

فصل ۳ : ترکیبات (شمارش)

یا دآوری مطالب سالهای قبل :

(۱) اصل ضرب : اگر کاری در مرحله اول به m روش و در مرحله دوم به n روش و در مرحله سوم به p روش و ... انجام شود کل کار به $m \times n \times p \times \dots$ روش انجام می شود

مثال) با حروف کلمه STOP چند کلمه چهار حرفی با تکرار حروف می توان نوشت - در صورتیکه :

$$1 \times 4 \times 4 \times 4 = 64$$

الف) با حرف T شروع شود

$$1 \times 4 \times 4 \times 1 = 16$$

ب) با حرف P شروع شود و به حرف O ختم شود

(۲) جایگشت : تعداد حالت های کنار هم قرار گرفتن n شی متغای را جایگشت آن n شی متغای نامیده و برابر است با : $n!$

مثال) که دانش آموز به چند طریق می تواند در یک صف بایستد ؟

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

(۳) نفر به چند طریق می توانند در یک صف بایستد بطوریکه :

الف) k نفر مشخص همواره کنار هم باشند

$$\text{جواب} = k! \times (n-k+1)!$$

ب) k نفر مشخص همواره کنار هم نباشند

$$\text{جواب} = n! - k! \times (n-k+1)!$$

مثال) به چند طریق می توان ۷ دانش آموز را در یک صف قرار داد بطوریکه :

الف) دو نفر از آنها که برادرند کنار هم باشند.

$$\text{جواب} = 2! \times 4! = 2 \times 24 = 48$$

ب) دو نفر از آنها که برادرند کنار هم نباشند

$$\text{جواب} = 7! - 2! \times 4! = 5040 - 48 = 5040 - 48 = 4992$$

۵) جایگشت k شی از n شی مستقیم:

تعداد حالت‌های کنار هم قرار گرفتن k شی از n شی مستقیم را با علامت

$P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$ نشان داده و از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم:

مثال) با حروف کلمه FAMILY و بدون تکرار حروف چند کلمه ۴ حرفی شامل حرف M می‌توان ساخت؟

حل: قرار دادن حرف M در یکی از چهار مکان به ۴ طریق ممکن است و برگردن سه مکان باقی‌مانده توسط له حرف باقی‌مانده به صورت

زیر ممکن است: $P(d, 3) = \frac{d!}{(d-3)!} = 40$ حالت

حالت = $4 \times 40 = 160$ طبق اصل ضرب

۶) ترکیب k شی از n شی مستقیم:

اگر از بین n شی مستقیم بخواهیم k شی ($k \leq n$) را انتخاب کنیم و حالت‌های کنار هم قرار گرفتن آنها اهمیتی نداشته باشد آنرا یک

ترکیب k شی از n شی می‌گوئیم و با علامت $C(n, k)$ یا $\binom{n}{k}$ نشان

داده و از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم: $C(n, k) = \frac{n!}{k! \times (n-k)!}$

مثال) به چند طریق می‌توان از بین ۸ نفر یک تیم ۳ نفری انتخاب کرد؟

$C(8, 3) = \frac{8!}{3! \times 5!} = 56$

۷) جایگشت‌های با تکرار:

اگر n شی مستقیم داشته باشیم بطوریکه p تای آنها از نوع اول، q تای آنها از نوع دوم و r تای آنها از نوع سوم و... باشد تعداد کل جایگشت‌های آنها برابر است با:

$\frac{n!}{p! \times q! \times r! \times \dots}$

مثال) ۹ نفر به چند طریق می‌توانند در سه اتاق ۲ نفره، ۳ نفره و ۴ نفره در یک هتل اسکان

یابند؟ $\text{جواب} = \frac{9!}{2! \times 3! \times 4!} = \frac{362880}{288} = 1260$

مثال) با حروف کلمه ساسانیان چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت؟

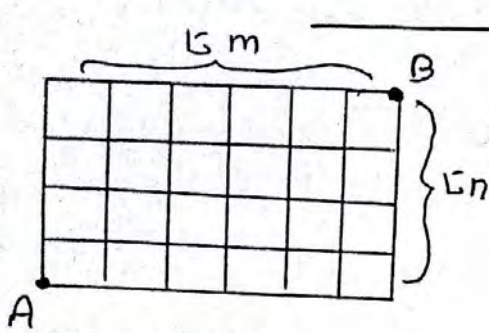
تعداد س = ۵۲

تعداد ن = ۵۲

تعداد الف = ۵۳

تعداد ی = ۵۱

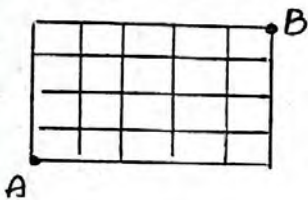
$$\frac{8!}{2! \times 3! \times 2! \times 1!} = \frac{40320}{24} = 1680$$



۸ اثر یک شبکه $n \times m$ مطابق شکل مقابل داشته باشیم و فقط به راست یا بالا حرکت کنیم تعداد مسیرها از A به B برابر است با:

$$\text{تعداد مسیرها} = \frac{(n+m)!}{n! \times m!}$$

مثال) چند مسیر از A به B وجود دارد بطوریکه فقط مجاز باشیم به راست یا بالا حرکت کنیم؟



$$\text{جواب} = \frac{(4+3)!}{4! \times 3!} = \frac{7!}{24 \times 6} = 124$$

(هماهنگت کشوری - خرداد ۹۹)

با ارقام ۴ و ۳ و ۲ و ۲ و ۲ و ۱ و ۱ و ۱ می توان نوشت؟ (۱۵ نمره)

تعداد ۱ = ۵۲

تعداد ۲ = ۵۳

$$\text{جواب} = \frac{7!}{2! \times 3!} = 420$$

(هماهنگت کشوری دیماه ۹۸)

با حروف کلمه «می سی سی پی» چند جایگشت ۸ حرفی با معنایابی می توان نوشت؟ (۱ نمره)

تعداد (ی) = ۵۴

تعداد (س) = ۵۲

$$\text{جواب} = \frac{8!}{4! \times 2!} = 140$$

(هماهنگت کشوری دیماه ۹۸)

۴ کتاب ریاضی مختلف و ۱ کتاب فیزیک همزمان را به چند طریق می توان کنار هم در یک ردیف قرار داد بطوریکه: (۲۵ نمره)
الف) کتابها یکی در میان قرار گیرند.
ب) کتابهای ریاضی کنار هم و کتاب فیزیک نیز کنار هم باشند.
جواب = $4! \times 5!$
جواب = $4! \times 5! \times 2!$

(هماصفت خرداد ۹۸)

با ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ رقمی می‌توان نوشت؟ (انزله)

$$۱ \text{ تعداد} = ۹!$$

$$۲ \text{ تعداد} = ۸!$$

$$۳ \text{ تعداد} = ۷!$$

$$\text{جواب} = \frac{9!}{1! \times 2! \times 3!} = 3 \times 7!$$

(هماصفت خرداد ۹۸)

۶ دانش‌آموز پایه دوازدهم و ۴ دانش‌آموز پایه یازدهم به چند طریق می‌توانند کنار هم در یک ردیف قرار گیرند بطوریکه: (انزله)

الف) بصورت یک در میان قرار گیرند
جواب = $4! \times 6!$ ب) همواره دانش‌آموزان یازدهم کنار هم باشند
جواب = $7! \times 4!$ ج) یک دانش‌آموز خاص یازدهم و یک دانش‌آموز خاص دوازدهم در کنار هم باشند
جواب = $2! \times 10!$

