درس دوّم : بخش پذیری در اعداد صحیح

در این درس به بررسی مفهوم تقسیم پذیری در اعداد صحیح می پردازیم و به دنبال آن ویژگی های تقسیم پذیری و بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک دو عدد صحیح را بررسی می کنیم. در نهایت نیز قضیه‌ی تقسیم و کاربرد آن و افزار مجموعه‌ی اعداد صحیح را بیان می کنیم.

تقسیم پذیری

اگر a و b دو عدد صحیح و $b \neq ۰$ گوییم a بر b بخشپذیر است، هرگاه عدد صحیحی مانند q وجود داشته باشد که $a = bq$ (یعنی باقی مانده‌ی تقسیم a بر b برابر صفر باشد.)

اگر a بر b بخشپذیر باشد، می نویسند $b \mid a$ و می خوانند b عدد a را عاد می کند.[1] (b عدد a می شمارد.)

همچنین اگر a بر b بخشپذیر نباشد، می نویسند $b \nmid a$

مثال :

۱: عدد صحیح ۲۴ بر ۶ بخش پذیر است، پس: ۶|۲۴

۲: عدد صحیح ۵۰- بر ۵ بخش پذیر است، پس: ۵|۵۰ −

۳: عدد صحیح ۱۲ بر ۳- بخش پذیر است، پس: ۳|۱۲ −

۴: عدد صحیح ۳۰- بر ۱۰- بخش پذیر است، پس: ۱۰|۳۰ − −

۵: عدد صحیح ۲۵ بر ۶ بخش پذیر نیست، پس: ۶∤۲۵

تمرین ۱ : با توجه به تعریف عادکردن، جاهای خالی را کامل کنید.

الف) $۷ \mid ۶۳ \Leftrightarrow ۶۳ = ... \times .....$

ب) $۹۱ = ۷ \times .... \Leftrightarrow ..... \mid ۹۱$

پ) $-۶ \mid ۵۴ \Leftrightarrow ۵۴ = ... \times (-۶)$

ت) $۵ \mid -۳۵ \Leftrightarrow -۳۵ = ۵ \times .....$

ث) $۰ = ۱۸ \times .... \Leftrightarrow ۱۸ \mid .....$

ج) $a \mid ۱ \Leftrightarrow a = ...$ یا $a = ...$

چ) $۲۶ = ۲ \times ۱۳ \Rightarrow ۲ \mid .....$ و $..... \mid ۲۶$

---

[1] . اینکه صفر عدد صفر را می شمارد به عنوان قرار داد پذیرفته می شود.

تمرین۲ : نشان دهید که $۶^{۵۰۲}$ بر ۹ بخش پذیر است.

حل:

$$۶^{۵۰۲} = ۶ \times ۶ \times ۶^{۵۰۰} = ۳ \times ۲ \times ۳ \times ۲ \times ۶^{۵۰۰} = (۳ \times ۳) \times (\underbrace{۲ \times ۲ \times ۶^{۵۰۰}}_{q}) = ۹q \rightarrow ۹|۶^{۵۰۲}$$

تمرین۳ : اگر n و m دو عدد طبیعی دلخواه و $m \leq n$ باشند. نشان دهید که $a^m \mid a^n$

حل : چون $m \leq n$ پس واضح است که $a^n = a^m \times a^{n-m}$ و این یعنی وجود دارد عدد صحیح q که

$a^n = a^m \times q$. لذا $a^m \mid a^n$

مثال :

$$۳^۹ = ۳^۵ \times ۳^۴ \rightarrow ۳^۹ = ۳^۵ \times ۳^۴ \xrightarrow{۳^۴ = q} ۳^۹ = ۳^۵ \times q \rightarrow ۳^۵ \mid ۳^۹$$

تمرین۴ : برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید که $۳|۲^{۳n} - ۵^n$

حل:

$$۲^{۳n} - ۵^n = ۸^n - ۵^n = (۸-۵)q = ۳q \rightarrow ۳|۲^{۳n} - ۵^n$$

تمرین۵ : ثابت کنید که $۳^{۵۲} - ۲^{۳۹}$ بر ۷۳ بخش پذیر است.

حل:

$$۳^{۵۲} - ۲^{۳۹} = (۳^۴)^{۱۳} - (۲^۳)^{۱۳} = (۸۱)^{۱۳} - (۸)^{۱۳} = (۸۱-۸)q = ۷۳q \rightarrow ۷۳ \mid ۳^{۵۲} - ۲^{۳۹}$$

نتیجه : طبق تعریف عاد کردن در اعداد صحیح، به ازاء هر عدد صحیح a همواره داریم:

الف) $a \mid a$ ب) $-a \mid a$ ج) $\pm ۱ \mid a$ د) $a \mid ۰$

***

ویژگی های رابطه‌ی عاد کردن

ویژگی ۱ : اگر a عدد b را بشمارد،آنگاه هر مضرب صحیح bرا نیز می شمارد. یعنی اگر $a|b$ آنگاه $a|mb$ که در آن m عدد صحیح می باشد.

اثبات:

$$a|b \xrightarrow{\exists k\in Z} b=ak \to mb=mak \to mb=a(mk)$$
$$\xrightarrow{mk=q} mb=aq \to a|mb$$

برای مثال، چون ۶|۳ آنگاه ۶×۵|۳

نتیجه: اگر a عدد b را بشمارد، آنگاه ثابت می شود که

الف : عدد a عدد $b^{۲}$ را می شمارد

ب : در حالت کلی عدد a عدد b^{n} را نیز می شمارد. (n عدد طبیعی)

اثبات: چون $a|b$ طبق ویژگی فوق $a|mb$ که در آن m عدد صحیح می باشد.

