فصل ۲: گراف و مدل سازی

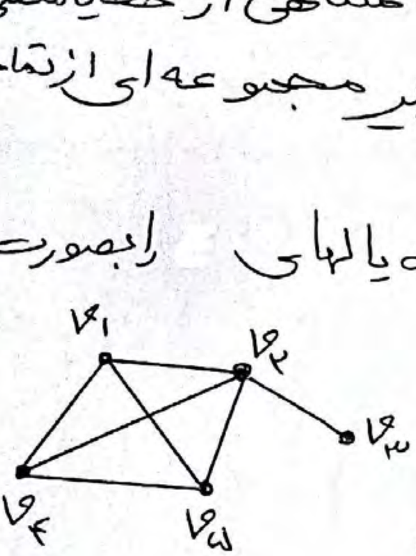
تعریف گراف:

گراف از تعدادی نقطه که به آنها رأس و تعدادی خط یا منحنی که به آنها یال می گوئیم تشکیل شده است.

گراف ساده:

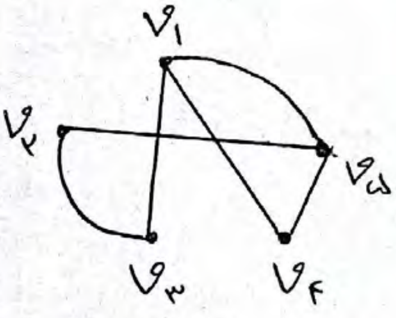
گراف ساده تشکیل شده از یک مجموعهٔ متناهی و غیرتهی از نقاط مانند V (مجموعه رئوس) و یک مجموعه متناهی از خط یا منحنی مانند E (مجموعه یالها) که مجموعه E زیرمجموعه‌ای از تمام زیرمجموعه‌های دوعضوی V است.

گراف G با مجموعهٔ رئوس و مجموعه یالهای را بصورت $G(V, E)$ نشان می دهند.



$V(G)=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ (رأس ها)

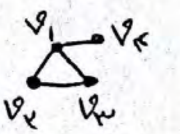
$E(G)=\{v_1v_2, v_1v_4, v_1v_5, v_2v_3, v_2v_4, v_2v_5, v_4v_5\}$ (یالها)



$V(G)=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

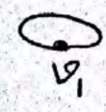
$E(G)=\{v_2v_3, v_1v_3, v_1v_4, v_1v_5, v_3v_2, v_2v_5, v_4v_5\}$

تذکر مهم:



۱) در گراف ساده بین هردو رأس حداکثر یک یال وجود دارد.

۲) یال v_1v_2 با یال v_2v_1 فرقی ندارد و یکی هستند



۳) یال بین یک رأس و همان راس را طوقه یا حلقه می نامند
گراف ساده طوقه ندارد.

۴) ممکن است بین دو راس چند تا یال باشد
که آنرا یال چندگانه می نامند.

v_1v_2 = یال چندگانه

گراف ساده یال چندگانه ندارد

۵) یالی که روی آن جهت باشد یال جهت دار نامیده می‌شود

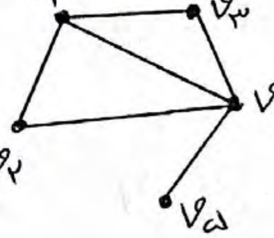
$v_1v_2 = (v_1, v_2)$

گراف ساده یال جهت دار ندارد.

نتیجه: گراف ساده، گرافی است که بین هر دو رأس آن حداکثر یک یال وجود داشته و یال طوقه، یال چندگانه و یال جهت دار ندارد.

تعریف مرتبه و اندازه گراف:

به تعداد راس های گراف G، مرتبه گراف گفته می‌شود که آنرا با $P(G)$ یا ساده تر با P نشان می‌دهیم همچنین به تعداد یالهای گراف G، اندازه گراف گفته می‌شود که آنرا با $q(G)$ یا ساده‌تر با q نشان می‌دهیم.



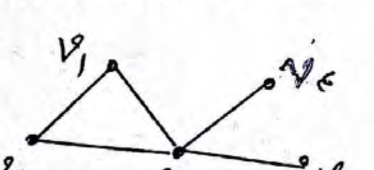
مرتبه = تعداد راس‌ها = $P(G) = P = 5$

اندازه = تعداد یالها = $q(G) = q = 6$

درجه یک رأس:

درجه رأس v در گراف G برابر است با تعداد یال‌هایی از گراف G که به رأس v متصل اند و آنرا با $d(v)$ یا $deg(v)$ نمایش می‌دهیم.

اگر درجه یک راس فرد باشد آن را رأس فرد و اگر درجه یک راس زوج باشد آنرا رأس زوج می‌نامند.

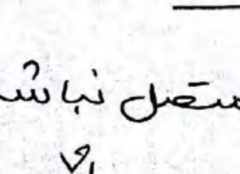


$d(v_1) = 2$ $\quad d(v_2) = 2$

$d(v_3) = 4$ $\quad d(v_4) = 1$ $\quad d(v_5) = 1$

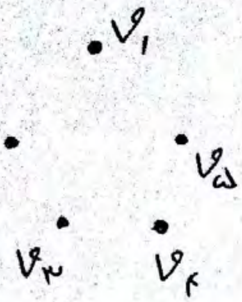
رأس تنها (ایزوله):

به رأسی که درجه آن صفر باشد یعنی هیچ یالی به آن متصل نباشد رأس تنها (ایزوله) می‌گوییم.



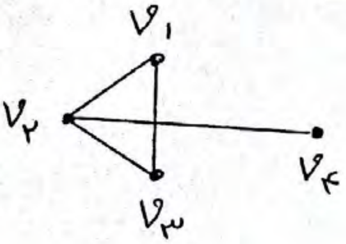
رأس تنها (ایزوله) = v_4

گراف تهی:



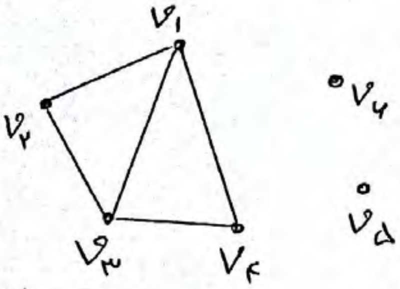
گرافی را که تمام رئوس آن رأس تنها باشند یعنی هیچ یالی نداشته باشد، گراف تهی می نامیم.