(هماصفت خرداد ۹۹)

۴ دانش‌آموز پایه دهم و ۳ دانش‌آموز پایه یازدهم، به چند طریق می‌توانند در یک ردیف قرار گیرند بطوریکه: (انزله)

الف) هیچ دو دانش‌آموز هم پایه کنار هم نباشند.
جواب = $3! \times 4!$ ب) همواره دانش‌آموزان پایه دهم کنار هم باشند.
جواب = $4! \times 4!$

(هماصفت خرداد ۹۹)

به چند طریق می‌تواند ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آنکه هیچ کس بیش از یک خودکار نداشته باشد؟ (به هر نفر حداکثر یک خودکار داده باشیم) (انزله)

$$P(8, 4) = \frac{8!}{(8-4)!} = \frac{8!}{4!} = 1680$$

تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این کار معادل است با پیدا کردن

تعداد تابع‌های یک‌به‌یک از مجموعه ۴ عضوی به مجموعه‌ای ۸ عضوی

حل معادله سیاله خطی با ضرایب واحد:

قضیه: تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر است با: $\binom{n+k-1}{k-1}$ = جواب

که همان تعداد انتخابهای دلخواه n شاخه گل از بین k نوع گل است

مثال ۱: معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

$n = 7$

$k = 3$

جواب = $\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = \frac{9!}{2! \times 7!} = 36$

مثال ۲: به چند طریق می توان از بین ۴ نوع گل، دسته گلی شامل ۸ شاخه گل را به دلخواه انتخاب کرد؟

حل: تعداد گل های نوع اول را x_1 و نوع دوم را x_2 و نوع سوم را x_3 و نوع

چهارم را x_4 در نظر می گیریم پس: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$

$n = 8$

$k = 4$

جواب = $\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{8+4-1}{4-1} = \binom{11}{3} = \frac{11!}{3! \times 8!} = 165$

مثال ۳: به چند طریق می توانیم ۸ توپ یکسان را در جعبه هایی با شماره های ۱ و ۲ و ۳ قرار دهیم؟

حل: تعداد توپهای جعبه اول را x_1 و جعبه دوم را x_2 و جعبه سوم را

x_3 در نظر می گیریم پس: $x_1 + x_2 + x_3 = 8$

$n = 8$

$k = 3$

جواب = $\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{8+3-1}{3-1} = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2! \times 8!} = 45$

مثال ۴: شش شکلات یکسان را به چند طریق می توان بین علی، رضا و محمد تقسیم کرد بطوریکه به محمد دقیقاً ۲ شکلات برسد؟ $x_1 =$ تعداد شکلاتهای علی

$x_2 =$ تعداد شکلاتهای رضا

$x_1 + x_2 + 2 = 6 \Rightarrow x_1 + x_2 = 4$

$\binom{4+2-1}{2-1} = \binom{5}{1} = 5$

$n = 4, k = 2$

نکته ریاضی :

تعداد جواب‌های طبیعی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر است با :

$$\text{جواب} = \binom{n-1}{k-1}$$

مثال ۱ : معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ چند جواب صحیح و مثبت (طبیعی) دارد ؟

$n=5$
 $k=3$

$$\text{جواب} = \binom{n-1}{k-1} = \binom{5-1}{3-1} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$$

مثال ۲ : به چند طریق می‌توان دسته‌گلی شامل ۹ شاخه گل را از بین ۴ نوع گل انتخاب کرد به شرط آنکه از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب شود ؟

حل : چون از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه باید انتخاب نشود و جواب‌های معادله عدد طبیعی هستند

$x_1 =$ تعداد تلهای نوع اول

$x_2 =$ دوم

$x_3 =$ سوم

$x_4 =$ چهارم

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$$

$n=9$
 $k=4$

$$\text{جواب} = \binom{n-1}{k-1} = \binom{8}{3} = 56$$

حل معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ به روش تغییر متغیره :

اگر در معادله سیاله شرطهایی بصورت $x_1 \geq a$ و $x_2 \geq b$ و ... داشته باشیم در این صورت متغیر را تغییر داده و معادله را طبق شرایط زیر حل می‌کنیم :

$$x_1 \geq a \Rightarrow x_1 - a \geq 0 \xrightarrow{\text{آثر } x_1 = y_1 + a} x_1 = y_1 + a \text{ و } y_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq b \Rightarrow x_2 - b \geq 0 \xrightarrow{\text{آثر } x_2 = y_2 + b} x_2 = y_2 + b \text{ و } y_2 \geq 0$$

مثال ۱ : معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ چند جواب طبیعی دارد ؟

$x_1 \geq 1 \Rightarrow x_1 = y_1 + 1$

$$y_1 + 1 + y_2 + 1 + y_3 + 1 = 7 \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 4$$

$x_2 \geq 1 \Rightarrow x_2 = y_2 + 1$

$n=4$

$x_3 \geq 1 \Rightarrow x_3 = y_3 + 1$

$k=3$

$$\text{جواب} = \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{4+3-1}{3-1} = \binom{6}{2} = 15$$

مثال ۲: معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_d = 14$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آنکه $x_1 > 1$ و $x_3 > 3$ باشد؟

$$x_1 > 1 \Rightarrow x_1 \geq 2 \Rightarrow x_1 = y_1 + 2 \quad y_1 + 2 + x_2 + y_3 + 4 + x_4 + x_d = 14$$

$$x_3 > 3 \Rightarrow x_3 \geq 4 \Rightarrow x_3 = y_3 + 4 \quad \Rightarrow y_1 + x_2 + y_3 + x_4 + x_d = 1$$

$$n=1 \quad k=d \quad \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{1+d-1}{d-1} = \binom{14}{d} = 495$$

مثال ۳: معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_4 = 12$ چند جواب صحیح و مثبت دارد به شرط آنکه $x_3 = 4$ و $x_d > 2$ باشد؟

$$x_d > 2 \Rightarrow x_d \geq 3 \Rightarrow x_d = y_d + 3 \quad x_1 + x_2 + 4 + x_4 + y_d + 3 + x_4 = 12$$

$$x_3 = 4 \quad \Rightarrow x_1 + x_2 + x_4 + y_d + x_4 = 5$$

$$n=5 \quad k=d \quad \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{5+d-1}{d-1} = \binom{9}{d} = 144$$

مثال ۴: (هماهنگ کشوری - دیماه ۹۷): به چند طریق می توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد هرگاه بخواهیم هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟ (انمره)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8 \quad x_i \geq 1 \quad i=1, 2, 3, 4$$

جوابهای طبیعی را خواسته است $n=8 \quad k=4 \Rightarrow \binom{n-1}{k-1} = \binom{8-1}{4-1} = \binom{7}{3} = 35$

(هماهنگ کشوری - شهریور ۹۸): تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_4 = 12$ باشد

$x_1 > 2$ و $x_d \geq 4$ را محاسبه کنید (انمره)

$$x_1 > 2 \Rightarrow x_1 \geq 3 \Rightarrow x_1 = y_1 + 3 \quad y_1 + 3 + x_2 + x_3 + x_4 + y_d + 4 + x_4 = 12$$

$$x_d \geq 4 \Rightarrow x_d = y_d + 4 \quad \Rightarrow y_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_d + x_4 = 5$$

$$n=5 \quad k=4 \quad \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{5+4-1}{4-1} = \binom{10}{3} = 120$$