حال اگر قرار دهیم $m=b$ بدست می آید $a|b^{۲}$

همچنین اگر قرار دهیم $m=b^{n-۱}$ بدست می آید $a|b^{n}$

تمرین۶ : ثابت کنید، اگر $a|b$ آنگاه $a|-b$

اثبات :

$$a|b \to a|mb \xrightarrow{m=-۱} a|-b$$

ویژگی ۲ : هرگاه یک عدد صحیح ، دو عدد صحیح دیگر را بشمارد، مجموع ، تفاضل و حاصل ضرب آنها را می شمارد. به عبارت دیگر ، اگر $a|b$ و $a|c$ در این صورت ثابت کنید که:

الف: $a|b+c$ ب: $a|b-c$ ج: $a|bc$

اثبات: مجموعه‌ی اعداد صحیح نسبت به اعمال جمع، تفریق و ضرب بسته است. یعنی مجموع ، تفاضل و حاصل ضرب هر دو عدد صحیح ، عددی صحیح می باشد. پس می توان نوشت:

الف :

$$\begin{cases} a|b \xrightarrow{\exists q_{۱}\in Z} b=aq_{۱} \\ a|c \xrightarrow{\exists q_{۲}\in Z} c=aq_{۲} \end{cases}$$

$$\to b+c=aq_{۱}+aq_{۲} \to b+c=a(q_{۱}+q_{۲}) \xrightarrow{q=q_{۱}+q_{۲}} b+c=aq \to a|b+c$$

ب:

$$\begin{cases} a|b \xrightarrow{\exists q_{۱}\in Z} b=aq_{۱} \\ a|c \xrightarrow{\exists q_{۲}\in Z} c=aq_{۲} \end{cases}$$

$$\to b-c=aq_{۱}-aq_{۲} \to b-c=a(q_{۱}-q_{۲}) \xrightarrow{q=q_{۱}-q_{۲}} b-c=aq \to a|b-c$$

ج:

$$\begin{cases} a|b \xrightarrow{\exists q_{۱}\in Z} b=aq_{۱} \\ a|c \xrightarrow{\exists q_{۲}\in Z} c=aq_{۲} \end{cases}$$

$$\to bc=(aq_{۱})(aq_{۲}) \to bc=a(aq_{۱}q_{۲}) \xrightarrow{q=aq_{۱}q_{۲}} bc=aq \to a|bc$$

توجه کنید که :

الف : اگر $a|b+c$ نمی توان نتیجه گرفت که $a|c$ یا $a|b$

برای مثال $۲|۵+۳$ ولی $۲\nmid ۳$ و $۲\nmid ۵$

ب : اگر $a|bc$ نمی توان نتیجه گرفت که $a|c$ یا $a|b$

برای مثال $۶|۳\times ۴$ ولی $۶\nmid ۳$ و $۶\nmid ۴$

تمرین۷ : ثابت کنید که اگر $a|b$ و k یک عدد صحیح غیر صفر باشد، آنگاه $ka|kb$ و برعکس

اثبات :

حالت اوّل

$$a|b \xrightarrow{k\in Z\ ,\ k\neq ۰} ka|kb \quad ?$$

$$a|b \xrightarrow{q\in Z} b=aq \xrightarrow{\times k} kb=kaq \to ka|kb$$

حالت دوّم

$$ka|kb\xrightarrow{k\in Z\ ,\ k\neq 0}a|b\quad ?$$

$$ka|kb\xrightarrow{\exists q\in Z}kb=kaq\to k(b-aq)=0$$

$$\xrightarrow{k\neq 0}b-aq=0\to b=aq\to a|b$$

تمرین۸ : ثابت کنید، اگر $a|b$ آنگاه $-a|-b$

اثبات :

$$a|b\xrightarrow{\exists k\in Z}ka|kb\xrightarrow{k=-1}-a|-b$$

تمرین۹ : اگر $a|b$ و $a|c$ آنگاه $a|mb+nc$ که در آن n و m عدد صحیح می باشند.

اثبات:

$$\begin{cases}a|b\to a|mb\\ a|c\to a|nc\end{cases}\to a|mb+nc$$

توجه کنید که

الف : این خاصیت برای تفریق نیز برقرار است. یعنی اگر $a|b$ و $a|c$ آنگاه $a|mb-nc$

ب : این خاصیت را می توان به شکل زیر تعمیم داد.

$$\begin{cases}a|b_1\to a|m_1b_1\\ a|b_2\to a|m_2b_2\\ a|b_3\to a|m_3b_3\\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a|b_n\to a|m_nb_n\end{cases}\to a|m_1b_1+m_2b_2+m_3b_3+\ldots+m_nb_n$$

ویژگی۳ : اگر a عدد b را بشمارد و b عدد c را بشمارد، آنگاه a عدد c را می شمارد. یعنی اگر $a|b$ و $b|c$ آنگاه $a|c$ (خاصیت تعدی عادکردن)

حل:

$$\begin{cases} a\,|\,b \xrightarrow{\exists q_1 \in Z} b = aq_1 \\ b\,|\,c \xrightarrow{\exists q_2 \in Z} c = bq_2 \end{cases}$$

$$\to c = (aq_1)q_2 \to c = a(q_1q_2) \xrightarrow{q=q_1q_2} c = aq \to a\,|\,c$$

تمرین ۱۰ : ثابت کنید، اگر $a\,|\,b$ آنگاه $-a\,|\,b$

اثبات :

$$\left.\begin{matrix} -a\,|\,a \\ a\,|\,b \end{matrix}\right\} \to -a\,|\,b$$

تمرین ۱۱ : اگر a عدد b را بشمارد، با استفاده از خاصیت تعدی عاد کردن، ثابت کنید که a عدد b^n را نیز می شمارد. (n عدد طبیعی)

اثبات : چون $a\,|\,b$ **و** $b\,|\,b^n$ **پس** $a\,|\,b^n$

توجه : اگر $a\,|\,b^n$ ($n \in N$) آنگاه نمی توان نتیجه گرفت که $a\,|\,b$

برای مثال واضح است که $4\,|\,100$ یعنی $4\,|\,10^2$ ولی $4 \nmid 10$

ویژگی ۴ : اگر a عدد b را بشمارد و c عدد d را نیز بشمارد. آنگاه اگر ac نیز عدد bd را نیز می شمارد.

