهمن

$31+30+30+30+30+12=163$

باید به عقب برگردیم: $-163 \overset{7}{\equiv} -2 \overset{7}{\equiv} 5 \Rightarrow$ چهارشنبه

۱۷) همه اعداد صحیح چون a را بیابید که ۵ برابر آنها به علاوه ۹ بر ۱۱ بخشپذیر باشد.

$$5a+9 \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow 5a \overset{11}{\equiv} -9 \overset{11}{\equiv} -20 \Rightarrow a \overset{11}{\equiv} -4 \Rightarrow \boxed{a=11k-4} \quad k\in \mathbb{Z}$$

۱۸) به چند طریق می توان یک کیسه ۲۳ کیلویی را با وزنه های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟

$x=$ تعداد وزنه های ۳ کیلویی $\qquad y=$ تعداد وزنه های ۵ کیلویی

$$3x+5y=23 \Rightarrow 5y \overset{3}{\equiv} 23 \Rightarrow 5y \overset{3}{\equiv} 23-(1\times 3) \Rightarrow 5y \overset{3}{\equiv} 20 \Rightarrow y \overset{3}{\equiv} 4 \overset{3}{\equiv} 1 \Rightarrow \boxed{y=3k+1}$$

$3x+5(3k+1)=23 \Rightarrow \boxed{x=5k+6}$ $\quad K=0 \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=1 \end{cases}$ $\quad K=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$ به دو روش

تمرین ۱۹ و تمرین ۲۰ در صفحه ۴۱ جزوه مطرح و حل شده است.