(هماهنگ دیناه ۹۸):

معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 14$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آنکه $x_1 > 2$ و $x_3 > 3$ باشند (انفره)

$$x_1 > 2 \Rightarrow x_1 \geq 3 \Rightarrow x_1 = y_1 + 3 \quad y_1 + 3 + x_2 + y_3 + 4 + x_4 + x_5 = 14$$

$$x_3 > 3 \Rightarrow x_3 \geq 4 \Rightarrow x_3 = y_3 + 4 \quad \Rightarrow y_1 + x_2 + y_3 + x_4 + x_5 = 7$$

$$n = 7 \quad k = 5 \Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{11}{4} = 330$$

(هماهنگ کشوری - خرداد ۹۸)

تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 10$ با شرط $x_i > 0$ و $i = 2, 3, 4, 5$ را محاسبه کنید (انفره)

$$x_2 > 0 \Rightarrow x_2 \geq 1 \Rightarrow x_2 = y_2 + 1$$

$$x_1 + y_2 + 1 + y_3 + 1 + y_4 + 1 + y_5 + 1 = 10$$

$$x_3 > 0 \Rightarrow x_3 \geq 1 \Rightarrow x_3 = y_3 + 1$$

$$\Rightarrow x_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 7$$

$$x_4 > 0 \Rightarrow x_4 \geq 1 \Rightarrow x_4 = y_4 + 1$$

$$n = 7 \quad k = 5 \Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{10}{4} = 210$$

$$x_5 > 0 \Rightarrow x_5 \geq 1 \Rightarrow x_5 = y_5 + 1$$

(هماهنگ کشوری - خرداد ۹۹)

به چند طریق می توان از بین ۵ نوع گل، ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد اگر بخواهیم از گل نوع دوم حداقل ۲ شاخه و از گل نوع پنجم بیش از ۳ شاخه انتخاب کنیم (۱۲۵ نمره)

$$x_2 \geq 2 \Rightarrow x_2 = y_2 + 2$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 11 \quad \text{و} \quad x_2 \geq 2 \quad \text{و} \quad x_5 \geq 4$$

$$x_1 + y_2 + 2 + x_3 + x_4 + y_5 + 4 = 11$$

$$x_5 \geq 4 \Rightarrow x_5 = y_5 + 4$$

$$\Rightarrow x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + y_5 = 5$$

$$n = 5 \quad k = 5 \Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{9}{4} = 126$$

(مثال) معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 11$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟ (از $x_i < 5$ و $x_i < 1$)

$$x_1 \geq 1 \Rightarrow x_1 = y_1 + 1 \quad x_2 \geq 1 \Rightarrow x_2 = y_2 + 1 \quad x_3 \geq 1 \Rightarrow x_3 = y_3 + 1 \quad x_4 \geq 1 \Rightarrow x_4 = y_4 + 1$$

$$x_5 \geq 1 \Rightarrow x_5 = y_5 + 1 \quad y_1 + 1 + y_2 + 1 + y_3 + 1 + y_4 + 1 + y_5 + 1 = 11 \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 6 \Rightarrow \binom{6+5-1}{5-1} = \binom{10}{4} = 210$$

مربع های لاتین: یک جدول مربعی از اعداد $1, 2, \dots, n$ به شکل یک مربع $n \times n$ را که سطرها و ستون های آن با اعداد $1, 2, \dots, n$ پر شده باشد و در هیچ سطر آن و نیز در هیچ ستون آن عدد تکراری وجود نداشته باشد مربع لاتین می نامیم به هر یک از اعداد درون مربع لاتین یک درایه می گوئیم.

۳	۲	۱	۴
۱	۴	۳	۲
۴	۱	۲	۳
۲	۳	۴	۱

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

در حالت کلی شکل زیر یک مربع لاتین $n \times n$ است که به آن مربع لاتین چرخشی می گوئیم

۱	۲	۳	$n-1$	n
n	۱	۲	$n-2$	$n-1$
$n-1$	n	۱	$n-3$	$n-2$
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
۲	۳	۴	n	۱

تذکره ۴: مربع لاتین از هر مرتبه ای وجود دارد. یک مربع لاتین $n \times n$ داریم \square

ساخت مربع لاتین:

روش چرخشی: در سطر اول اعداد $1, 2, 3, \dots, n$ و از می گذاریم آخرین عدد سطر اول را که n است در ابتدای سطر دوم نوشته و بقیه عدد را در سطر دوم نمی نویسیم به راست می بچرخانیم و این کار را تکرار می کنیم.

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

a	b	c
c	a	b
b	c	a

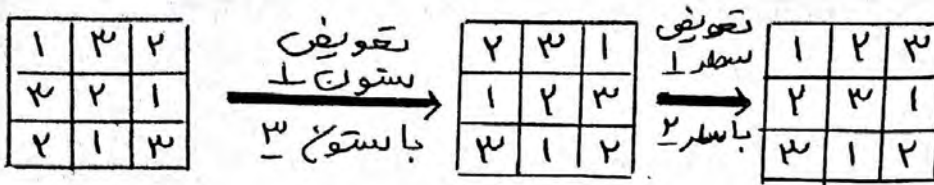
a	c	b
c	b	a
b	a	c

تذکره ۵: کل مربع های لاتین مرتبه ۳ دو نوع هستند

روی قطر اعداد مساویند

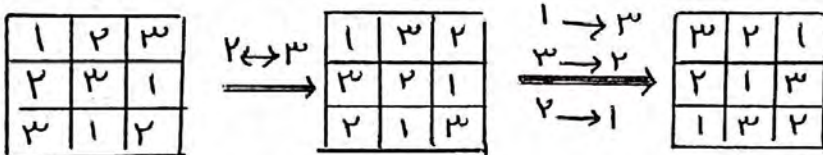
روی قطر اعداد غیر تکراری اند

روش جایابی سطر و ستون :
 با تعویض جای هر دو سطر یا هر دو ستون یک مربع لاتین می توان مربع



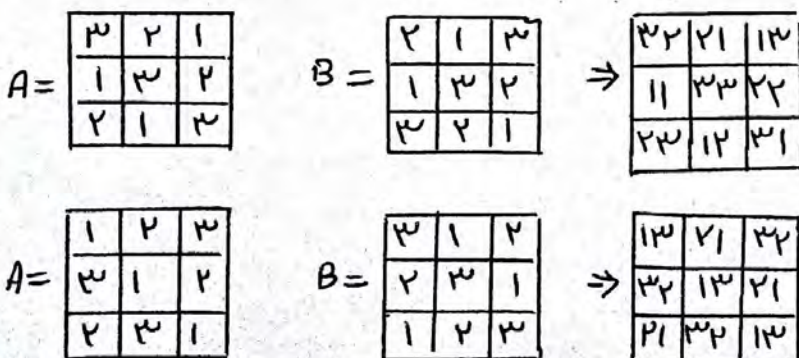
روش جایابیست :

می توانیم بدون تغییر جای سطرها و ستونها، جای خود عدد ها را با هم عوض کنیم مثلاً به جای تمام ۳ ها ۲ بنویسیم و برعکس یا همه ۱ ها را به ۲ و همه ۲ ها را به ۳ و همه ۳ ها را به ۱ تبدیل کنیم و ... می گوئیم جایابیست روی اعداد اعمال کرده ایم با این روش مربع لاتین جدیدی ساخته می شود.