یعنی اگر $a\,|\,b$ و $c\,|\,d$ در این صورت ثابت کنید که: $ac\,|\,bd$

اثبات :

$$\begin{cases} a\,|\,b \xrightarrow{\exists q_1 \in Z} b = aq_1 \\ c\,|\,d \xrightarrow{\exists q_2 \in Z} d = cq_2 \end{cases}$$

$$\to bd = (aq_1)(cq_2) \to bd = ac(q_1q_2) \xrightarrow{q=q_1q_2} bd = acq \to ac\,|\,bd$$

تمرین ۱۲ : برای دو عدد صحیح b و a و عدد طبیعی n ، ثابت کنید که اگر $a\,|\,b$ آنگاه $a^n\,|\,b^n$

اثبات:

$$a\,|\,b \xrightarrow{\exists k \in Z} b = ak \to (b)^n = (ak)^n \to b^n = a^n k^n$$

$$\xrightarrow{k^n = q \in Z} b^n = a^n q \to a^n\,|\,b^n$$

توجه : عکس تمرین فوق نیز برقرار است، یعنی اگر b و a دو عدد صحیح و n یک عدد طبیعی باشد، از اینکه $a^n | b^n$ نتیجه می شود که $a|b$

اثبات این موضوع خارج از اهداف کتاب است.

تمرین۱۳ : اگر برای عدد صحیح k داشته باشیم $۵|۴k+۱$. ثابت کنید $۲۵|۱۶k^۲+۲۸k+۶$

حل :

$$۵|۴k+۱ \to (۵)^۲ | (۴k+۱)^۲ \to ۲۵|۱۶k^۲+۸k+۱ \qquad (۱)$$

$$۵|۴k+۱ \xrightarrow{\times ۵} ۲۵|۲۰k+۵ \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} ۲۵+۵|(۱۶k^۲+۸k+۱)+(۲۰k+۵) \to ۲۵|۱۶k^۲+۲۸k+۶$$

تمرین۱۴ : آیا از اینکه $a|b$ و $c|d$ می توان نتیجه گرفت که $a+c|b+d$

حل : خیر نمی توان نتیجه گرفت. برای مثال $۳|۳$ و $۲|۴$ ولی $۳+۴ \nmid ۳+۲$

تمرین۱۵: فرض کنید n و m دو عدد طبیعی و $m \le n$ و $a,b \in Z$ ثابت کنید که اگر $a|b$ آنگاه $a^m | b^n$

$$a|b \to a^m|b^m \to a^m|b^{n-m} \times b^m \to a^m|b^n$$

ویژگی ۵ : اگر $a|b$ و $b \neq ۰$، آنگاه $|a| \le |b|$

اثبات : چون $a|b$ پس $b=aq$ ولی چون $b \neq ۰$ پس $q \neq ۰$ لذا باید $|q| > ۱$

اکنون دو طرف این نامساوی را در $|a|$ ضرب می کنیم. در این صورت خواهیم داشت.

$$۱ \le |q| \to |a| \le |a| \times |q| \to |a| \le |aq| \to |a| \le |b|$$

نتیجه : اگر $a|b$ و $b|a$ آنگاه $|a|=|b|$

اثبات :

$$\left.\begin{array}{l} a|b \to |a| \le |b| \\ b|a \to |b| \le |a| \end{array}\right\} \to |a|=|b|$$

تمرین ۱۶ : اگر $a\,|\,۱$ ، آنگاه $a=\pm ۱$

اثبات :

$$\left.\begin{array}{l} ۱\,|\,a \\ a\,|\,۱ \end{array}\right\} \rightarrow |a|=۱ \rightarrow a=\pm ۱$$

تمرین ۱۷ : اگر $a\neq ۰$ عدد صحیح و دو عدد $۷m+۶$ و $۶m+۵$ بر a بخش پذیر باشد. ثابت کنید:

$a=\pm ۱$

حل :

$$\left.\begin{array}{l} a\,|\,۷m+۶ \xrightarrow{\times ۶} a\,|\,۴۲m+۳۶ \\ a\,|\,۶m+۵ \xrightarrow{\times ۷} a\,|\,۴۲m+۳۵ \end{array}\right\} \rightarrow a\,|\,(۴۲m+۳۶)-(۴۲m+۳۵)$$
$$\rightarrow a\,|\,۱ \rightarrow a=\pm ۱$$

تمرین ۱۸: اگر $a|۳n-۲$ و $a|-۴n+۳$ نشان دهید که $a=\pm ۱$

حل :

$$\left.\begin{array}{l} a|۳n-۲ \rightarrow a|۴(۳n-۲) \\ a|-۴n+۳ \rightarrow a|۳(-۴n+۳) \end{array}\right\}$$
$$\rightarrow a\,|\,۴(۳n-۲)+۳(-۴n+۳) \rightarrow a\,|\,۱۲n-۸-۱۲n+۹ \rightarrow a\,|\,۱ \rightarrow a=\pm ۱$$

تمرین ۱۹ : اگر $a>۱$ و $a\,|\,۹k+۴$ و $a\,|\,۵k+۳$ ، ثابت کنید که a عددی اول است.

