

یادآوری

قبلا برای رد کردن یک حکم کلی، از مثال نقض استفاده می کردیم؛ همچنین فهمیدیم با ارائه مثال (به هر تعداد) نمی توان درستی یک حکم کلی را نتیجه گرفت و لازم است با استدلال های معتبر، درستی حکم را ثابت کنیم؛ یک روش اثبات مستقیم بود که بارها بر اساس آن اثبات هایی را دیده اید!

مثال درستی یا نادرستی گزاره های زیر را بررسی کنید:

۱) مجموع سه عدد طبیعی متوالی بر ۳ بخش پذیر است.

۲) عدد $2^{2^n} + 1$ به ازای همه عددهای طبیعی n ، عددی اول است. $2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 641 \times 6700417$

تمرین هریک از گزاره های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض رد کنید.

۱) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.

۲) برای هر دو عدد حقیقی x و y : $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

۳) حاصل ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش پذیر است.

۴) برای هر عدد طبیعی بزرگ تر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است.

۵) مجموع هر دو عدد گویا، عددی گویاست.

۶) اگر برای هر سه مجموعه A ، B و C داشته باشیم $A \cup B = A \cup C$ آنگاه $B = C$

۷ اگر k حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه $4k+1$ مربع کامل است.

خواندنی

حکم «برای n های طبیعی عبارت $991n^2 + 1$ هیچ گاه مجذور کامل نیست.»

مثال نقض: کوچک ترین عدد طبیعی که به ازای آن $991n^2 + 1$ مجذور کامل باشد ۲۹ رقم دارد! $n = 12055735790331359447442538737$

اثبات با در نظر گرفتن همه حالت ها

گاهی برای اثبات یک حکم، نشان می دهیم حکم در همه حالات ممکن برای مساله برقرار است و از آنجا درستی حکم ثابت می شود

سؤال ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n ، $7 - 5n + n^2$ عددی فرد است.

نکته

اگر زوج بودن n را با p و فرد بودن n را با q و فرد بودن $7 - 5n + n^2$ را با r نمایش دهیم، حکم را می توان به صورت گزاره $p \vee q \Rightarrow r$ نمایش داد. با توجه به هم ارزی $p \vee q \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ شیوه اثبات توجیه می شود. به طریق مشابه، برای هر تعداد متناهی گزاره دلخواه داریم:

$$P_1 \vee P_2 \vee \dots \vee P_n \Rightarrow r \equiv (P_1 \Rightarrow r) \wedge (P_2 \Rightarrow r) \wedge \dots \wedge (P_n \Rightarrow r)$$

مثال ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab = 0$ آنگاه $a = 0$ یا $b = 0$.

برای a دو حالت ممکن است رخ دهد:

ا) اگر $a = 0$ ، در این حالت حکم برقرار است

ب) اگر $a \neq 0$ ، در این حالت a^{-1} یک عدد حقیقی است و داریم: $ab = 0 \Rightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1} \times 0 \Rightarrow b = 0$

بنابراین حکم برقرار است.

مسئله ا) اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، ثابت کنید $a^2 + b^2$ زوج است.

ب) $A = \{3, 4\}$ یک زیرمجموعه از مجموعه $S = \{1, 2, \dots, 6\}$ است و $n \in S$ ، اگر $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ یک عدد زوج باشد ثابت کنید $n \in A$.

اثبات به روش برهان خلف

اثبات غیرمستقیم

در روش برهان خلف فرض می‌کنیم که حکم نادرست باشد و سپس با استفاده از قوانین منطق گزاره‌ها و دنباله‌ای از استدلال‌های درست و مبتنی بر فرض به یک نتیجه غیرممکن یا نتیجه متضاد با فرض می‌رسیم و از آنجا معلوم می‌شود که فرض نادرست بودن حکم باطل است و درستی حکم ثابت می‌گردد.

مسئله ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

مسئله حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

مسئله a_1, a_2 و a_3 عددهایی صحیح هستند و b_1, b_2 و b_3 هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت کنید $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ عددی زوج است.

مسئله درستی گزاره‌های زیر را با استفاده از روش برهان خلف ثابت کنید.
ا اگر x یک عدد گنگ باشد، ثابت کنید $\frac{1}{x}$ نیز گنگ است.