دو مربع لاتین متعامد :

مفروض کنیم A و B دو مربع لاتین هم مرتبه باشند بطوریکه از کنار هم قرار دادن درایه های نظیر از این دو مربع، مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل شود که هر خانه آن حاوی یک عدد دورقمی است که تمام رقم های سمت چپ مربوط به مربع A و تمام رقم های سمت راست مربوط به مربع B (و یا برعکس) است اگر هیچ یک از اعداد دورقمی موجود در خانه های مربع جدید تکرار نشده باشند می گوئیم دو مربع لاتین A و B متعامدند.



تذکره :
 دو مربع لاتین ۲×۲ متعامد وجود ندارد
 متعامد نیست چون عدد تکراری دارد

(هماهنگت کشوری دیماه ۹۷) :
 دو مربع لاین متعامد از مرتبه ۳ بنویسید و متعامد بودن آنها را نشان دهید (۵، ۱۵ نمره)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 12 & 31 & 22 \\ 32 & 22 & 11 \\ 21 & 13 & 32 \end{bmatrix}$$

(نسبت خرداد ۹۹)

(هماهنگت کشوری شهریور ۹۸) :
 قرار است چهار مدرس T_1 ، T_2 و T_3 و T_4 در چهار جلسه متوالی در چهار کلاس C_1 ، C_2 و C_3 و C_4 به گونه ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند برای این منظور برنامه ریزی کنید (۱۵ نمره)

	۱	۲	۳	۴
C_1	T_1	T_2	T_3	T_4
C_2	T_4	T_1	T_2	T_3
C_3	T_3	T_4	T_1	T_2
C_4	T_2	T_3	T_4	T_1

این جدول یکی از
 پاسخ های ممکن است

(روش چرخشی)

(هماهنگت دیماه ۹۸) :
 بررسی کنید آیا دو مربع لاین 3×3 رو برو متعامدند؟ (۷، ۱۵ نمره)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 11 & 22 & 33 \\ 32 & 13 & 21 \\ 23 & 31 & 12 \end{bmatrix}$$

متعامدند زیرا در جدول ترکیب شده از دو مربع لاین، عدد تکراری نداریم

(هماهنگت خرداد ۹۸) :
 اگر سه دوست هم ساینه، سه کت و سه پیراهن داشته باشند و بخواهند در سه روز اول هفته از این لباسها به گونه ای استفاده کنند که هر فرد هر یک از کت ها و هر یک از پیراهن ها را دقیقاً یکبار استفاده کرده باشد و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً یکبار مورد استفاده قرار بگیرد، چگونه می توان این کار را انجام داد؟ (۵، ۱۵ نمره)

	دوشنبه	یکشنبه	شنبه
A	۱	۲	۳
B	۳	۱	۲
C	۲	۳	۱

مربع کت ها

	دوشنبه	یکشنبه	شنبه
A	۲	۱	۳
B	۱	۳	۲
C	۳	۲	۱

مربع پیراهن ها

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 12 & 21 & 33 \\ 31 & 13 & 22 \\ 23 & 32 & 11 \end{bmatrix}$$

دوشنبه یکشنبه شنبه

(هماهنگ کشوری خرداد ۹۹) :
 قرار است سه کارگر W_1 و W_2 و W_3 در سه روز متوالی با سه ماشین نخ رسی و با ۳ نوع الیاف کار کنند به گونه ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار رفته باشد برای این منظور برنامه ریزی کنید (انگزه)

حل : برای برنامه ریزی دو مربع لاتین متعامد در نظر می گیریم مربع A مربوط به ماشین ها و مربع B مشخص کننده الیاف است.

	W_1	W_2	W_3	
روز اول	۱	۳	۲	
روز دوم	۳	۲	۱	
روز سوم	۲	۱	۳	

 $= A$

	W_1	W_2	W_3	
روز اول	۲	۱	۳	
روز دوم	۳	۲	۱	
روز سوم	۱	۳	۲	

 $= B \Rightarrow$

	W_1	W_2	W_3	
روز اول	۱۲	۳۱	۲۳	
روز دوم	۳۳	۲۲	۱۱	
روز سوم	۲۱	۱۳	۳۲	

عدد سمت چپ هر درایه نشان دهنده ماشین و عدد سمت راست نشان دهنده نوع الیاف است

(هماهنگ کشوری خرداد ۹۹) :
 مربع لاتین مقابل را در نظر بگیرید و با اعمال یک جایگشت بر روی ۱، ۲ و ۳ و ۴

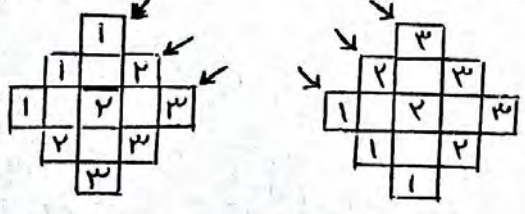
۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱
۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴

 $\begin{matrix} 4 \rightarrow 1 \\ 3 \rightarrow 2 \\ 2 \rightarrow 3 \\ 1 \rightarrow 4 \end{matrix}$

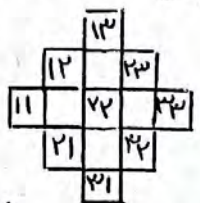
۳	۲	۱	۴
۱	۴	۳	۲
۴	۱	۲	۳
۲	۳	۴	۱

یک مربع لاتین جدید بدست آورید (انگزه)

یک روش برای ساختن دو مربع لاتین متعامد از مرتبه یک عدد فرد :
 به عنوان مثال نحوه ایجاد دو مربع لاتین متعامد 3×3 (مرتبه فرد است) را توضیح می دهیم :



دو شکل مانند روبرو ایجاد می کنیم



حالا دو شکل را با هم ترکیب می کنیم

همان طور که می بینید همه عددها با هم متفاوتند اعداد خارج مربع را به روش زیر داخل مربع می آوریم

۱۲	۳۱	۲۳
۳۳	۲۲	۱۱
۲۱	۱۳	۳۲

 \Rightarrow

۱	۳	۲
۳	۲	۱
۲	۱	۳

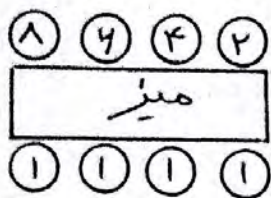
۲	۱	۳
۳	۲	۱
۱	۳	۲

مربع لاتین متعامد اول مربع لاتین متعامد دوم

- ۱) عدد بالای راسته تا می آوریم پایین
- ۲) عدد چپ راسته تا می بریم راست
- ۳) عدد پایینی راسته تا می بریم بالا
- ۴) عدد راستی راسته تا می بریم چپ

تقریبات ۴۸ فصل ۳ - درس ۱ با پاسخ تشریحی

۱) حی خواهم ۸ نفر را که دو برو برادر یکدیگرند در دو طرف طول یک میز مستطیل شکل بنشانیم اگر بخوایم هر نفر رو بروی برادرش بنشیند به چند طریق می توان این کار را انجام داد؟



حل: ۸ صندلی داریم صندلی اول به ۸ روش پر می شود رو به روی او برادرش است که به یک روش پر می شود و بجهت ترتیب ... :

$$8 \times 4 \times 4 \times 2 = 384$$

۲) (هما سنک دیماه ۹۷) : اگر داشته باشیم $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{1, 4, 7, 8, 9\}$ در این صورت چند کد یا رمز که رقمی می توان نوشت که هر یک شامل دو رقم متمایز از A و سه رقم متمایز از B باشد؟ (انگاره)

$$4! \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{3} = 720$$

۳) (هما سنک شهریور ۹۸) : ۴ کتاب فیزیک متفاوت و ۳ کتاب ریاضی متفاوت را می توانیم به چند طریق در قفسه ای و در یک ردیف بچینیم این عمل به چند روش امکان پذیر است؟ (انگاره)

الف) هیچ محدودیتی نباشد $8! =$ جواب

$$4! \times 3! =$$
 جواب

ب) همواره کتاب های فیزیک کنار هم باشند

$$4! \times 4! =$$
 جواب

د) هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند

ت) یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک خاص همواره کنار هم باشند:

$$3! \times 7! =$$
 جواب

۴) برای کنار هم قرار گرفتن ۴ دانش آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش آموز پایه یازدهم مسئله ای طرح کنید که پاسخ آن $4! \times 7!$ باشد.