حل :

$$\left.\begin{array}{l} a\,|\,۹k+۴ \xrightarrow{\times ۵} a\,|\,۴۵k+۲۰ \\ a\,|\,۵k+۳ \xrightarrow{\times ۹} a\,|\,۴۵k+۲۷ \end{array}\right\} \rightarrow a\,|\,(۴۵k+۲۷)-(۴۵k+۲۰) \rightarrow a\,|\,۷$$

و چون $a>۱$ پس a برابر ۷ (عددی اوّل) است.

توجه : اگر p یک عدد اوّل[2] باشد و a عددی طبیعی و $a\,|\,p$ در این صورت $a=۱$ یا $a=p$

تمرین ۲۰ : اگر عدد طبیعی a دو عدد $۹k+۷$ و $۷k+۶$ را عاد کند. ثابت کنید $a=۱$ یا $a=۵$

حل :

$$\left.\begin{array}{l} a\,|\,۷k+۶ \xrightarrow{\times ۹} a\,|\,۶۳k+۵۴ \\ a\,|\,۹k+۷ \xrightarrow{\times ۷} a\,|\,۶۳k+۴۹ \end{array}\right\} \rightarrow a\,|\,(۶۳k+۵۴)-(۶۳k+۴۹)$$
$$\rightarrow a\,|\,۵ \rightarrow a=۵ \text{ یا } a=۱$$

[2] . هر عدد طبیعی بزرگتر از یک را اوّل گویند، هرگاه فقط بر یک و خودش بخش پذیر باشد. مانند: .... و ۱۱ و ۷ و ۵ و۳ و۲

بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد (ب. م. م)

عدد صحیح c را مقسوم علیه (شمارنده‌ی) مشترک دو عدد صحیح a و b گوییم، هرگاه هم a و هم b بر آن بخش پذیر باشند. یعنی $c|b$ و $c|a$

مثلاً عدد ۴ مقسوم علیه مشترک ۱۶ و ۱۲ است، زیرا ۴|۱۶ و ۴|۱۲

تعریف : عدد طبیعی d را بزرگترین مقسوم علیه مشترک (ب.م.م) دو عدد صحیح a و b که حداقل یکی از آنها مخالف صفر است، گوییم، هرگاه:

الف: d یک مقسوم علیه مشترک a و b باشد.

ب: هر مقسوم علیه مشترک دیگر a و b از d کوچکتر باشد.

به عبارت دیگر ب.م.م دو عدد a و b ، بزرگترین عدد طبیعی است که هم a و هم b بر آن بخش پذیر باشند.

بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد a و b را به صورت (a,b) یا d یا $a\prod b$ نمایش می دهند.

تمرین ۲۱ : مجموعه‌ی مقسوم علیه های دو عدد ۱۸و۱۲را نوشته و سپس (ب.م.م) این دو عدد را مشخص کنید.

حل:

مجموعه‌ی مقسوم علیه های ۱۸ $=\{\pm ۱,\pm ۲,\pm ۳,\pm ۶,\pm ۹,\pm ۱۸\}$

مجموعه‌ی مقسوم علیه های ۱۲ $=\{\pm ۱,\pm ۲,\pm ۳,\pm ۴,\pm ۶,\pm ۱۲\}$

مجموعه‌ی مقسوم علیه های مشترک $=\{\pm ۱,\pm ۲,\pm ۳,\pm ۶\}$

ب.م.م $d=(۱۲,۱۸)=۶$

نتیجه : عدد طبیعی d را بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد صحیح a و b گویند، اگر وتنها اگر

۱: $d|a$ و $d|b$

۲: هرگاه $c|a$ و $c|b$ آنگاه $c\le d$

برای مثال بزرگترین مقسوم علیه مشترک ۱۲ و ۱۸ عدد ۶ است و ۳ مقسوم علیه مشترک این دو عدد نیز هست. واضح است که ۶|۳ و ۳ ≤ ۶

تعریف : دو عدد صحیح b و a را نسبت به هم اوّل (متباین) گویند، هرگاه بزرگترین مقسوم علیه مشترک آنها یک باشد.

$$(a,b)=۱$$

برای مثال دو عدد ۷ و ۱۲ نسبت به هم اوّلند.

تمرین۲۲ : ثابت کنید که هر دو عدد صحیح متوالی نسبت به هم اوّلند.

حل : کافی است که ثابت کنیم، (ب م م) هر دو عدد صحیح متوالی برابر ۱ است. فرض کنیم کـه m یـک عدد صحیح و $(m,m+۱)=d$ لذا

$$\left.\begin{array}{l} d\mid m \\ d\mid m+۱ \end{array}\right\} \to d\mid m+۱-m \to d\mid ۱$$

و چون d عددی مثبت است لذا $d=۱$

تمرین۲۳ : ثابت کنید که هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اوّلند.

حل : کافی است که ثابت کنیم (ب م م) هر دو عدد صحیح متوالی برابر ۱ است. فرض کنیم که k یک عدد صحیح و $(۲k+۱,۲k+۳)=d$ لذا

$$\left.\begin{array}{l} d\mid ۲k+۱ \\ d\mid ۲k+۳ \end{array}\right\} \to d\mid (۲k+۳)-(۲k+۱) \to d\mid ۲$$

و چون d عددی مثبت و زوج نیست لذا $d=۱$

تمرین۲۴: اگر p و q دو عدد اوّل و $p\neq q$ باشد. ثابت کنید $(p,q)=۱$

اثبات: (به روش برهان خلف) فرض کنیم که $(p,q)=d$ و $d\neq ۱$ باشد. بنابراین :

$$\left.\begin{array}{l} d\mid p \\ d\mid q \end{array}\right\} \xrightarrow{d\neq ۱} d=p\ ,\ d=q \to p=q$$

و با فرض مسئله تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و $d=۱$

***

کوچکترین مضرب مشترک دو عدد (ک. م. م)

عدد صحیح c را مضرب مشترک دو عدد صحیح a و b گوییم، هرگاه هم بر a و هم بر b بخش پذیر باشند. یعنی $a|c$ و $b|c$

مثلاً عدد ۱۸ مضرب مشترک دو ۲ و ۳ است، زیرا ۲|۱۸ و ۳|۱۸

عدد طبیعی c را کوچکترین مضرب مشترک (ک.م.م) دو عدد صحیح غیرصفر a و b می نامیم ، هرگاه

۱: c مضرب مشترک a و b باشد. یعنی $a|c$ و $b|c$

۲: اگر m یک مضرب طبیعی مشترک دیگر a و b باشد،آنگاه $c \le m$

کوچکترین مضرب مشترک دو عدد صحیح a و b را با $[a,b]$ یا c یا $a \coprod b$ نشان می دهیم.