ب اگر تابع f در $x = a$ پیوسته ولی g در $x = a$ ناپیوسته باشد، ثابت کنید $f+g$ در $x = a$ ناپیوسته است.

اثبات‌های بازگشتی / گزاره‌های هم‌ارز

یادآوری

ا اگر ارزش دو گزاره یکسان باشد آنها را گزاره‌های **هم‌ارز (هم‌ارزش)** می‌نامیم.
ب اگر P و Q دو گزاره هم‌ارز (یعنی همواره هر دو درست یا هر دو نادرست) باشند، آن‌گاه گزاره‌ی $P \Leftrightarrow Q$ یک **گزاره درست** است. به عکس اگر ترکیب دو شرطی $P \Leftrightarrow Q$ درست باشد، آن‌گاه P و Q دو گزاره هم‌ارز خواهند بود و اگر ارزش یکی را بدانیم، ارزش دیگری نیز همان است.

مسئله اگر $a, b \in \mathbb{R}$ کدام یک از ترکیب‌های دو شرطی زیر درست است؟

$$a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2 \quad \text{ب} \qquad a = b \Leftrightarrow a^3 = b^3 \quad \text{ا}$$

$$a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2 \quad \text{ت} \qquad a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3 \quad \text{پ}$$

مثال اگر a و b دو عدد حقیقی باشند ثابت کنید: $a^2 + ab + b^2 \geq 0$

ترکیب دو شرطی $a^2 + ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0$ بیانگر آن است که دو گزاره هم‌ارز هستند چون گزاره سمت راست یک گزاره ی همیشه درست است، پس گزاره سمت چپ (حکم) نیز چنین است؛

اثبات به روش بازگشتی:

مسئله اگر $a > 0$ ثابت کنید $a + \frac{1}{a} \geq 2$

مسئله ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.

به بیان دیگر: اگر a و b دو عدد نامنفی باشند، ثابت کنید: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

مسئله اگر a و b دو عدد حقیقی باشند ثابت کنید: $a^2 + ab + b^2 \geq 0$

تذکره! از «روش بازگشتی» برای نشان دادن نادرستی یک گزاره نیز می توان استفاده کرد.

مسئله ۱ اگر n یک عدد طبیعی باشد، آیا زوج بودن n و زوج بودن n^2 هم ارزند؟

۲ آیا دو گزاره زیر هم ارزند؟

- Ⓐ نقطه C روی عمود منصف پاره خط AB قرار دارد.
 Ⓑ فاصله نقطه C از دو سر پاره خط AB یکسان است.

پرسش و تمرین

۱ گزاره‌های زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید :

ا) اگر x و y دو عدد حقیقی (مخالف صفر) باشند داریم : $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$

ب) برای هر سه عدد حقیقی x و y و z داریم : $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

نتیجه: $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$

۲ عددی حقیقی مانند x ارائه کنید به طوری که $x^3 < x^2$.

۳ اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha - \beta$ و $\alpha + 2\beta$ گنگ هستند.

۴ آیا اعدادی صحیح مانند x و y وجود دارند که : $x^2 + y^2 = (x + y)^2$

۵ آیا مقادیر حقیقی و ناصفر a و b چنان وجود دارند که : $(a + b \neq 0)$ $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

۶ گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض آنها را رد کنید.
ا) مربع و مکعب هر عدد فرد عددی فرد است.

ب) میانگین پنج عدد طبیعی متوالی همان عدد وسطی است.

مفهوم شمارنده:

مثال: شمارنده های عدد ۱۲ را بنویسید:

عاد کردن یا شمردن:

فرض کنیم $b \neq 0$ یک عدد صحیح و a یک شمارنده ی آن باشد؛ در این حالت می نویسیم: $a|b$ و می خوانیم a می شمارد b را یا a عاد می کند عدد b را و یا عدد b بر a بخش پذیر است

نکته از مطالب بالا نتیجه می شود: $a|b$ هرگاه عدد صحیحی مانند q یافت شود به گونه ای که $b = aq$.

تذکره هرگاه b بر a تقسیم پذیر نباشد می نویسیم $a \nmid b$.

چند نکته: برای هر عدد صحیح a ، همواره:

$$\pm 1 | a \quad \text{ا}$$

$$a | a \quad \text{ب}$$

$$a | 0 \quad \text{پ}$$

قراداد: صفر عدد صفر را می شمارد: $0|0$.