بنابراین منظور از گراف تهیِ n رأسی، گرافی شامل n رأسِ تنها و بدون یال است.



مثال ۱: نمودار گراف $G(V,E)$ با $V=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ و $E=\{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_2v_4\}$ را رسم کنید.

مثال ۲: در گراف مقابل، مجموعه راس ها، مجموعه یال ها، مرتبه، اندازه و درجه راس ها را مشخص کنید.



$$V(G)=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} \Rightarrow P=6$$

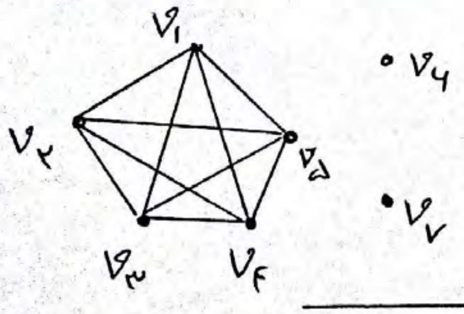
$$E(G)=\{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_3v_4\} \Rightarrow q=5$$

$\deg(v_1)=3$ فرد ، $\deg(v_2)=2$ زوج ، $\deg(v_3)=3$ فرد

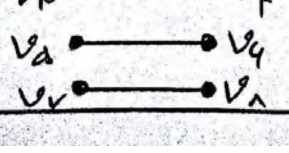
$\deg(v_4)=2$ زوج ، $\deg(v_5)=0$ ایزوله ، $\deg(v_6)=0$ ایزوله

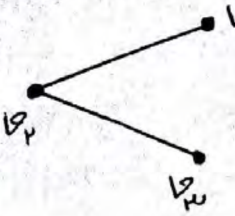
مثال ۳: گرافی از مرتبه ۷ و اندازه ۱۰ رسم کنید که دو رأس ایزوله داشته باشد.

$P=7$ ، $q=10$



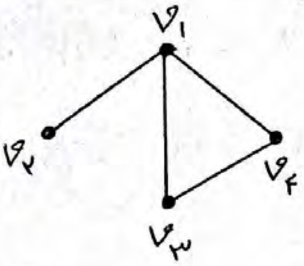
مثال ۴: گرافی از مرتبه ۸ با حداقل یال چنان رسم کنید که رأس تنها نداشته باشد.





تعریف دو رأس مجاور (همسایه):

دو رأسی که توسط یال به هم وصل شده باشند را، دو رأس مجاور (همسایه) می‌گویند. در شکل مقابل رأس‌های v_1 و v_2 مجاورند یا v_2 و v_3 مجاورند ولی v_1 و v_3 مجاور (همسایه) نیستند.

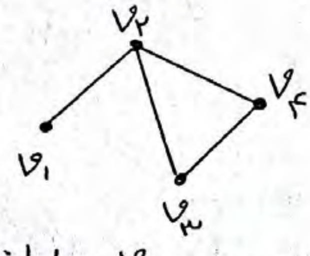


مجموعه همسایه‌های یک رأس:

مجموعه همه رأس‌هایی در گراف G که با رأس v مجاورند را مجموعه همسایه‌های رأس v می‌نامند، اگر مجموعه همسایه‌ها شامل v باشد آنرا با علامت $N_G[v]$ و اگر شامل v نباشد را با علامت $N_G(v)$ نشان می‌دهند. در گراف فوق:

$N_G[v_1]=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ $\qquad$ $N_G(v_1)=\{v_2, v_3, v_4\}$

$N_G(v_2)=\{v_1\}$ و $N_G(v_3)=\{v_1, v_4\}$ و $N_G[v_4]=\{v_1, v_3, v_4\}$



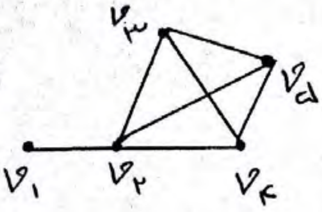
دو یال مجاور:

دو یال را مجاور می‌گوئیم، هرگاه رأسی وجود داشته باشد که هر دو یال به آن وصل باشند. در گراف مقابل یالهای v_1v_2 و v_2v_3 مجاورند (هر دو به v_2 وصل اند) ولی یالهای v_1v_2 و v_3v_4 مجاور نیستند.

بزرگترین و کوچکترین درجه گراف:

بزرگترین درجه در بین درجه رأس‌های یک گراف را ماکزیمم درجه گفته و آنرا با نماد $\Delta(G)$ یا ساده‌تر Δ (دلتای بزرگ) نمایش می‌دهیم و کوچکترین درجه در بین درجه رأس‌های یک گراف را

مینیمم درجه گفته و آن را با نماد $\delta(G)$ یا δ (دلتای کوچک) نمایش می‌دهیم.



$$deg(v_1)=1$$
$$deg(v_2)=4$$
$$deg(v_3)=deg(v_4)=deg(v_5)=3$$

پس: $\Delta=4$ و $\delta=1$

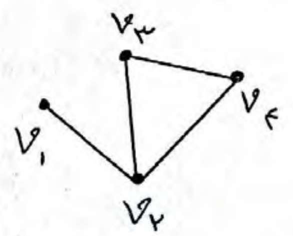
ممکن است یک گراف چند رأس از درجه ماکزیمم یا مینیمم داشته باشد

تذکر مهم:

۱) در هر گراف، رأسی که به همه رأس‌های دیگر وصل باشد را، رأس فول می‌گوئیم پس:

$$\boxed{deg(\text{رأس فول})=P-1}$$

(P = مرتبه گراف = تعداد رأس‌ها)



$P=4$

$$\text{رأس فول}=v_2 \Rightarrow deg(v_2)=3=4-1=P-1$$

۲) چون بیشترین درجه رأس در یک گراف P رأسی وقتی بدست می‌آید که آن رأس به همه $(P-1)$ رأس دیگر وصل شود پس:

$$\boxed{\Delta \leq P-1}$$

مثلاً اگر گراف از مرتبه ۵ (۵ رأسی) باشد در اینصورت: $\Delta \leq 4$

۳) اگر در یک گراف از مرتبه P (P رأسی)، K رأس فول (از درجه $P-1$) داشته باشیم در اینصورت:

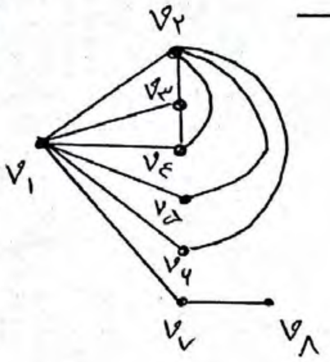
$$\boxed{\delta \geq K}$$

مثال ۱: نشان دهید گرافی وجود ندارد که درجه‌های آن ۲ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ باشد.