جواب: حی خواهم ۴ دانش آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش آموز پایه یازدهم را در یک خط مستقیم مرتب کنیم بطوریکه همه دانش آموزان پایه ریاضی کنار هم باشند

۵) با ارقام ۴ و ۷ و ۷ و ۷ و ۷ چه تعداد کد ۴ رقمی می توان ساخت؟ $\frac{4!}{3! \times 1!} = 4$

۶) می‌خواهیم روی تعدادی جعبه حاوی اجناس تولید شده خاصی را گذاشتن و هر جعبه را با یک کد شامل ۹ حرف a, b, a, c, c و d, d, d از بقیه مجزا کنیم حداکثر چند جعبه را می‌توانیم با این کدها از بقیه مجزا کنیم؟

$$\frac{9!}{3! \times 2! \times 3!} = 204$$

۷) ۷ نفر به چند طریق می‌توانند در دو اتاق دو نفره و یک اتاق سه نفره قرار بگیرند؟

$$\frac{7!}{2! \times 2! \times 3!} = 210$$

۸) به چند طریق می‌توان از بیون له نوع گل ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد اگر بخواهیم:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$$

$$\text{الف) به دلخواه انتخاب کنیم} \\ \text{جواب} = \binom{11+5-1}{5-1} = \binom{15}{4}$$

ب) از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب کنیم $\binom{11-1}{5-1} = \binom{10}{4}$ جوابهای طبیعی

ج) از گل نوع دوم حداقل دو شاخه و از گل نوع پنجم بیش از سه شاخه انتخاب کنیم؟
(جواب: صفحه ۱۸ جزوه)

د) از گل نوع سوم انتخاب نکرده و از گل نوع چهارم حداقل ۴ شاخه انتخاب کنیم

$$x_3 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$$

$$x_4 \geq 4 \Rightarrow x_4 = y_4 + 4$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + 0 + y_4 + 4 + x_5 = 11$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + y_4 + x_5 = 7 \Rightarrow \binom{7+4-1}{4-1} = \binom{10}{3}$$

۹) مطلوب است تعداد جوابهای صحیح و نامنفی هر یک از معادلات زیر با شرطهای داده شده:

الف) $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 10$

$x_i \geq 0$ و $2 \leq i \leq 5$

$$x_2 > 0 \Rightarrow x_2 \geq 1 \Rightarrow x_2 = y_2 + 1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$$

$$x_3 > 0 \Rightarrow x_3 \geq 1 \Rightarrow x_3 = y_3 + 1$$

$$\Rightarrow x_1 + y_2 + 1 + y_3 + 1 + y_4 + 1 + y_5 + 1 = 10$$

$$x_4 > 0 \Rightarrow x_4 \geq 1 \Rightarrow x_4 = y_4 + 1$$

$$\Rightarrow x_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 1 + y_5 = 7$$

$$x_5 > 0 \Rightarrow x_5 \geq 1 \Rightarrow x_5 = y_5 + 1$$

$$\binom{7+5-1}{5-1} = \binom{11}{4}$$

ب) $x_1 + x_2 + \dots + x_d = 12$

$x_1 \geq 2$ و $x_d \geq 4$

$x_1 \geq 2 \Rightarrow x_1 = y_1 + 2$

$y_1 + 2 + x_2 + x_3 + x_4 + y_d + 4 + x_d = 12$

$x_d \geq 4 \Rightarrow x_d = y_d + 4$

$\Rightarrow y_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_d + x_d = 4$

$n=d, k=4 \Rightarrow \binom{d+4-1}{4-1} = \binom{10}{d}$

ج) $x_1 + x_2 + \dots + x_d = 11$

$x_i \geq 1$ و $1 \leq i \leq d$

(روش اول)

$x_1 \geq 1 \Rightarrow x_1 = y_1 + 1$

$y_1 + 1 + y_2 + 1 + y_3 + 1 + y_4 + 1 + y_d + 1 = 11$

$x_2 \geq 1 \Rightarrow x_2 = y_2 + 1$

$\Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_d = 4$

$n=4, k=d \Rightarrow \binom{4+d-1}{d-1} = \binom{10}{4}$

$\binom{11-1}{d-1} = \binom{10}{4}$ جوابهای طبیعی معادله مورد نظر است

د) $x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 7$

$x_i \geq 0$ و $1 \leq i \leq 4$

$3x_2 < 7 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

متغیر x_2 دارای ضرب است روی x_2 بحث می کنیم

$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 7 \xrightarrow{x_i \geq 0} \binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = 4d$

$x_2 = 1 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 4 \xrightarrow{x_i \geq 0} \binom{4+3-1}{3-1} = \binom{6}{2} = 1d$

$x_2 = 2 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 1 \xrightarrow{x_i \geq 0} \binom{1+3-1}{3-1} = \binom{3}{2} = 3$

پس جوابها $4d + 1d + 3 = 43$ است

ه) $x_1 + \sqrt{x_2} + x_3 + x_4 = 3$

$x_i \geq 0$ و $1 \leq i \leq 4$

متغیر x_2 دارای رادیکال است روی x_2 بحث می کنیم

$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 3 \xrightarrow{x_i \geq 0} \binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10$

$x_2 = 1 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 2 \xrightarrow{x_i \geq 0} \binom{2+3-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 4$

$x_2 = 4 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 1 \xrightarrow{x_i \geq 0} \binom{1+3-1}{3-1} = \binom{3}{2} = 3$

۱۰
+ ۴
+ ۳
۱۷

۱۰) به چند طریق می توان ۱۰ توپ یکسان را بین ۳ نفر و به دلخواه توزیع کرد؟

$x_1 =$ تعداد توپهای نفر اول

$x_2 =$ تعداد توپهای نفر دوم

$x_3 =$ تعداد توپهای نفر سوم

$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 10 \Rightarrow \binom{10+3-1}{3-1} = \binom{12}{2} = 66$

۱۱) به چند طریق می توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد هر کس ۵ بخوانیم هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟

$\binom{8-1}{4-1} = \binom{7}{3} = 35$

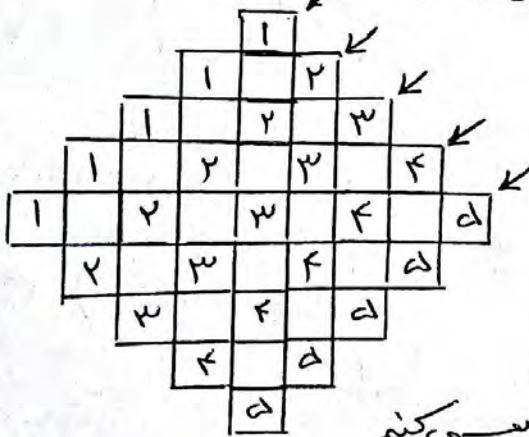
حله: تعداد جوابهای طبیعی مورد نظر است

۱۲) به سوالات زیر جواب دهید:

الف) آیا می توان گفت با تعویض جای سطرهاى یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینى متعامد با مربع لاتین اول برست می آید؟ خیر

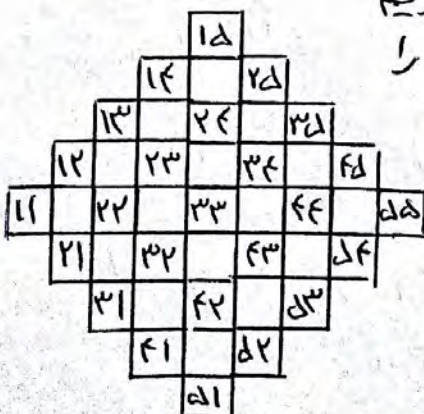
ب) آیا می توان گفت با تعویض جای سطرهاى یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینى غیر متعامد با مربع لاتین اول برست می آید؟ خیر

۱۳) دو مربع لاتین متعامد از مرتبه $n \times n$ بنویسید



دو شکل را با هم ترکیب می کنیم

عددهای بالایی را که تا پایین و عددهای پایینی را که تا بالا می بریم
عددهای سمت چپ را که تا به راست و عددهای سمت راست را
که تا یک چپ می بریم:



\Rightarrow

13	14	15	11	12
14	15	11	12	13
15	11	12	13	14
11	12	13	14	15
12	13	14	15	11

\Rightarrow

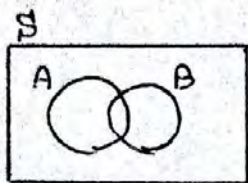
1	4	2	5	3
4	2	5	3	1
2	5	3	1	4
5	3	1	4	2
3	1	4	2	5

3	1	4	2	5
5	3	1	4	2
2	5	3	1	4
4	2	5	3	1
1	4	2	5	3

اصل شمول (شامل بودن) و عدم شمول:

الف) برای دو مجموعه:

تعداد عضوهایی که به مجموعه A یا به مجموعه B تعلق دارند برابر است با:



$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

واضح است که تعداد عضوهایی که به هیچ یک از مجموعه‌های A و B تعلق ندارد برابر است با:

$$|\overline{A \cup B}| = |\bar{A} \cap \bar{B}| = |(A \cup B)'| = |S| - |A \cup B|$$

تذکر مهم:

تعداد اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی n که بر k بخش پذیرند برابر است با: $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ = خارج قسمت = تقسیم n بر k

مثال: چند عضو از مجموعه $S = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 400\}$ نه بر ۲ و نه بر ۳ بخش پذیرند؟

$$S = \{1, 2, 3, \dots, 400\} \Rightarrow |S| = 400$$

$$\text{بر ۲ بخش پذیر} = A \Rightarrow |A| = \lfloor \frac{400}{2} \rfloor = 200$$

$$\text{بر ۳ بخش پذیر} = B \Rightarrow |B| = \lfloor \frac{400}{3} \rfloor = 133$$

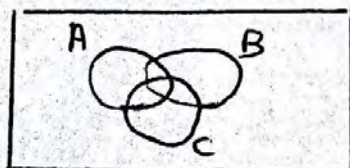
$$\text{بر ۲ و ۳ بخش پذیر} = A \cap B \Rightarrow |A \cap B| = \lfloor \frac{400}{2 \times 3} \rfloor = \lfloor \frac{400}{6} \rfloor = 66$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 200 + 133 - 66 = 267$$

$$|(A \cup B)'| = |S| - |A \cup B| = 400 - 267 = 133$$

ب) برای سه مجموعه:

تعداد عضوهایی که حداقل به یکی از سه مجموعه A یا B یا C تعلق دارد برابر است با:



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

واضح است که $\lfloor \frac{|S| - |A \cup B \cup C|}{k} \rfloor$

مثال ۱: چند عدد طبیعی مانند n ، بطوریکه $۱ < n < ۴۰۰$ وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۳ و ۴ و ۵ بخش پذیر نباشند؟

$$S = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 < n < 400\} \Rightarrow |S| = 400$$

$$\text{بر ۳ بخش پذیر} = A \Rightarrow |A| = \left[\frac{400}{3} \right] = 133$$

$$\text{بر ۴ بخش پذیر} = B \Rightarrow |B| = \left[\frac{400}{4} \right] = 100$$

$$\text{بر ۵ بخش پذیر} = C \Rightarrow |C| = \left[\frac{400}{5} \right] = 80$$

$$\text{بر ۳ و ۴ بخش پذیر} = A \cap B \Rightarrow |A \cap B| = \left[\frac{400}{[3,4]} \right] = \left[\frac{400}{12} \right] = 33$$

$$\text{بر ۳ و ۵ بخش پذیر} = A \cap C \Rightarrow |A \cap C| = \left[\frac{400}{[3,5]} \right] = \left[\frac{400}{15} \right] = 26$$

$$\text{بر ۴ و ۵ بخش پذیر} = B \cap C \Rightarrow |B \cap C| = \left[\frac{400}{[4,5]} \right] = \left[\frac{400}{20} \right] = 20$$

$$\text{بر ۳ و ۴ و ۵ بخش پذیر} = A \cap B \cap C \Rightarrow |A \cap B \cap C| = \left[\frac{400}{[3,4,5]} \right] = \left[\frac{400}{60} \right] = 6$$

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= 133 + 100 + 80 - 33 - 26 - 20 + 6 = 240 \end{aligned}$$

$$|(A \cup B \cup C)^c| = |\overline{A \cap B \cap C}| = |\overline{A \cup B \cup C}| = |S| - |A \cup B \cup C| = 400 - 240 = 160$$

مثال ۲: چند عدد طبیعی مانند n بطوریکه $۱ < n < ۳۵۰$ وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۴، ۵ و ۶ بخش پذیر نباشند؟

$$|S| = 350 \text{ و } [4,5] = 20, [4,6] = 12, [5,6] = 30, [4,5,6] = 60$$

$$|A| = \left[\frac{350}{4} \right] = 87 \quad |B| = \left[\frac{350}{5} \right] = 70 \quad |C| = \left[\frac{350}{6} \right] = 58$$

$$|A \cap B| = \left[\frac{350}{20} \right] = 17 \quad |A \cap C| = \left[\frac{350}{12} \right] = 29 \quad |B \cap C| = \left[\frac{350}{30} \right] = 11$$

$$|A \cap B \cap C| = \left[\frac{350}{60} \right] = 5 \quad |A \cup B \cup C| = 143$$

$$|\overline{A \cup B \cup C}| = 350 - 143 = 207$$

مثال) اگر یک قفل رمزدار شامل ۴ رقم از صفر تا ۹ باشد و بدانیم رمز بسته شده روی قفل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۸ را شامل می شود و امتحان کردن هر رمز ۴ رقمی که ثانیه طول بکشد حداکثر چه زمانی لازم است تا این قفل باز شود؟

$$A = \{ \overline{abcd} \mid a, b, c, d \neq 7 \} \Rightarrow |A| = 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 9^4$$

$$B = \{ \overline{abcd} \mid a, b, c, d \neq 8 \} \Rightarrow |B| = 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 9^4$$

$$A \cap B = \{ \overline{abcd} \mid a, b, c, d \neq 7, 8 \} \Rightarrow |A \cap B| = 8 \times 8 \times 8 \times 8 = 8^4$$

$$|S| = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4 = \text{تعداد کل ۴ رقمی ها}$$