کار در کلاس ۱ با توجه به تعریف رابطه عاد کردن جاهای خالی را پر کنید. $7|63 \Leftrightarrow 63 = \dots \times \dots$ (الف)

$$91 = 7 \times \dots \Leftrightarrow \dots | 91 \quad \text{ب}$$

$$-6|54 \Leftrightarrow \dots = \dots \times (-6) \quad \text{پ}$$

$$5|-35 = \Leftrightarrow \dots = 5 \times \dots \quad \text{ت}$$

$$0 = 18 \times \dots \Leftrightarrow 18 | \dots \quad \text{ث}$$

$$a|1 \Rightarrow a = \dots \text{ یا } a = \dots \quad \text{ج}$$

$$26 = 2 \times 13 \Rightarrow 2 | \dots \text{ و } \dots | 26 \quad \text{چ}$$

۲ با استفاده از تعریف عاد کردن و تقسیم اعداد توان دار با پایه های برابر ابتدا نشان دهید: $3^5|3^9$

سپس ثابت کنید: $\forall m, n \in \mathbb{N}, m \leq n \Rightarrow a^m | a^n$

خواص رابطه عاد کردن

خاصیت ۱ اگر عدد a عدد b را بشمارد، آنگاه هر مضرب عدد b را نیز می شمارد یعنی: $a|b \Rightarrow a|mb$

مثال: $3|6 \Rightarrow 3|6 \times 5$ ، $3|6 \times 4$ ، $3|6 \times (-7)$ ، ...

نتیجه: اگر عدد a عدد b را بشمارد، آنگاه b^2 را می شمارد و در حالت کلی b^n را می شمارد که $n \in \mathbb{N}$ است. یعنی:

$$1 \quad a|b \Rightarrow a|b^2$$

$$2 \quad a|b \Rightarrow a|b^n$$

سؤال ۱ آیا از اینکه $a|bc$ می توان نتیجه گرفت که a حداقل یکی از دو عدد b و c را عاد می کند؟

سؤال ۲ آیا از اینکه $a|b$ می توان نتیجه گرفت $ka|kb$ ؟

آیا از $ka|kb$ می توان نتیجه گرفت $a|b$ ؟

خاصیت ۲ اگر عدد a ، عدد b را بشمارد و b نیز c را بشمارد آنگاه a ، عدد c را می شمارد: $a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$

نکته این خاصیت را خاصیت تعدی برای رابطه عاد کردن، می نامیم.

مسئله نشان دهید: $a|b \Rightarrow a|b^n$

خاصیت ۳ هرگاه عددی دو عدد را بشمارد آنگاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می شمارد:

$$a|b, a|c \Rightarrow a|b \pm c$$

سؤال ۳ آیا از اینکه $a|b \pm c$ همواره می توان نتیجه گرفت که $a|b$ یا $a|c$ ؟

خاصیت ۴ اگر $a|b$ و $b \neq 0$ در این صورت $|a| \leq |b|$.

مسئله ثابت کنید: اگر $a|b$ و $b|a$ آنگاه $a = \pm b$.

نتیجه: اگر $a|a$ و $a|1$ آنگاه $a = \pm 1$.

کار در کلاس ۱ اگر $a \neq 0$ عددی صحیح و دو عدد $(7m+6)$ و $(6m+5)$ بر a بخش پذیر باشند ثابت کنید $a = \pm 1$.

۲ اگر $a|b$ نشان دهید که $a^n|b^n$.

۳ اگر $a|b$ و $c|d$ نشان دهید که $ac|bd$.

۴ اگر $a|b$ و $a|c$ نشان دهید که $a|mb \pm nc$.

یادآوری

مفهوم عدد اول: هر عدد طبیعی و بزرگ تر از یک که هیچ شمارنده مثبتی به جز یک و خودش نداشته باشد، عدد اول نامیده می شود.

مجموعه اعداد اول: مجموعه ای نامتناهی است که به صورت $P = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ نمایش داده می شود.

نکته اگر p عددی اول باشد و a عددی طبیعی و $a|p$ در این صورت $a=1$ یا $a=p$.