حل: $P=5$ پس باید $\Delta \leq 4$ درصورتی که ماکزیمم درجه ۵ است پس چنین گرافی وجود ندارد

مثال ۲: نشان دهید گرافی با درجه‌های ۲و۳و۴و۵و۶و۶و۶ وجود ندارد.

حل: $p=7$ است پس سه راس فول یعنی از درجه $p-1=6$ داریم درنتیجه $k=3$ است و باید $\delta \geq 3$ باشد درحالی که $\delta=2$ است پس چنین گرافی وجود ندارد.



مثال ۳: گرافی رسم کنید که درجه رأس‌ها بصورت ۱و۲و۲و۲و۳و۳و۵و۶ باشد.

$$deg(v_1)=6 \qquad deg(v_2)=5$$

$$deg(v_3)=deg(v_4)=3$$

$$deg(v_5)=deg(v_6)=deg(v_7)=2 \qquad deg(v_8)=1$$

ارتباط درجه‌ها با تعداد یالها درگراف:

قضیه: اگر G یک گراف با مرتبه p و اندازه q و $V=\{v_1,v_2,\dots,v_p\}$ مجموعه رئوس آن باشد درانیصورت مجموعه درجات رئوس با دوبرابر تعداد یالها برابر است یعنی:

$$\sum_{i=1}^{p} deg\, v_i = deg\, v_1 + deg\, v_2 + \dots + deg\, v_p = 2q$$

p = تعداد راس ها
q = تعداد یالها

اثبات: گراف G با مجموعه رأس‌های $V=\{v_1,v_2,\dots,v_p\}$ را درنظر می‌گیریم. یکی یکی یالهای گراف را اضافه می‌کنیم. با اضافه کردن یال اول دوراس درجه یک بدست می‌آید (درجه‌بقیه فعلاً صفر است) پس مجموع درجه‌ها برابر ۲ است. یال دیگری اضافه می‌کنیم مجموع درجه‌ها برابر ۴ می‌شود با اضافه کردن هر یال، به مجموع درجه‌ها، دو واحد اضافه می‌شود پس مجموع درجه‌ها دو برابر تعداد یالها می‌شود.

(هماهنگ - دیماه ۹۷):

ثابت کنید تعداد رأس های فرد هر گراف، عددی زوج است (۱ نمره)

اثبات: فرض کنیم G یک گراف و A مجموعه همه رئوس فرد گراف G و B مجموعه همه رئوس زوج گراف G باشد در اینصورت:

$$\sum_{v\in V(G)} deg(v) = \sum_{v\in A} deg(v) + \sum_{v\in B} deg(v)$$

از طرفی می دانیم که مجموع درجات رئوس گراف G عددی زوج است یعنی $\sum_{v\in V(G)} deg(v)$ نیز زوج است از طرفی $\sum_{v\in B} deg(v)$ زوج است بنابراین تفاضل آنها نیز زوج است بنابراین $\sum_{v\in A} deg(v)$ زوج است و نتیجه می شود که $n(A)$ عددی زوج است.

مثال۱) در یک گراف از مرتبه ۱۰ و اندازه ۳۳، $\Delta = 7$ و $\delta = 6$ است تعداد رأس های درجه ۶ و ۷ را بدست آورید.

$P = 10$ ، $q = 33$

$\left.\begin{matrix}\Delta = 7\\ \delta = 6\end{matrix}\right\} \Rightarrow$ گراف فقط رأس هایی از درجه ۶ و ۷ دارد

تعداد راس ها از درجه ۶ $= x \Rightarrow$ جمع راس های درجه ۶ $= 6x$

تعداد راس ها از درجه ۷ $= y \Rightarrow$ جمع راس های درجه ۷ $= 7y$

$$\begin{cases} x + y = P = 10 \\ 6x + 7y = 2q = 2(33) = 66 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 10 \\ 6x + 7y = 66 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 4 \\ y = 6 \end{matrix}$$

پس گراف ۴ رأس درجه ۶ و ۶ رأس از درجه ۷ دارد.

مثال ۲) گراف از مرتبه ۸ و اندازه ۱۴، دو راس از درجه ۵ $=\Delta$، یک راس از درجه ۲ و یک راس از درجه ۱ $=\delta$ دارد این گراف چند راس درجه ۳ دارد؟

$P = 8$ و $q = 14$ درجه ها: $1, 2, \underbrace{3, \ldots, 3}_{y\ \text{تا}}, \underbrace{4, \ldots, 4}_{x\ \text{تا}}, 5, 5$

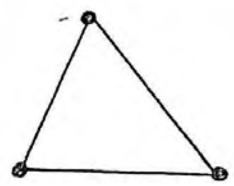
$$\text{تعداد راس ها} = 2 + x + y + 1 + 1 = p = 8 \Rightarrow x + y = 4$$
$$\text{مجموع درجه‌ها} = 5 + 5 + 4x + 3y + 2 + 1 = 2q = 2(14) = 28$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ 4x + 3y = 15 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=3},\ \boxed{y=1}$$

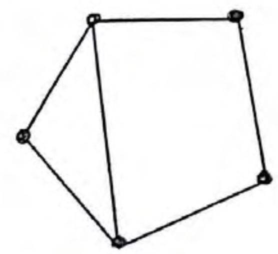
پس یک راس درجه ۳ دارد.