$\bar{A} \cap \bar{B}$ مجموعه اعداد ۴ رقمی که در آنها هم رقم ۷ و هم رقم ۸ بکار رفته

$$|\bar{A} \cap \bar{B}| = |\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B| = 10^4 - (9^4 + 9^4 - 8^4) = 974$$

$$974 \times 4 = 4870 = \text{زمان لازم بر حسب ثانیه}$$

تابع شماری:

نکته ۱: اگر A و B دو مجموعه باشند تعداد توابع از A به B برابر

$$|B|^{|A|} = \text{تعداد توابع از } A \text{ به } B \text{ است با:}$$

مثال) چند تابع از مجموعه $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ به مجموعه $B = \{b_1, b_2\}$ می توان نوشت؟

$$|A| = 3 \text{ و } |B| = 2 \text{ تا } |B|^{|A|} = 2^3 = 8 = \text{جواب}$$

نکته ۲: اگر $|A| = m$ و $|B| = k$ باشد $m < k$ تعداد توابع یک به یک از مجموعه A به مجموعه B برابر است با:

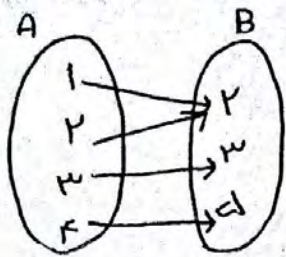
$$(k)_m = \frac{k!}{(k-m)!}$$

مثال) به چند طریق می توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آنکه هیچ کس بیشتر از یک خودکار نداشته باشد؟ (به هر نفر حداکثر یک خودکار برسد)

تعداد حالت های ممکن $= \frac{8!}{4!} = 1410$ که معادل است با پیدا کردن تعداد

تابع های یک به یک از مجموعه A به مجموعه B که ۴ عضو A به مجموعه B عضو

نکته ۳: تابع f از مجموعه A به مجموعه B را پوشای نامند هرگاه بر هر تابع f شامل کل اعضای B باشد به عبارت دیگر به هر عضو B یک بیگانه رسم شود و آنرا بصورت زیر نشان می دهند.



$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \quad B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$$

$$f: A \rightarrow B \quad R_f = B$$

پوشا است

برای پیدا کردن تعداد توابع های پوشا از مجموعه A عضو n عضو A به مجموعه B عضو m استفاده می کنیم که همان اصل شمول و عدم شمول است:

$$A_j = \{f: A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$

$$|S| = |B|^{|A|} = m^n \quad |A_1| = |A_2| = \dots = |A_m| = m^{n-1}$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = \dots = |A_2 \cap A_3| = \dots = 1 \quad |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_m| = 0$$

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_m}| = \overline{|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m|} = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m|$$

مثال ۱: (صافیت کشور - دیماه ۹۸):

با استفاده از اصل شمول و عدم شمول، تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی را بدست آورید (۱، ۷۵ غره)

$$A_j = \{f: A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_j, 1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq 3\}$$

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\} \quad B = \{b_1, b_2, b_3\} \Rightarrow |A| = 4, |B| = 3$$

$$|S| = 3^4 = 81 \quad |A_i| = 2^4 = 16 \quad |A_i \cap A_j| = 1, |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

$$\begin{aligned} |\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| &= |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 81 - (16 + 16 + 16 - 1 - 1 - 1 + 0) \\ &= 81 - (3 \times 16 - 3 \times 1 + 0) = 34 \quad \square \end{aligned}$$

(هماهنگی کسوری - دیماه ۹۷)

به چند طریق می توان ۴ خودکار متفاوت را بین سه نفر توزیع کرد
به شرط آنکه به هر نفر حداقل ۱ خودکار داده شود؟ (۲ نمره)

حل: جواب همان تعداد تابع های پوشا از مجموعه ۴ عضوی به یک
مجموعه ۳ عضوی است که در ص ۱۰۰ مثال ۱ حل شد.



نکته کنکوری:

تعداد تابع های پوشا از مجموعه m عضوی A به مجموعه n عضوی B

$$|A| = m$$

$$R_p = B$$

B از فرمول زیر بیست می آید:

$$|B| = n$$

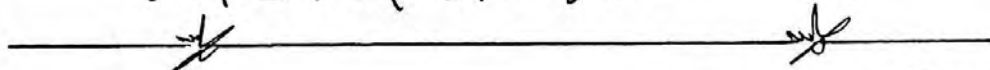
$$f: A \rightarrow B$$

$$\boxed{\text{جواب} = n^m - (n \times 2^{m-1} - n)}$$

مثال) تعداد تابع های پوشا از مجموعه ۴ عضوی A به مجموعه ۳ عضوی B چندتا است؟

$$m = 4$$

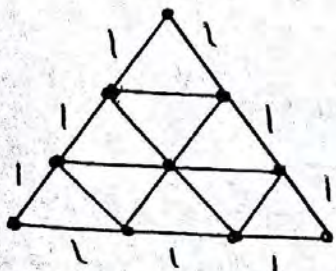
$$\text{جواب} = 3^4 - (3 \times 2^4 - 3) = 34$$



اصل لانه کبوتری:

اگر m کبوتر و n لانه داشته باشیم و $m > n$ و همه کبوترها درون لانه
قرار بگیرند در این صورت لانه ای وجود دارد که حداقل ۲ کبوتر در آن
قرار گرفته است.

مثال ۱: یک مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع ۳ واحد را تقسیم بندی
کرده ایم نشان دهید اگر ۱۰ نقطه دلخواه از داخل این مثلث اختیار
کنیم حداقل ۲ نقطه بین این نقاط وجود خواهد داشت به مسی که
فاصله آنها از یکدیگر کمتر از ۱ باشد.



حل: اگر تعداد نقطه ها را کبوتر و تعداد مثلث های

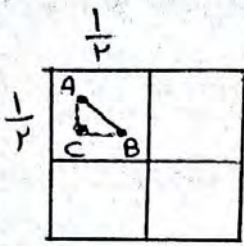
کوچک را لانه در نظر بگیریم $n=4$ و $m=10$ و $m > n$

و با توجه به اینکه طول ضلع هر مثلث کوچک ۱

واحد است طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۲ نقطه

داخل یک مثلث قرار می گیرد که فاصله آن دو نقطه کمتر از ۱ واحد است

مثال ۲: که نقطه درون مربعی به ضلع $\frac{1}{p}$ انتخاب شده است، ثابت کنید فاصله حداقل دو نقطه کمتر از $\frac{\sqrt{2}}{p}$ است.