سؤال اگر a عددی طبیعی باشد و دو عدد $(9k+7)$ و $(7k+6)$ را عاد کند، ثابت کنید $a=1$ یا $a=5$.

مسئله ثابت کنید:

Ⓐ $7 \mid 100! + 7$

Ⓑ $\forall k \leq n, k \mid n! + k$

تکته اگر $b = aq$ یا $a \mid b$ یعنی a شمارنده b است یا b بر a بخش پذیر است و این یعنی a مقسوم علیه b است یا b مضرب a است

تعریف عدد طبیعی d را ب م م دو عدد صحیح a و b می نامیم (a و b هر دو با هم صفر نیستند) و می نویسیم $(a, b) = d$ هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند

Ⓐ $d \mid a, d \mid b$

Ⓑ $\forall m > 0, m \mid a, m \mid b \Rightarrow m \leq d$

و اگر دو شرط برقرار باشند آنگاه $(a, b) = d$.

تکته ۱ شرط (الف) مقسوم علیه مشترک بودن را برای d تأمین می کند
شرط (ب) نشان می دهد از هر مقسوم علیه مشترک دلخواهی چون m ، بزرگ تر است.

تکته ۲ اگر $(a, b) = 1$ در این صورت می گوئیم a و b نسبت به هم اولند.

$(3, 4) =$, $(4, 9) =$, $(7, 11) =$, $(1, 12) =$

$(6, 9) =$, $(8, 16) =$, $(0, 6) =$, $(4, -6) =$

مسئله محاسبه کنید!

تعریف عدد طبیعی c را ک م م دو عدد ناصفر a و b می نامیم و می نویسیم $[a, b] = c$ هرگاه دو شرط

Ⓐ و Ⓑ برقرار باشند $a \mid c, b \mid c$

Ⓑ $\forall m > 0, a \mid m, b \mid m \Rightarrow c \leq m$

و اگر دو شرط برقرار باشند آنگاه $[a, b] = c$

سؤال توضیح دهید که شرط های (الف) و (ب) هر یک چه ویژگی را تأمین می کنند؟

$[3, 4] =$, $[6, 4] =$, $[1, 8] =$, $(-4, 16) =$

مسئله محاسبه کنید!

کار در کلاس ۱ با توجه به تعاریف ب م و ک م ثابت کنید:

۱ $a|b \Rightarrow (a,b) = |a|$

۲ $a|b \Rightarrow [a,b] = |b|$

۲ اگر p عددی اول باشد و $a \in \mathbb{Z}$ و $p \nmid a$ ، ثابت کنید، $(p,a) = 1$

سؤال ؟ اگر p عددی اول نباشند و $a \in \mathbb{Z}$ و $p \nmid a$ ، آیا می توان نتیجه گرفت $(p,a) = 1$ ؟

قضیه تقسیم و کاربردها

قضیه تقسیم (بدون اثبات):

اگر a عددی صحیح و b عدد طبیعی باشد در این صورت، (با تقسیم a بر b) اعدادی صحیح و منحصر به فرد مانند q و r یافت می شوند به قسمی که $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$.
 a را مقسوم، b را مقسوم علیه، q را خارج قسمت و r را باقیمانده می نامیم.

توجه: اگر $r = 0$ باشد، می گوئیم a بر b بخش پذیر است؛

مسئله اگر باقیمانده تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقیمانده تقسیم عدد $(2m - 5n)$ را بر ۱۷ به دست آورید.

افراز مجموعه \mathbb{Z} به کمک قضیه تقسیم

اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد، با تقسیم آن بر عدد طبیعی b ، و با توجه به اینکه باقیمانده تقسیم یعنی r در رابطه $0 \leq r < b$ صدق می‌کند، برای a بر حسب r دقیقاً b حالت وجود دارد

مسئله در تقسیم بر ۵، افراز اعداد صحیح را بنویسید؟

مسئله اگر $m \in \mathbb{Z}$ نشان دهید که m را به یکی از دو صورت $2k$ یا $2k+1$ (زوج یا فرد) می‌توان نوشت.

مسئله ثابت کنید اگر $P > 3$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $P=6k+1$ یا $P=6k+5$ نوشته می‌شود.