گراف اویلری (لئونارد اویلر - ریاضیدان سوئیسی):

یک گراف ساده یا چندگانه را اویلری می‌گویند هرگاه بتوان از یک راس حرکت کرد و هر یال را یکبار پیمود و به راس اولیه بازگشت.

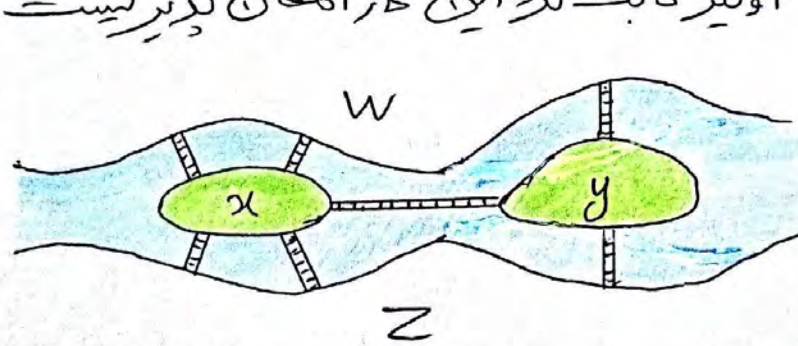

اویلری است

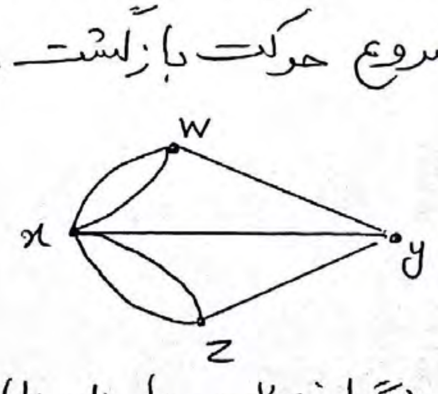

اویلری است


اویلری نیست

مسئله تاریخی:

شهر کونیگسبرگ (در روسیه) از چهار ناحیه x و y و z و w که توسط هفت پل روی رودخانه (در قرن ۱۸ میلادی) به یکدیگر متصل شده بودند، تشکیل شده است. مردم شهر کنجکاو بودند که بدانند آیا می‌توان با حرکت از یک نقطه از شهر و دقیقاً یکبار عبور از هر کدام از پل‌ها به نقطه شروع حرکت بازگشت یا نه؟ اویلر ثابت کرد این کار امکان پذیر نیست





(گراف ناحیه‌ها و پل‌ها)

گراف ساده نیست چون بین دو راس x و w بیش از یک یال وجود دارد.
چون در هر راس باید از یک یال وارد و از یک یال دیگر خارج شویم اگر این کار امکان پذیر باشد باید درجه همه راس‌ها زوج باشد درجه x زوج نیست پس این کار امکان ندارد

گراف‌های منتظم:

گراف G از مرتبه p را r-منتظم می‌نامند هرگاه درجه هر راس گراف G برابر r باشد ($0 \leqslant r \leqslant p-1$)

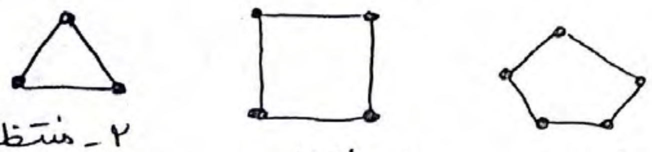
گراف‌های ۰-منتظم ←

۰-منتظم مرتبه ۱ — ۰-منتظم مرتبه ۲ — ۰-منتظم مرتبه ۳ — ۰-منتظم مرتبه ۴

گراف‌های ۱-منتظم ←

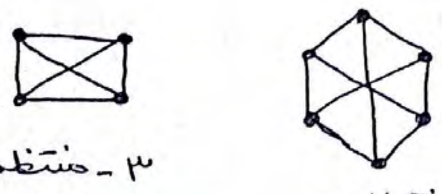
۱-منتظم مرتبه ۴ — ۱-منتظم مرتبه ۲ — ۱-منتظم مرتبه ۴

گراف‌های ۲-منتظم ←



۲-منتظم مرتبه ۳ — ۲-منتظم مرتبه ۴ — ۲-منتظم مرتبه ۵

گراف‌های ۳-منتظم ←



۳-منتظم مرتبه ۴ — ۳-منتظم مرتبه ۶

قضیه درجه‌ها در گراف منتظم:

در هر گراف r-منتظم با p رأس داریم: $\boxed{pr=2q}$

اثبات: می‌دانیم در هر گراف از مرتبه (تعداد راس) p و اندازه (تعداد یال‌ها) q مجموع درجه‌ها برابر 2q است.

مجموع درجه‌ها $= \underbrace{r+r+r+\cdots+r}_{p\ \text{تا}} = 2q \Rightarrow pr=2q$

تذکر مهم: طبق قضیه بالا pr عددی زوج است پس p و r نمی‌توانند هردو فرد باشند

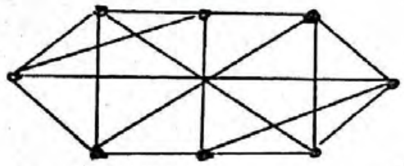
یعنی گراف فرد - منتظم مرتبه فرد نداریم

مثال) گراف ۳- منتظم مرتبه ۵ وجود ندارد.

مثال ۱) در یک گراف ۴- منتظم داریم: $q = ۳p - ۸$ ، مرتبه و اندازه گراف را بدست آورده و گراف را رسم کنید.

$r = ۴$ $\quad pr = ۲q \Rightarrow p \times ۴ = ۲q \Rightarrow ۲p = q$

$$q = ۳p - ۸ \Rightarrow ۲p = ۳p - ۸ \Rightarrow \boxed{p = ۸} \Rightarrow \boxed{q = ۱۶}$$



پس گراف ۴- منتظم مرتبه ۸ می باشد.

مثال ۲) با حذف ۱۶ یال از یک گراف ۷- منتظم، گرافی ۳- منتظم به وجود آمده است. مرتبه گراف را بدست آورید.