حل: که نقطه را کبوتر و $\frac{1}{p}$ مربع کوچک را لانه در نظر می‌گیریم طبق اصل لانه کبوتری درون یکی از مربع‌های کوچک دو نقطه قرار می‌گیرد

طبق رابطه فیثاغورس داریم:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$AC < \frac{1}{p} \text{ و } BC < \frac{1}{p} \Rightarrow AB^2 < \left(\frac{1}{p}\right)^2 + \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{2}{p^2} = \frac{1}{p} \Rightarrow AB < \sqrt{\frac{1}{p}} = \frac{\sqrt{2}}{p}$$

مثال ۳: در کلاس ۴ نفره، حداقل چند نفر ماه تولدشان یکسان است؟

حل: ۴ نفر را کبوتر و ۱۲ ماه سال را لانه در نظر می‌گیریم

$$\begin{array}{r} 12 \\ 4 \overline{) 48} \\ \underline{34} \\ 14 \end{array}$$

باقیمانده صفر نشود پس حداقل $3+1$ یعنی ۴ نفر

می‌تواند یا ضت (آلر باقیمانده صفر نشود یک واحد به خارج منتسب اضافه می‌کنیم)

تعمیم اصل لانه کبوتری:

هرگاه $(kn+1)$ کبوتر یا بیشتر در n لانه قرار بگیرند در اینصورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل $(k+1)$ کبوتر در آن قرار گرفته است.

مثال ۱: در یک اردوی دانش‌آموزی حداقل چند دانش‌آموز وجود داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که حداقل ۷ نفر از آنها ماه تولد یکسانی دارند؟

$$k+1=7 \Rightarrow k=4$$

$$n = \text{تعداد ماه‌ها} = \text{تعداد لانه‌ها}$$

$$\text{تعداد کبوترها} = \text{تعداد دانش‌آموزان} = kn+1 = 4 \times 12 + 1 = 49$$

مثال ۲: در یک دبیرستان حداقل چند دانش‌آموز وجود داشته باشند تا مطمئن باشیم حداقل ۷ نفر از آنها ماه و روز هفته تولدشان یکی است؟

$$\begin{array}{l} 7 \times 12 = 84 \\ 7 \times 7 = 49 \end{array} \Rightarrow n = 12 \times 7 = 84 \quad k+1=7 \Rightarrow k=6 \quad kn+1 = 6 \times 84 + 1 = 505$$

هر سال = ۵۰۶
هر هفته = ۷ روز

تقریبات ۴۸ فصل ۳ درس ۲ با پاسخ تشریحی

۱) که ساخته کل را حداکثر در چند لگدان قرار بدهیم تا اطمینان داشته باشیم لگدانی هست که در آن حداقل ۵ ساخته کل قرار گرفته است؟

$$k+1 = 5 \Rightarrow k = 4 \quad kn+1 = 5^k \Rightarrow 4n+1 = 5^4 \Rightarrow n = \left\lceil \frac{5^4}{4} \right\rceil = 13$$

پس n باید حداکثر ۱۳ باشد

۲) (صاحبت شهر نور ۹۸): چند عدد طبیعی مانند n بطوریکه $1 < n < 350$ وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۴ و ۶ بخش پذیر نباشد. (۵ را نمره)

$$|\bar{A} \cap \bar{B}| = |\overline{A \cup B}| = |S| - (|A| + |B| - |A \cap B|) = 350 - \left(\left\lceil \frac{350}{4} \right\rceil + \left\lceil \frac{350}{6} \right\rceil - \left\lceil \frac{350}{12} \right\rceil \right) = 234$$

۳) (صاحبت خرداد ۹۸): در بین اعداد ۱ تا ۹۰ ($1 < n < 90$) چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش پذیر باشند (۲۵، ۱ نمره)

$$|A| = \left\lceil \frac{90}{2} \right\rceil = 45$$

$$|B| = \left\lceil \frac{90}{3} \right\rceil = 30$$

$$|A \cap B| = \left\lceil \frac{90}{6} \right\rceil = 15$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 45 + 30 - 15 = 60$$

۴) در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ ($1 < n < 200$) چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش پذیر باشند ولی بر ۷ بخش پذیر نباشند؟

$$|A| = \left\lceil \frac{200}{4} \right\rceil = 50$$

$$|A \cap B| = \left\lceil \frac{200}{28} \right\rceil = 7$$

$$|A - B| = |A| - |A \cap B| = 50 - 7 = 43$$

۵) (صاحبت - خرداد ۹۹): در تب اردوی دانش آموزی حداقل چند دانش آموز حضور داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که لااقل ۷ نفر از آنها ماه تولد یکسانی دارند؟ (۱ نمره)

$$k+1 = 7 \Rightarrow k = 6$$

$$kn+1 = 7 \times 12 + 1 = 73$$

$$n = 12$$

(۶) (هماهنگ - خرداد ۹۸) : ثابت کنید اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش آموز مشغول به تحصیل باشند لااقل ۷ نفر از آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است (۱۵، ۱۶، ۱۷)

۱۲ ماه = هر سال
 ۷ روز = هر هفته

$$\left. \begin{array}{l} 12 \times 7 = 84 \\ 505 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{تعداد لانه‌ها} = 7 \times 12 = 84$$

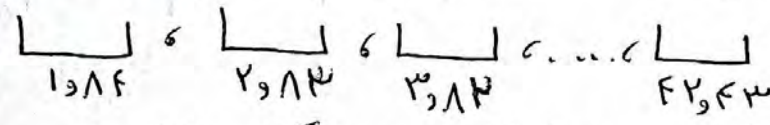
$$\begin{array}{r} 505 \\ - 84 \\ \hline 421 \end{array}$$

$4+1=7$

طبق اصل لانه کبوتری لااقل ۷ نفر از آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است

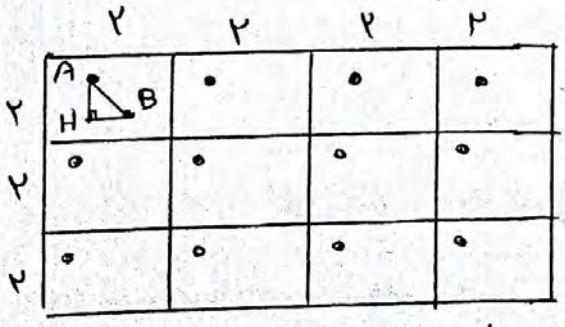
(۷) (هماهنگ - دیماه ۹۸) : مجموعه اعداد $1, 2, 3, \dots, 84$ را A در نظر بگیرید. نشان دهید هر زیرمجموعه ۴۳ عضوی از A دارای ۲ عضو است که مجموعشان برابر ۸۵ است (۱۵، ۱۶، ۱۷)

تعداد لانه‌ها = ۴۲
 تعداد کبوترها = ۴۳



چنانچه قرار باشد کبوترها لانه‌ها را اشغال کنند آنگاه طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو عدد وجود دارد که در یک لانه جای می‌گیرند و مجموعشان ۸۵ است.

(۸) (هماهنگ - شهریور ۹۸) : ۱۳ نقطه درون یک مستطیل 4×8 قرار دارند. نشان دهید حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارند که فاصله آنها از هم، کمتر از $\sqrt{8}$ باشد (۱۵، ۱۶، ۱۷)



۱۲ مربع = تعداد لانه‌ها
 ۱۳ نقطه = تعداد کبوترها

طبق اصل لانه کبوتری دو نقطه مانند A و B در یک لانه جای می‌گیرند پس:

$$AH < 2 \quad BH < 2 \Rightarrow AH^2 + BH^2 < 8 \Rightarrow AB^2 < 8 \Rightarrow AB < \sqrt{8}$$

(۹) (هماهنگ - دیماه ۹۷) : حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشا می‌باشند که سابقه کشی باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲۰ نفر از آنها روز تولدشان یکسان است؟ (۱۵، ۱۶، ۱۷)

$n = 345$
 $k+1 = 20 \Rightarrow k = 19$
 $k(n+1) = 19 \times 345 + 1 = 6556$