مسئله ابتدا ثابت کنید هر عدد صحیح و فرد مانند a به یکی از دو صورت $4k+1$ یا $4k+3$ نوشته می‌شود

سپس نشان دهید که مربع هر عدد فرد به شکل $(8t+1)$ نوشته می‌شود (باقیمانده تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸، مساوی با ۱ است.)

سؤال در تقسیم بر ۴، افراز مجموعه \mathbb{Z} را بنویسید؟



پرسش و تمرین

- ۱ اگر فرض کنیم $ab = cd$ (a, b, c, d اعداد صحیح و ناصفرند) در این صورت پنج رابطه عاد کردن از این تساوی نتیجه بگیرید.
- ۲ اگر $a|b$ ثابت کنید $a|-b$ و $-a|b$ و $-a|-b$.
- ۳ اگر $a > 1$ و $a|9k+4$ و $a|5k+3$ ثابت کنید a عددی اول است.
- ۴ اگر k ای در \mathbb{Z} باشد که داشته باشیم، $5|4k+1$ ثابت کنید: $25|16k^2 + 28k + 6$
- ۵ آیا از اینکه $a|b$ و $c|d$ همواره می توان نتیجه گرفت که $a+c|b+d$ ؟
- ۶ ثابت کنید: **الف** هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اولند.
- ب** هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اولند.

۷ اگر $P \neq q$ و P و q هر دو عدد اول باشند ثابت کنید $(P, q) = 1$.

۸ اگر $m, n \in \mathbb{N}$ و $a, b \in \mathbb{Z}$ در این صورت ثابت کنید: $m \leq n, a|b \Rightarrow a^m | b^n$

۹ اگر باقیمانده تقسیم عدد a بر دو عدد ۷ و ۸ به ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقیمانده تقسیم عدد a را بر ۵۶ بیابید.

۱۰ اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $2|a+b$ در این صورت باقیمانده تقسیم عدد $(a^2 + b^2 + 3)$ را بر ۸ بیابید.

۱۱ اگر n عددی صحیح باشد ثابت کنید $3|n^3 - n$

۱۲ اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش پذیر باشند، ثابت کنید باقی مانده تقسیم نیز همواره بر n بخش پذیر است.

۱۳ اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+2$ یا $a+4$ بر ۳ بخش پذیر است.

۱۴ ثابت کنید تفاضل مکعب‌های دو عدد صحیح متوالی، عددی فرد است.

۱۵ ثابت کنید حاصل ضرب سه عدد متوالی همواره بر $3!$ بخش پذیر است.

۱۶ حاصل هریک را به دست آورید: $(m \in \mathbb{Z})$

ا $([m^2, m], m^5)$

ب $(2m, 6m^2)$

پ $(3m+1, 3m+2)$

ت $[m^4, (m^2, m^3)]$

ث $[(72, 48), 120]$

تعریف

برای هر عدد طبیعی مانند m و هر دو عدد صحیح مانند a و b اگر $m \mid a - b$ (و a بر m باقیمانده باشند) می‌گوییم « a هم‌نهشت با b است به پیمانه m » و می‌نویسیم $a \equiv b \pmod{m}$.

تعریف رابطه هم‌نهشتی به پیمانه m ، به زبان ریاضی عبارت است از:
 $\forall a, b \in \mathbb{Z}, a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow m \mid a - b \quad (m \in \mathbb{N})$

یادآوری

در درس قبل دیدیم که باقیمانده‌های تقسیم اعداد بر ۴ عبارت‌اند از ۰، ۱، ۲ و ۳. همچنین می‌دانیم مجموعه‌های زیر یک افراز برای مجموعه اعداد صحیح تشکیل می‌دهند:

$$A_0 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4k\} = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots, 16, \dots\} = [0]_4$$

$$A_1 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4k + 1\} = \{\dots, -7, -3, 1, 5, \dots, 13, \dots, 21, \dots\} = [1]_4$$

$$A_2 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4k + 2\} = \{\dots, -6, \dots, 2, 6, 10, \dots\} = [2]_4$$

$$A_3 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4k + 3\} = \{\dots, -13, \dots, -5, -1, 3, 7, 11, \dots\} = [3]_4$$

اگر بررسی کنید خواهید دید هر دو عضو دلخواه از هریک از مجموعه‌های بالا به پیمانه ۴ هم‌نهشت هستند (دارای باقیمانده‌ی یکسانی هستند)؛ بر این اساس به هریک از مجموعه‌های بالا $[0]_4$ و $[1]_4$ و $[2]_4$ و $[3]_4$ کلاس یا دسته‌ی هم‌نهشتی به پیمانه‌ی ۴ می‌گویند؛

مجموعه همه اعداد صحیح که با باقیمانده تقسیم آنها بر عدد طبیعی m برابر با r می‌باشد یعنی، $[r]_m = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = mk + r\}$ ، را کلاس یا دسته هم‌نهشتی r به پیمانه m می‌نامیم.