تذکر: ک.م.م دو عدد صحیح a و b کوچکترین عدد صحیح مثبتی است که هم بر a و هم بر b بخشپذیر باشد.

تمرین۲۵ : کوچکترین مضرب مشترک دو عدد ۴ و۶ را بدست آورید.

حل:

$$\{۰, \pm ۴, \pm ۸, \pm ۱۲, \pm ۱۶, \pm ۲۰, \pm ۲۴, \pm ۲۸, \pm ۳۲, \pm ۳۶, \pm ۴۰, ...\} =$$ مضرب های ۴

$$\{۰, \pm ۶, \pm ۱۲, \pm ۱۸, \pm ۲۴, \pm ۳۰, \pm ۳۶, \pm ۴۲, ...\} =$$ مضربهای ۶

$$\{۰ \;, \pm ۱۲, \pm ۲۴ \;, \pm ۳۶ \;, ...\} =$$ مضربهای مشترک

$c = [۶,۴] = ۱۲$ ک.م.م

تمرین۲۶ : اگر b و a دو عدد صحیح باشند. با توجه به تعریف (ب م م) و (ک م م) ثابت کنید.

الف: اگر $a|b$ آنگاه $(a,b) = |a|$ ب: اگر $a|b$ آنگاه $[a,b] = |b|$

اثبات : کافی است در هر مورد نشان دهیم که شرایط (ب م م) یا (ک م م) برقرار است.

الف) ابتدا نشان می دهیم که $|a|$ یک مقسوم علیه مشترک b و a باشد.

$$|a|\,|\,a \xrightarrow{a|b} |a|\,|\,b$$

یعنی $|a|$ یک مقسوم علیه مشترک b و a است.

اکنون نشان می دهیم که هر مقسوم علیه مشترک دیگر بین دو عدد b و a از $|a|$ کوچکتر است. گیریم که عد مثبت m یک مقسوم علیه مشترک دو عدد b و a است. لذا

$$\left.\begin{matrix} m\mid a \\ m\mid b \end{matrix}\right\} \to |m|\le|a| \xrightarrow{m>۰} m\le|a|$$

یعنی هر مقسوم علیه مشترک بین دیگر دو عدد b و a از $|a|$ کوچکتر است.

ب) ابتدا نشان می دهیم که $|b|$ یک مضرب مشترک b و a است.

$$b\,\big|\,|b| \xrightarrow{a|b} a\,\big|\,|b|$$

$|b|$ یک مضرب مشترک b و a است.

اکنون نشان می دهیم که هر مضرب مشترک دیگر بین دو عدد b و a از $|b|$ بزرگتر است. گیریم که عدد مثبت n یک مقسوم علیه مشترک دو عدد b و a است. لذا

$$\left.\begin{matrix} a\mid n \\ b\mid n \end{matrix}\right\} \to |b|\le|n| \xrightarrow{n>۰} |b|\le n$$

یعنی هر مضرب مشترک بین دیگر دو عدد b و a از $|b|$ بزرگتر است.

مثال :

الف) $۶\mid ۱۸ \to \begin{cases} (۶,۱۸)=۶ \\ [۶,۱۸]=۱۸ \end{cases}$

ب) $-۵\mid ۲۰ \to \begin{cases} (-۵,۲۰)=۵ \\ [-۵,۲۰]=۲۰ \end{cases}$

ج) $-۳\mid -۱۲ \to \begin{cases} (-۳,-۱۲)=۳ \\ [-۳,-۱۲]=۱۲ \end{cases}$

تمرین۲۷ : اگر p عددی اوّل باشد و $a\in Z$ و $p\nmid a$ ثابت کنید، $(p,a)=۱$

اثبات : فرض کنیم که $(p,a)=d$ و $d\neq ۱$ (فرض خلف) . پس طبق تعریف (ب م م) $d\mid p$ و $d\mid a$.

اکنون با توجه به اوّل بودن عدد p و فرض $d\neq ۱$ از $d\mid p$ نتیجه می شود که $d=p$

از طرفی داریم $d\mid a$ پس $p\mid a$ که با فرض مسئله تناقض دارد. لذا باید $d=۱$ باشد.

توجه : در تمرین فوق اگر p عدد اوّل نباشد. مسئله دیگر برقرار نیست. مثلاً: $۶\nmid ۴$ ولی $(۴,۶)=۲$ که برابر یک نیست.

***

قضیه‌ی تقسیم

اگر a و b دو عدد صحیح و $b \neq ۰$ آنگاه اعداد صحیح و یکتای q و r وجود دارند، بطوری که:

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} \vdots & q \\ \hline r & \end{array} \qquad a = bq + r \qquad ۰ \leq r < b$$

عدد a را مقسوم و عدد b را مقسوم علیه ، q خارج قسمت و r را باقی مانده گویند[3].

مثال : عدد ۲۵ را بر ۷ تقسیم کنید و رابطه‌ی فوق را بررسی نمایید.