گراف ۷- منتظم: $۷p = ۲q \Rightarrow q = \frac{۷p}{۲}$

گراف ۳ منتظم: $۳p = ۲q \Rightarrow q = \frac{۳p}{۲}$

$$\frac{۷p}{۲} - ۱۶ = \frac{۳p}{۲} \xRightarrow{\times ۲} ۷p - ۳۲ = ۳p \Rightarrow ۴p = ۳۲ \Rightarrow \boxed{p = ۸}$$

گراف های کامل:

گراف G از مرتبه n را گراف کامل می گویند هرگاه درجه هر رأس آن (n-۱) باشد. به عبارت دیگر هر راس آن با تمام رئوس دیگر مجاور باشد. گراف کامل n رأسی را با K_n نمایش می دهیم.

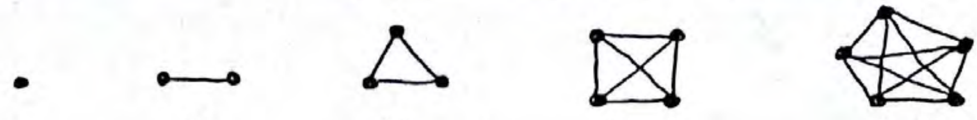
تذکر مهم:

۱) K_n یک گراف n راسی و n-۱ - منتظم است.

۲) یک گراف کامل n راسی به تعداد $\binom{n}{۲} = \frac{n!}{۲! \times (n-۲)!}$ یال دارد.

۳) گراف کامل از مرتبه p را با K_p نیز نمایش می‌دهند $(K_n=K_p)$

ساختار گراف‌های کامل تا مرتبه ۵ :

مرتبه (راس‌ها) $= n = p$	۱	۲	۳	۴	۵
نمودار					
	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
اندازه (یال‌ها) $= q$	۰	۱	۳	۶	۱۰

درجه‌ها و تعداد یال‌های گراف کامل :

درجه هر راس در K_p برابر $p-1$ است، چون هر راس به همه راس‌های دیگر وصل است پس گراف کامل $(p-1)$ - منتظم است.
به عنوان مثال K_5 همان گراف ۴- منتظم است. و اما تعداد یال‌ها:

$$\text{مجموع درجه‌ها} = 2q \Rightarrow \underbrace{(p-1)+(p-1)+\dots+(p-1)}_{p \text{ تا}} = 2q \Rightarrow p(p-1)=2q$$

$$\Rightarrow q=\frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow \boxed{q(K_p)=\frac{p(p-1)}{2}}$$

فرمول تعداد یال‌های گراف کامل p رأسی

(مثال)

تعداد یال‌های گراف K_5 $= q(K_5)=\frac{5(5-1)}{2}=10$ تا

تعداد یال‌های گراف K_7 $= q(K_7)=\frac{7(7-1)}{2}=21$ تا

مثال ۱) حاصلضرب مرتبه در اندازه یک گراف کامل برابر ۹۰ می‌باشد. این گراف چند منتظم است؟

مرتبه $= p$
اندازه $= q$

$$p\cdot q=90 \Rightarrow p\times\frac{p(p-1)}{2}=90 \Rightarrow p\times p\times(p-1)=180=6\times6\times5$$

$\Rightarrow \boxed{p=6} \Rightarrow$ گراف K_6 است $\Rightarrow$ گراف ۵- منتظم است

مثال ۲) با کم کردن ۳۳ یال از یک گراف کامل، گراف ۴-منتظم بدست می آید. مرتبه گراف کامل را بدست آورید.

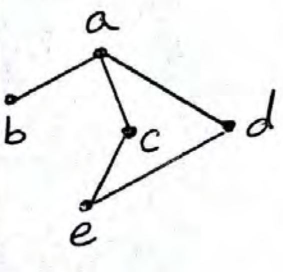
$$\text{گراف} = \text{۴-منتظم } P \text{ راسی} \Rightarrow 4P = 2q \Rightarrow q = 2P$$

$$\text{گراف} = \text{کامل } P \text{ راسی} \Rightarrow q = \frac{P(P-1)}{2}$$

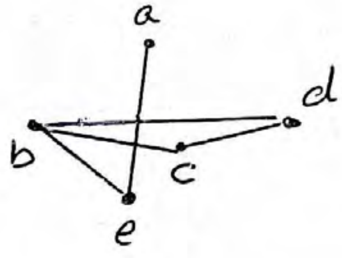
$$\frac{P(P-1)}{2} - 33 = 2P \xrightarrow{\times 2} P^2 - P - 66 = 4P \Rightarrow P^2 - 5P - 66 = 0$$

$$\Rightarrow (P-11)(P+6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} P = 11 & \text{ق ق} \Rightarrow \text{گراف مورد نظر} = K_{11} \\ P = -6 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

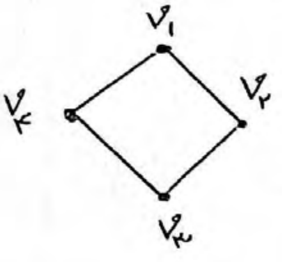
مکمل گراف:
مکمل گرافی مانند G که آن را با $\overline{G}$ (یا G^c) نمایش می دهیم گرافی است که مجموعه رئوس آن همان مجموعه رئوس گراف G است و بین دو راس از $\overline{G}$ یک یال است اگر و تنها اگر بین همان دو راس در G یالی وجود نداشته باشد.



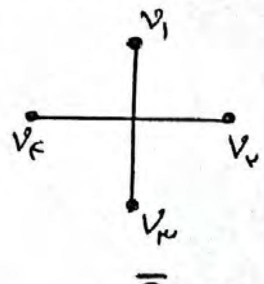
G



$\overline{G}$



G



$\overline{G}$

تذکر مهم:
۱) اگر تعداد یالهای گرافهای G و $\overline{G}$ را باهم جمع کنیم، برابر تعداد یالهای گراف کامل K_P می شود یعنی:

$$q(G) + q(\overline{G}) = \frac{P(P-1)}{2}$$

۲) درجه یک راس در گراف G را اگر با درجه همان راس در $\overline{G}$ جمع کنیم درجه آن راس در گراف کامل می شود یعنی:

$$deg_G(v) + deg_{\overline{G}}(v) = P-1$$

۳) مکمل گراف r-منتظم، گرافی $\bar{r}$-منتظم است و $r + \bar{r} = P-1$

۴) مکمل گراف کامل، گراف $\emptyset$ است چون در گراف کامل تماماً یالها رسم شده است.