نکته

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, a, b \in [r]_m \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{m}$$

مسئله

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, a, b \in [r]_m \Leftrightarrow m \mid a - b \quad (m \in \mathbb{N})$$

نتیجه:

تذکر مهم: (اگر باقیمانده تقسیم a بر m مساوی با r باشد در این صورت $a \equiv r \pmod{m}$)

$$a = mq + r \Rightarrow a \equiv r \pmod{m}$$

ویژگی‌های رابطه هم‌نهشتی

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm c \pmod{m}$$

ویژگی ۱:

ویژگی ۲: $a \equiv b \Rightarrow ac \equiv bc$

سؤال؟ اگر $ac \equiv bc$ ، آیا می توان نتیجه گرفت $a \equiv b$ ؟

$$(a^n - b^n) = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$$

ویژگی ۳: $a \equiv b \Rightarrow a^n \equiv b^n \quad (n \in \mathbb{N})$

$$5^4 \equiv 3^4 \text{ ولی } 5 \not\equiv 3$$

سؤال؟ اگر $a^n \equiv b^n$ ، آیا می توان نتیجه گرفت $a \equiv b$ ؟

۱ $a \equiv b, c \equiv d \Rightarrow ac \equiv bd$

۲ $a \equiv b, c \equiv d \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm d$

ویژگی ۴:

۱ هرگاه بخواهیم هم نهشت عدد a را به پیمانه m ، مشخص کنیم کافی است عدد a را بر m تقسیم کرده و باقیمانده را به دست آوریم.

۲ اگر a و b بر عدد طبیعی m ، هم باقیمانده باشند (باقیمانده های تقسیم a و b بر m ، برابر باشند) در این صورت $a \equiv b$

یادآوری

مسئله باقیمانده تقسیم عدد $A = (27)^9 + 19$ را بر ۱۳ بیابید.

$$a \equiv b \Rightarrow a \pm mt \equiv b \pm mk$$

ویژگی ۶:

مسئله باقیمانده تقسیم عدد $A = (1000)^{12} \times 12 + 10$ را بر ۷ بیابید.

ویژگی ۷: (بدون اثبات) $ac \equiv bc, (c, m) = d \Rightarrow a \equiv \frac{m}{d} b$

نتیجه (مهم): اگر $ac \equiv bc$ و $(c, m) = 1$ در این صورت $a \equiv b$ در واقع قاعده حذف در هم نهشتی‌ها برای هر عدد که نسبت به پیمانه اول باشد برقرار است.

مثال واضح است که $4 \times a \equiv 4 \times 3$ و چون $(4, 3) = 1$ پس $a \equiv 3$.

نکته از ویژگی ۷ (و نتیجه اش) برای حل معادلات هم‌نهشتی و سیاله (که در آینده می‌خوانیم) استفاده می‌شود؛

مسئله یک قاعده کلی برای یافتن باقیمانده تقسیم و بخش‌پذیری اعداد n رقمی بر ۹ بیان کنید.

$$A = 10^{n-1} \times a_{n-1} + \dots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + 10^0 a_0 \Rightarrow A \equiv 1 \times a_{n-1} + \dots + 1 \times a_1 + a_0 \Rightarrow A \equiv \dots$$

نتیجه: «باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۹ برابر است با باقیمانده مجموع ارقام آن عدد بر ۹»

مسئله یک قاعده کلی برای یافتن باقیمانده تقسیم و بخش‌پذیری اعداد n رقمی بر ۳ بیان کنید.