حل :

$$\begin{array}{r|l} ۲۵ & ۷ \\ \cline{2-2} \vdots & ۳ \\ \hline ۴ & \end{array} \qquad \begin{cases} ۲۵ = ۷(۳) + ۴ \\ ۰ \leq ۴ < ۷ \end{cases}$$

مثال : عدد ۲۵- را بر ۷ تقسیم کنید و رابطه‌ی فوق را بررسی نمایید.

حل :

$$\begin{array}{r|l} -۲۵ & ۷ \\ \cline{2-2} \vdots & -۴ \\ \hline ۳ & \end{array} \qquad \begin{cases} -۲۵ = ۷(-۴) + ۳ \\ ۰ \leq ۳ < ۷ \end{cases}$$

تمرین۲۸: باقی مانده‌ی تقسیم عدد صحیح a بر ۷ برابر۶ است. باقی مانده‌ی تقسیم $۵a$ بر ۷ را بـه دسـت آورید.

حل :

$$a = ۷q + ۶ \xrightarrow{\times ۵} ۵a = ۷(۵q) + ۳۰ \to ۵a = ۷(۵q) + ۲۸ + ۲$$

$$\to ۵a = ۷(۵q + ۴) + ۲ \to ۵a = ۷k + ۲$$

$$\to r = ۲$$

تمرین۲۹ : اگر باقی مانده‌ی اعداد n و m بر ۱۷ به ترتیب ۵ و۳ باشد. در این صورت باقی مانده‌ی تقسیم عدد $۲m - ۵n$ بر ۱۷ را به دست آورید.

حل :

$$\begin{cases} m = ۱۷q_۱ + ۵ \\ n = ۱۷q_۲ + ۳ \end{cases} \to \begin{cases} ۲m = ۱۷(۲q_۱) + ۱۰ \\ -۵n = ۱۷(-۵q_۲) - ۱۵ \end{cases}$$

---

[3]. این قضیه را بدون اثبات می پذیریم.

$$\rightarrow ۲m - ۵n = ۱۷(۲q_۱ - ۵q_۲) - ۵$$

$$\rightarrow ۲m - ۵n = ۱۷(۲q_۱ - ۵q_۲) - ۱۷ + ۱۲$$

$$\rightarrow ۲m - ۵n = ۱۷(\underbrace{۲q_۱ - ۵q_۲ - ۱}_{q}) + ۱۲$$

$$\rightarrow ۲m - ۵n = ۱۷q + ۱۲$$

$$\rightarrow r = ۱۲$$

تمرین ۳۰ : اگر باقی ماندهی تقسیم عدد a بر دو عدد ۷ و ۸ به ترتیب ۵ و۷ باشد. باقی مانده تقسیم عدد a را بر۵۶ بیابید.

حل :

$$a = ۷k_۱ + ۵ \xrightarrow{\times ۸} ۸a = ۵۶k_۱ + ۴۰ \qquad (۱)$$

$$a = ۸k_۲ + ۷ \xrightarrow{\times ۷} ۷a = ۵۶k_۲ + ۴۹ \qquad (۲)$$

اکنون با تفاضل روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت.

$$a = ۵۶k_۱ - ۵۶k_۲ - ۹ \rightarrow a = ۵۶k_۱ - ۵۶k_۲ - ۵۶ + ۴۷$$

$$a = ۵۶(\underbrace{k_۱ - k_۲ - ۱}_{k}) + ۴۷ = ۵۶k + ۴۷$$

یعنی باقی ماندهی عدد a بر۵۶ برابر ۴۷ است.

تمرین ۳۱ : اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b \mid a + ۲$ در این صورت باقی ماندهی تقسیم عدد $a^۲ + b^۲ + ۳$ بر ۸ را بیابید.

حل: چون a عددی صحیح و فرد است، لذا وجود دارد یک عدد صحیح مانند n که $a = ۲n + ۱$. از طرفی چون $b \mid a + ۲$ پس $b \mid (۲n + ۱) + ۲$ یا $b \mid ۲n + ۳$. از اینجا معلوم می شود که b عددی فرد است. پس وجود دارد یک عدد صحیح مانند m که $b = ۲m + ۱$. در نهایت خواهیم داشت.

$$a^۲ + b^۲ + ۳ = (۲n + ۱)^۲ + (۲m + ۱)^۲ + ۳ = ۴n^۲ + ۴n + ۱ + ۴m^۲ + ۴m + ۱ + ۳$$

$$= ۴\underbrace{n(n + ۱)}_{۲k_۱} + ۴\underbrace{m(m + ۱)}_{۲k_۲} + ۵ = ۸k_۱ + ۸k_۲ + ۵ = ۵(k_۱ + k_۲) + ۵ = ۸k + ۵$$

یعنی باقی ماندهی عدد $a^۲ + b^۲ + ۳$ بر ۸ برابر۸ است.

***

افراز مجموعه‌ی اعداد صحیح به کمک قضیه‌ی تقسیم

می دانیم که در تقسیم هر عدد صحیح a بر عدد طبیعی b باقی مانده یک عدد حسابی کمتر از b می باشد. برای مثال در تقسیم هر عدد صحیح a بر ۵ باقی مانده یک عدد حسابی کمتر از ۵ می باشد. لذا یکی از حالت های زیر را خواهیم داشت :