مثال) تعداد یالهای گراف G با تعداد یالهای گراف $\bar{G}$ برابر است. مرتبه گراف در تقسیم بر ۴ چه باقیمانده‌ای دارد؟

$q(G)=q(\bar{G})$

$$q(G)+q(\bar{G})=\frac{P(P-1)}{2} \Rightarrow 2q(G)=\frac{P(P-1)}{2}$$

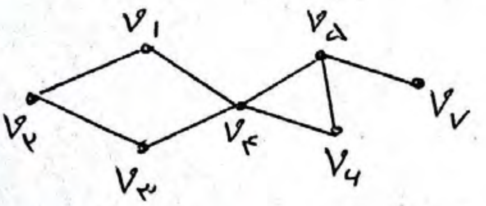
$$\Rightarrow q(G)=\frac{P(P-1)}{4}$$

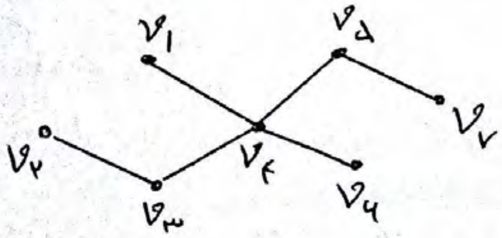
q باید عددی صحیح باشد یعنی $4|P(P-1)$ می‌دانیم هر عدد صحیح مانند P به یکی از صورتهای $4K$ و $4K+1$ یا $4K+2$ یا $4K+3$ است اگر $P=4K$ یا $P=4K+1$ باشد $P(P-1)$ مضرب ۴ می‌شود پس مرتبه یا بر ۴ بخشپذیر است یا اینکه باقیمانده‌ای برابر ۱ در تقسیم بر ۴ دارد.

زیرگراف:

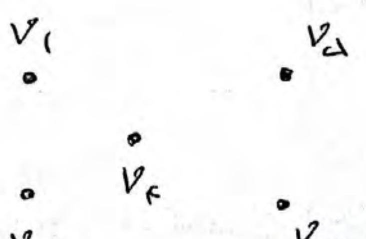
یک زیرگراف از گراف G، گرافی است که مجموعهٔ رئوس آن زیرمجموعه‌ای از مجموعه رئوس گراف G و مجموعهٔ یالهای آن زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ یالهای G باشد.

مثال: ۴ زیرگراف از گراف مقابل را رسم کنید.

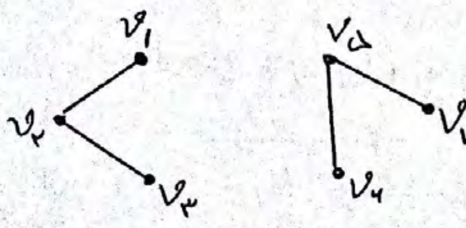




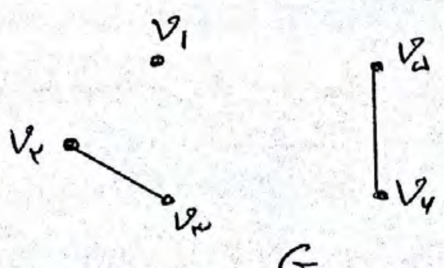
G_1



G_2



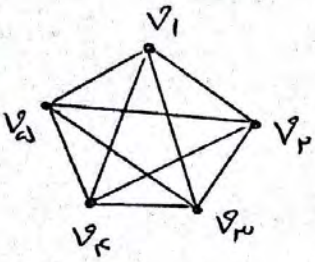
G_3



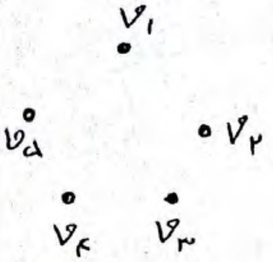
G_4

تذکر مهم: هر گراف، زیرگراف خودش است.

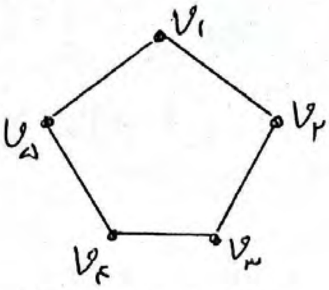
مثال ۲: پنج زیرگراف ۵ رأسی منتظم از گراف K_5 با رأس های $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ را رسم کنید.



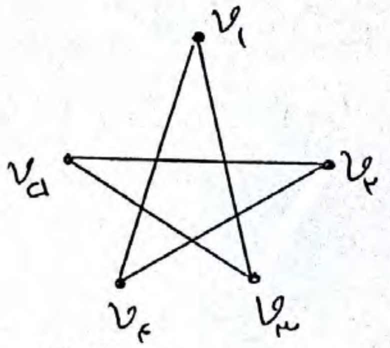
حل: گراف K_5 بصورت مقابل است اگر قرار باشد زیرگراف ۵ رأسی و r- منتظم باشد r نمی‌تواند فرد باشد (فرد منتظم مرتبه فرد نداریم) پس:



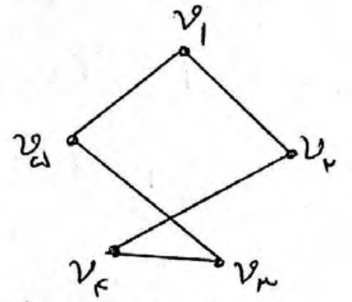
زیرگراف ۰- منتظم (گراف تهی)



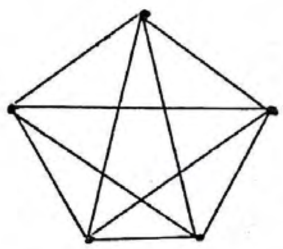
زیرگراف ۲- منتظم



زیرگراف ۲- منتظم



زیرگراف ۲- منتظم



زیرگراف ۴- منتظم که خود گراف است

نکته ریاضی:

تعداد زیرگراف های کامل در گراف کامل K_p برابر است با: $2^p - 1$

اثبات: می دانیم: تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه n عضوی $= \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$

تعداد زیرگراف های کامل در K_p $= \binom{p}{1} + \binom{p}{2} + \cdots + \binom{p}{p} = 2^p - 1$

مثال) گراف K_6 چند زیرگراف کامل دارد؟

جواب $= 2^6 - 1 = 64 - 1 = 63$ تا

تمرین ۱ : گراف G از مرتبه ۱۲ و اندازه ۱۰ است . اگر $deg_G(v)=3$ باشد $q(\bar{G})$ و $deg_{\bar{G}}(v)$ را بدست آورید .

$$q(G)+q(\bar{G})=\frac{P(P-1)}{2} \Rightarrow 10+q(\bar{G})=\frac{12\times 11}{2} \Rightarrow q(\bar{G})=56$$

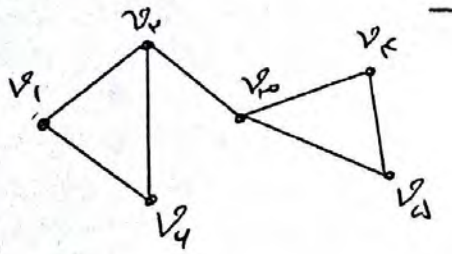
$$deg_G(v)+deg_{\bar{G}}(v)=P-1 \Rightarrow 3+deg_{\bar{G}}(v)=12-1 \Rightarrow deg_{\bar{G}}(v)=8$$

تمرین ۲ : مکمل گرافی از مرتبه P که $(2P-7)$ - منتظم است، گرافی ۲- منتظم است . P را بدست آورید .

$r=2P-7$

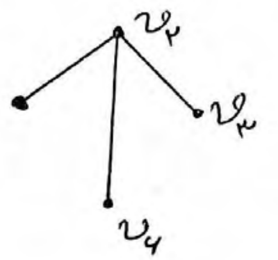
$r'=2$

$$r+r'=P-1 \Rightarrow 2P-7+2=P-1 \Rightarrow \boxed{P=4}$$

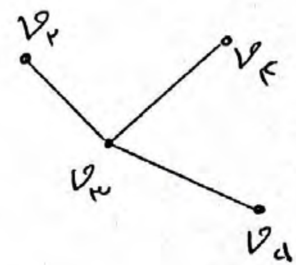


تمرین ۳ : گراف G بصورت مقابل است .

الف) زیرگرافی ۴ راسی از اندازه ۳ رسم کنید



یا



ب) G چند زیرگراف دارد که دو راس از درجه ۳ داشته باشد .

حل : مطابق شکل بالا : v_2 و v_3 باید باشند . یال v_1v_4 می‌تواند باشد یا نباشد (۲ حالت) یال v_4v_5 هم می‌تواند باشد یا نباشد (۲ حالت) پس طبق اصل ضرب $2\times 2=4$ زیرگراف با دو راس از درجه ۳ می‌توانیم داشته باشیم

نکته ریاضی :

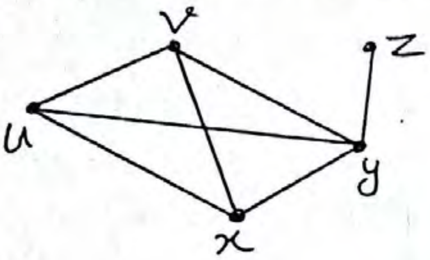
گراف G از مرتبه P و اندازه q است تعداد زیرگراف های هم مرتبه با G برابر است با : 2^q

مثال) گراف تمرین ۳ در بالا از اندازه $q=7$ است چند زیرگراف هم مرتبه با خودش دارد ؟

تا $2^q=2^7=128$ = جواب

مسیر در گراف :

فرض کنید u و v دو رأس از گراف G باشند. یک مسیر از u به v (که به آن $u-v$ مسیری گوییم) در G دنباله‌ای متشکل از رأس‌های دوبه‌دو متمایز در G است که از u شروع و به v ختم می‌شود بطوریکه هر دو رأس متوالی در این مسیر، مجاور هستند. طول مسیر همان تعداد یالهای طی شده است که یکی کمتر از تعداد رأس‌ها است (مثال)



uv = یک $u-v$ مسیر به طول ۱

uxv = یک $u-v$ مسیر به طول ۲

$uxyv$ = یک $u-v$ مسیر به طول ۳

$uxvyz$ = یک $u-z$ مسیر به طول ۴

تذکر مهم :

۱) هر رأس به تنهایی، یک مسیر به طول صفر از خودش به خودش است

۲) تعداد مسیرهای به طول صفر، برابر تعداد رأس‌ها (مرتبه گراف) است

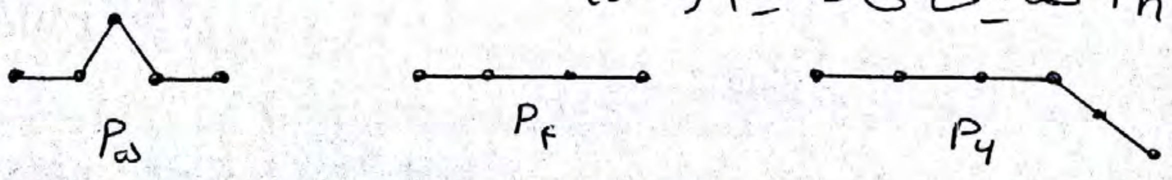
۳) تعداد مسیرهای به طول ۱ همان تعداد یالهای گراف (اندازه گراف) است

۴) جهت حرکت در مسیر مهم نبوده و فقط یالهای طی شده مهم است

در مثال بالا مسیر $uxyv$ با مسیر $vyxu$ فرقی ندارد و یک مسیر است.