مسئله

یک قاعده کلی برای یافتن باقیمانده تقسیم و بخش پذیری اعداد n رقمی بر ۱۱ بیان کنید.

$$\begin{array}{l} 11 \\ 10 \equiv -1 \end{array}$$

مسئله

یک قاعده کلی برای یافتن باقیمانده تقسیم و بخش پذیری اعداد n رقمی بر ۲ و ۵ و ۱۰ بیان کنید.

$$\begin{array}{l} 2 \quad 5 \quad 10 \\ 10 \equiv 0 \quad 10 \equiv 0 \quad 10 \equiv \dots \end{array}$$

تذکره! یکی از کاربردهای هم‌نهستی در تقویم‌نگاری و محاسبه روزهای هفته بر حسب تاریخ مشخص شده است.

چند مطلب ضروری برای این نوع مسائل:

- آ هر روز از هفته مانند شنبه پس از گذشت ۷ روز دوباره تکرار می‌شود
- ب شش ماه اول سال همگی ۳۱ روزه و شش ماه دوم سال غیر از اسفند (که ۲۹ روز است) همگی ۳۰ روزه می‌باشند. البته هر چهار سال یک بار (سال کبیسه) اسفند نیز ۳۰ روزه است.

مسئله

اگر اول مهر ماه در یک سال یکشنبه باشد، در این صورت ۲۲ بهمن در همان سال چند شنبه است؟

مسئله

اگر در یک سال، اول مهر، شنبه باشد در این صورت ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی است؟

مسئله از روی تقویم سال جاری روز هفته را برای هفتم تیر مشخص کنید و با توجه به آن و به روش فوق مشخص کنید ۲۲ بهمن در سال جاری چه روزی از هفته است؟ درستی پاسخ خود را از روی تقویم نیز بررسی کنید.

معادله هم‌نهشتی رابطه هم‌نهشتی همراه با مجهولی چون x به فرم $ax \equiv b \pmod{m}$ ، $(a, b \in \mathbb{Z})$ ، را یک معادله هم‌نهشتی می‌نامیم و منظور از حل یک معادله هم‌نهشتی پیدا کردن همه جواب‌هایی چون $x_0 \in \mathbb{Z}$ است که در معادله فوق صدق کنند یعنی $ax_0 \equiv b \pmod{m}$.

یادآوری $x \equiv a \pmod{m} \Leftrightarrow m \mid x - a \Leftrightarrow x = mk + a$

روش حل معادله هم‌نهشتی $ax \equiv b \pmod{m}$:

مسئله جواب‌های عمومی معادله $4x \equiv 17 \pmod{5}$ را به دست آورید.

مسئله همه اعداد صحیح را بیابید که سه برابر آنها منهای ۱۳ بر ۷ بخش پذیر باشند. $3x \equiv 13 \pmod{7}$ یا $7 \mid 3x - 13$

قضیه (بدون اثبات): معادله هم‌نهشتی $ax \equiv b \pmod{m}$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $(a, m) \mid b$

نتیجه: اگر $(a, m) = 1$ چون برای هر b ، همواره $1 \mid b$ پس معادله $ax \equiv b \pmod{m}$ همواره دارای جواب است.

مسئله پاسخ معادلات همنهشتی زیر را بدست آورید (در صورت وجود)

ا $6x \equiv 11$

ب $4x \equiv 18$

معادله سیاله $ax + by = c$ را که در آن، x و y مجهول هایی در اعداد صحیح و $a, b, c \in \mathbb{Z}$ هستند را یک معادله سیاله درجه اول یا خطی می نامیم.

روش حل معادلات سیاله (با تبدیل به معادله همنهشتی):

مسئله جواب های عمومی معادله سیاله $4x + 5y = 9$ را بیابید.

نکته: به ازای مقادیر مختلف برای

مسئله آیا می توانید یک کیسه ۱۹ کیلویی را با وزنه های ۳ و ۴ کیلویی وزن کنید؟

مسئله به چند طریق می توان ۱۷۰۰۰ تومان را به اسکناس های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی خرد کرد؟

مسئله در یک رستوران فقط دو نوع غذای قورمه سبزی و قیمه وجود دارد. اگر ۵ نفر وارد این رستوران شوند به چند طریق می توانند سفارش غذا بدهند؟ (هر نفر فقط یک پرس غذا میل می کند)