اعداد صحیحی که باقی مانده‌ی تقسیم آنها بر۵ برابر صفر است.(بخش پذیر بر ۵) **مثلاً:** ... و۱۰ و ۵ و ۰ و ۵- و ۱۰- و ...	$a=۵k$
اعداد صحیحی که باقی مانده‌ی تقسیم آنها بر ۵ برابر ۱ است. **مثلاً:** ... و۱۱ و ۶ و ۱ و ۴- و ۹- و ...	$a=۵k+۱$
اعداد صحیحی که باقی مانده‌ی تقسیم آنها بر ۵ برابر ۲ است. **مثلاً:** ... و۱۲ و ۷ و ۲ و ۳- و ۸- و ...	$a=۵k+۲$
اعداد صحیحی که باقی مانده‌ی تقسیم آنها بر ۵ برابر ۳ است. **مثلاً:** ... و۱۳ و ۸ و ۳ و ۲- و ۷- و ...	$a=۵k+۳$
اعداد صحیحی که باقی مانده‌ی تقسیم آنها بر ۵ برابر ۴ است. **مثلاً:** ... و۱۴ و ۹ و ۴ و ۱- و ۶- و ...	$a=۵k+۴$

بر این اساس می توان نتیجه گرفت که مجموعه‌ی اعداد صحیح در تقسیم بر ۵ به پنج مجموعه افراز شده است. بطور مشابه این موضوع را برای هر عدد طبیعی می توان مطرح نمود و افراز لازم را تشکیل داد.

تمرین ۳۲ : نشان دهید که هر عدد صحیح را می توان به شکل $۲k$ یا $۲k+۱$ نوشت.

حل: بنابر قضیه‌ی الگوریتم تقسیم می توان نوشت:

$$a\in Z \to a=۲q+r \quad , \quad ۰\le r<۲$$

و چون $r\in Z$ پس یا $r=۰$ یا $r=۱$ در هر صورت داریم:

$$\begin{cases} r=۱ \\ a=۲q+r \end{cases} \to a=۲q+۱ \qquad و \qquad \begin{cases} r=۰ \\ a=۲q+r \end{cases} \to a=۲q$$

توجه : اگر $k \in Z$ در این صورت همه‌ی اعداد صحیح، به شکل $x = ۲k$ را زوج و همه‌ی اعداد صحیح، به شکل $y = ۲k + ۱$ را فرد می نامند.

تمرین۳۳ : نشان دهید که هر عدد صحیح را می توان به شکل $۳k$ یا $۳k + ۱$ یا $۳k + ۲$ نوشت.

حل: بنابر قضیه‌ی الگوریتم تقسیم می توان نوشت:

$$a \in Z \to a = ۳q + r \quad , \quad ۰ \le r < ۳$$

و چون $r \in Z$ پس یا $r = ۰$ یا $r = ۱$ یا $r = ۲$ در هر صورت داریم:

$$\begin{cases} r = ۰ \\ a = ۳q + r \end{cases} \to a = ۳q$$

$$\begin{cases} r = ۱ \\ a = ۳q + r \end{cases} \to a = ۳q + ۱$$

$$\begin{cases} r = ۲ \\ a = ۳q + r \end{cases} \to a = ۳q + ۲$$

تمرین۳۴ : ثابت کنید که اگر P عددی اوّل و $P > ۳$ باشد،آنگاه به یکی از دو صورت $p = ۶k + ۱$ یا $P = ۶k + ۵$ نوشته می شود.

حل : بنابر قضیه‌ی الگوریتم تقسیم می توان نوشت:

$$a \in Z \to a = ۶q + r \quad , \quad ۰ \le r < ۶$$

پس عدد طبیعی p را می توان به یکی از صورت های زیر نوشت.

الف) $p = ۶k$ ج) $p = ۶k + ۲$ هـ) $p = ۶k + ۴$

ب) $p = ۶k + ۱$ د) $p = ۶k + ۳$ و) $p = ۶k + ۵$

واضح است که در حالت های« الف» و « ج» و« د» و« هـ» عدد مورد نظر به دلیل بخش پذیری بر۲ یا ۳، اوّل نیست. پس تنها حالت های دیگر یعنی « ب» و« و» می مانند که مورد نظر هستند.

تمرین۳۵ : نشان دهید که هر عدد صحیح و فرد را می توان به شکل $۴k + ۱$ یا $۴k + ۳$ نوشت.

حل: بنابر قضیه‌ی الگوریتم تقسیم می توان نوشت:

$$a \in Z \to a = ۴q + r \quad , \quad ۰ \le r < ۳$$

و چون $r \in Z$ پس یا $r=0$ یا $r=1$ یا $r=2$ یا $r=3$ در هر صورت داریم:

$$1)\ \begin{cases} r=0 \\ a=4q+r \end{cases} \rightarrow a=4q$$

$$2)\ \begin{cases} r=1 \\ a=4q+r \end{cases} \rightarrow a=4q+1$$

$$3)\ \begin{cases} r=2 \\ a=4q+r \end{cases} \rightarrow a=4q+2$$

$$4)\ \begin{cases} r=3 \\ a=4q+r \end{cases} \rightarrow a=4q+3$$

در حالت۱ و۳ عدد a زوج است که با فرض مسئله مطابقت ندارند. لذا فقط دو حالت۲ و۴ می مانند که مـورد نظر هستند.

تمرین۳۶ : ثابت کنید که مربع هر عدد فرد به صورت $8q+1$ است. $(q \in Z)$

حل: چون a عدد فرد است پس $a=2k+1$ در نتیجه

$$a^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4k(k+1)+1$$

$k(k+1)$ حاصل ضرب دو عدد صحیح متوالی است لذا $k(k+1)=2q$

و در نهایت داریم:

$$a^2=4(2q)+1=8q+1$$

تمرین۳۷ : اگر n عدد صحیح باشد. ثابت کنید $3 \mid n^3-n$

حل: بنابر قضیه‌ی الگوریتم تقسیم می توان نوشت:

$$a \in Z \rightarrow a=3q+r \quad , \quad 0 \le r < 3$$

و چون $r \in Z$ پس یا $r=0$ یا $r=1$ یا $r=2$ در هر صورت داریم:

$$\begin{cases} r=0 \\ a=3q+r \end{cases} \rightarrow a=3q$$

$$n^3-n=(3q)^3-(3q)=27q^3-3q=3(\underbrace{9q^3-q}_{k})=3k \rightarrow 3 \mid n^3-n$$