مسئله تیراندازی به سمت یک هدف شامل دو دایره هم مرکز تیراندازی می کند، اگر به دایره با شعاع کوچک تر بزند ۵ امتیاز و اگر به دایره بزرگ تر بزند ۳ امتیاز می گیرد. اگر او کمتر از ۱۵ تیر، تیراندازی کرده باشد و همه تیرها داخل دایره بزرگ تر اصابت کرده باشد و در پایان ۴۲ امتیاز گرفته باشد چند حالت برای او در این تیراندازی می تواند ثبت شود؟



پرسش و تمرین

۱ عدد ۱۳۹۸ به کدام دسته هم‌نهستی به پیمانه ۹ تعلق دارد؟

۲ اگر $k \in \mathbb{Z}$ ثابت کنید، فقط یکی از سه حالت زیر امکان‌پذیر است
 $k \equiv 2 \pmod{3}$ یا $k \equiv 1 \pmod{3}$ یا $k \equiv 0 \pmod{3}$ (به عبارت دیگر، $k \equiv 0 \pmod{3}$ یا $k \equiv 1 \pmod{3}$ یا $k \equiv 2 \pmod{3}$)

۳ اگر $a \equiv b \pmod{m}$ و $n|m$ ثابت کنید $a \equiv b \pmod{n}$.

۴ فرض کنیم، $a \equiv b \pmod{m}$ و $b \equiv c \pmod{n}$ و $(m, n) = d$ در این صورت ثابت کنید $a \equiv c \pmod{d}$.

۵ ثابت کنید: اگر باقی‌مانده‌های تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی باشند آن‌گاه $a \equiv b \pmod{m}$.

۶ عکس تمرین ۵ را بیان و اثبات کنید.

۷ با استفاده از بسط دو جمله‌ای ختام یعنی،

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} \times a^n + \binom{n}{1} \times a^{n-1}b + \binom{n}{2} \times a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3} \times a^{n-3}b^3 + \dots + \binom{n}{n} \times b^n$$

ثابت کنید، برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $a, b \in \mathbb{Z}$ همواره $(a+b)^n \equiv a^n + b^n \pmod{ab}$.

۸ با توجه به تمرین ۷ ثابت کنید عدد $12^{51} - 11^{51} - 23^{51}$ بر عدد ۱۳۲ بخش پذیر است.

۹ باقی مانده تقسیم عدد $A = (2^{11} + 7) \times 9$ را بر ۲۳ بیابید.

۱۰ اگر دو عدد $(3a - 5)$ و $(4a - 7)$ رقم یکان برابر داشته باشند رقم یکان عدد $(9a + 6)$ را به دست آورید.

۱۱ باقی مانده تقسیم عدد $A = 1! + 2! + 3! + \dots + 500!$ را بر ۱۰ به دست آورید (رقم یکان A را بیابید)

۱۲ جواب های عمومی معادله سیاله خطی $7x + 5y = 11$ را به دست آورید.

۱۳ به چند طریق می توان ۲۹۰۰۰ تومان را توسط اسکناس های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی خرد کرد؟

۱۴ معادله های هم نهشتی زیر را در صورت امکان حل کرده و جواب های عمومی آنها را به دست آورید.

۱ $423x \equiv 79 \pmod{11}$

ب) $8x \equiv 20 \pmod{12}$

پ) $51x \equiv 11 \pmod{6}$

۱۵) اگر اول مهر ماه در یک سال روز یکشنبه باشد، ۷ اسفندماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

۱۶) اگر ۱۲ بهمن در یک سال جمعه باشد، ۳۱ مرداد ماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

۱۷) همه اعداد صحیح چون a را بیابید که ۵ برابر آنها به علاوه ۹ بر ۱۱ بخش پذیر باشد.

۱۸) به چند طریق می توان یک کیسه ۲۳ کیلویی را با وزنه های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟

۱۹) به چند طریق می توان از بین دو نوع گل یک دسته گل شامل ۹ شاخه گل به دلخواه انتخاب کرد؟

۲۰ شخصی در یک مسابقه علمی شرکت کرده و به سوالات ۷ امتیازی و ۹ امتیازی پاسخ داده است و مجموعاً ۷۳ امتیاز کسب کرده است (پاسخ به هر سؤال یا امتیاز کامل دارد و یا امتیازی ندارد) در این صورت این شخص به چه صورت‌هایی می‌توانسته این امتیاز را به دست آورده باشد؟