$$\begin{cases} r = ۱ \\ a = ۳q + r \end{cases} \rightarrow a = ۳q + ۱$$

$$n^۳ - n = (۳q+۱)^۳ - (۳q+۱) = ۲۷q^۳ + ۲۷q^۲ + ۹q + ۱ - ۳q - ۱$$

$$= ۳(\underbrace{۹q^۳ + ۹q^۲ + ۲q}_{k}) = ۳k \rightarrow ۳ \mid n^۳ - n$$

$$\begin{cases} r = ۲ \\ a = ۳q + r \end{cases} \rightarrow a = ۳q + ۲$$

$$n^۳ - n = (۳q+۲)^۳ - (۳q+۲) = ۲۷q^۳ + ۵۴q^۲ + ۳۶q + ۸ - ۳q - ۲$$

$$= ۳(\underbrace{۹q^۳ + ۱۸q^۲ + ۱۱q + ۲}_{k}) = ۳k \rightarrow ۳ \mid n^۳ - n$$

تمرین۳۸ : اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش پذیر باشند، ثابت کنید باقی ماندهی تقسیم نیز همواره بر n بخش پذیر است.

حل : فرض کنیم که $a = bq + r$ پس :

$$n \mid a \qquad (۱)$$

$$n \mid b \rightarrow n \mid bq \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} n \mid a - bq \xrightarrow{a-bq=r} n \mid r$$

تمرین۳۹ : اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد. ثابت کنید، همواره اعداد صحیح a و $a+۲$ و $a+۴$ بر ۳ بخش پذیر است.

حل : برای عدد صحیح a یکی از حالت زیر وجود دارد.

حالت اوّل :

$$a = ۳k \rightarrow ۳ \mid a$$

حالت دوّم :

$$a = ۳k + ۱ \rightarrow a + ۲ = ۳k + ۳ \rightarrow a + ۲ = ۳(k+۱) \rightarrow ۳ \mid a + ۲$$

حالت سوّم :

$$a = ۳k + ۲ \rightarrow a + ۴ = ۳k + ۶ \rightarrow a + ۴ = ۳(k+۲) \rightarrow ۳ \mid a + ۴$$

تمرین ۴۰ : ثابت کنید، تفاضل مکعب های دو عدد صحیح متوالی، عددی فرد است.

حل : فرض کنیم که

$a=n$ و $b=n+1$

لذا

$$b^3-a^3=(n+1)^3-(n)^3=(n^3+3n^2+3n+1)-n^3$$

$$=3n^2+3n+1=\underbrace{3n(n+1)}_{2q}+1=2q+1$$

تمرین ۴۱ : با فرض صحیح و غیر صفر بودن عدد m حاصل هر یک از موارد زیر را به دست آورید.

الف) $[m^2,m]$

ب) (m^2,m^5)

پ) $([m^2,m],m^5)$

ت) $(2m,6m^3)$

ث) $(3m+1,3m+2)$

ج) $(m^7,(m^2,m^3))$

ح) $[m^3,m^2]$

خ) $[(72,48),120]$

حل :

الف)

$$m\,|\,m^2\rightarrow[m^2,m]=m^2$$

ب)

$$m^2\,|\,m^5\rightarrow(m^2,m^5)=m^2$$

پ)

$$([m^2,m],m^5)=(m^2,m^5)=m^2$$

ت)

$$(2m,6m^3)=2\,|\,m\,|$$

ث)

$$(3m+1,3m+2)=1$$

دو عدد $3m+1$ و $3m+2$ دو عدد صحیح متوالی هستند.

ج)

$$(m^7,\underbrace{(m^2,m^3)}_{m^2})=(m^7,m^2)=m^2$$

چ)

$$[m^{۳},m^{۲}]=|m^{۳}|$$

ح)

$$[(۷۲,۴۸),۱۲۰]=[\underbrace{(۷۲,۴۸)}_{۲۴},۱۲۰]=[۲۴,۱۲۰]=۱۲۰$$

یادمان باشد که ۲۴|۱۲۰

تمرین۴۲ : ثابت کنید که حاصل ضرب هر سه عدد طبیعی متوالی بر۶ بخش پذیر است.

حل: فرض کنیم که

$a=n+۱$ و $b=n+۲$ و $c=n+۳$

لذا

$$abc=(n+۱)(n+۲)(n+۳)=\frac{۱\times۲\times۳\times...\times n\times(n+۱)\times(n+۲)\times(n+۳)}{۱\times۲\times۳\times...\times n}$$

$$=\frac{(n+۳)!}{n!}=\frac{(n+۳)!}{n!}\times\frac{۳!}{۳!}=\frac{(n+۳)!}{n!\times۳!}\times۳!$$

$$=\frac{(n+۳)!}{۳!\times[(n+۳)-۳]!}\times۳!=\binom{n+۳}{۳}\times۳!=k\times۶=۶k$$

توجه : تمرین فوق برای هر سه عدد صحیح متوالی نیز قابل اثبات است. برای مثال اگر هر سه عدد a و b و c منفی باشند در این صورت:

$$abc=-۶k=۶k'$$

تمرین۴۳ : ثابت کنید که اگر n عدد صحیح زوج باشد، آنگاه $۴۸|n^{۳}-۴n$

حل: چون n عدد صحیح زوج است پس $n=۲k$ از طرفی

$$n^{۳}-۴n=(۲k)^{۳}-۴(۲k)=۸k^{۳}-۸k=۸k(k^{۲}-۱)=۸k(k+۱)(k-۱)$$

و چون حاصل ضرب هر سه عدد صحیح متوالی مضرب ۶ است پس:

$$n^{۳}-۴n=۸(۶q)=۴۸q$$

***