تعریف مسیر n رأسی :

گرافی که تنها از یک مسیر n رأسی تشکیل شده باشد را مسیر n رأسی گفته و با P_n نمایش می‌دهیم (مثال)



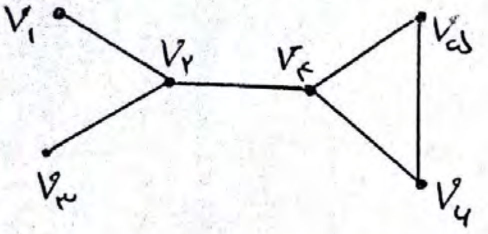
P_5 P_4 P_6

تذکر مهم :

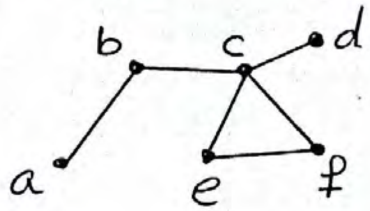
طول مسیر P_n برابر $n-1$ است (تعداد رأس‌ها یک واحد بیشتر از طول مسیر است)

گراف های همبند :

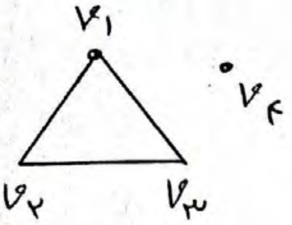
گراف G را همبند می گوییم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. در غیر اینصورت آنرا ناهمبند می گویند



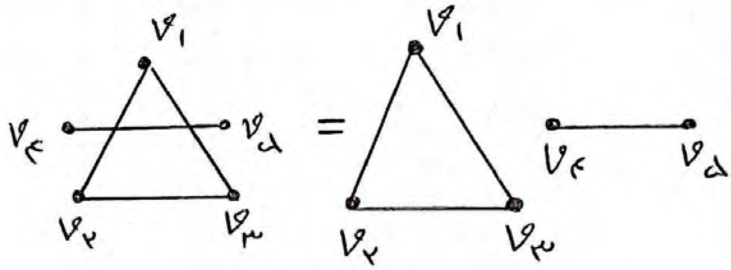
همبند



همبند



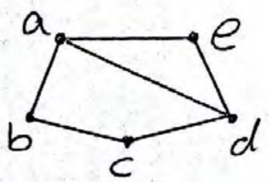
ناهمبند



ناهمبند

دور در گراف :

یک دور به طول m در گراف G دنباله ای از m+1 رأس که راس های متوالی مجاور بوده و m راس اول آن دو به دو متمایز بوده و رأس آخر همان راس اول باشد حداقل طول دور برابر ۳ می تواند باشد.

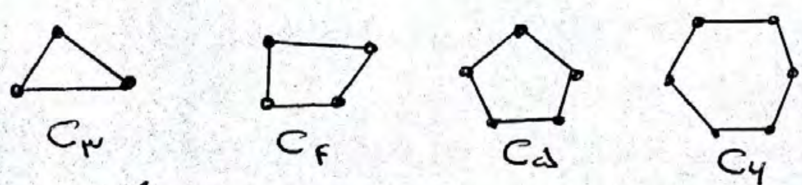


دوری به طول ۴ = abcda

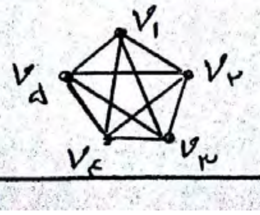
دوری به طول ۳ = aeda

تعریف دور n رأسی :

گرافی که تنها از یک دور n راسی تشکیل شده باشد را دور n راسی گفته و با نماد C_n نشان می دهند (مثال)

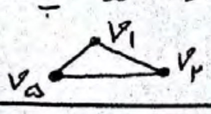


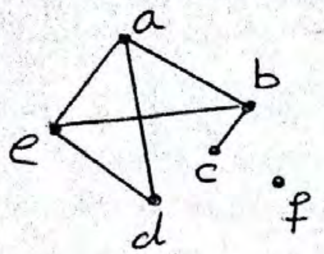
مثال) گراف K_5 چند زیر گراف بصورت C_3 دارد؟



جواب = $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \times 2!} = 10$

مثلاً :





(هماهنگ کشوری - خرداد ۹۹) (نمره ۱٫۲۵)

گراف G را درنظر گرفته و به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) $N_G[a]$ را با اعضا مشخص کنید

جواب: $N_G[a]=\{a,b,e,d\}$

ب) یک دور به طول ۴ در این گراف مشخص کنید جواب: a,b,e,d,a

پ) یک مسیر به طول ۳ و یک مسیر به طول ۴ از a به c بنویسید.

جواب: مسیر به طول ۳ = a,e,b,c مسیر به طول ۴ = a,d,e,b,c

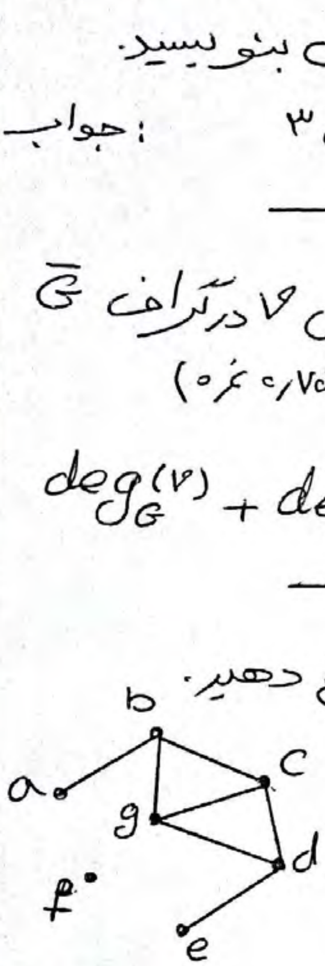
(هماهنگ کشوری - خرداد ۹۹)

در گراف G، درجه راس ۷ برابر با ۹ است و درجه راس ۷ در گراف $\bar{G}$ برابر با ۱۲ است. مرتبه گراف G را مشخص کنید (۰٫۷۵ نمره)

$$deg_G(7)+deg_{\bar{G}}(7)=P-1 \Rightarrow 9+12=P-1 \Rightarrow P=22$$

(هماهنگ کشوری - دیماه ۹۷) (۱٫۵ نمره)

با توجه به گراف G (شکل مقابل) به سوالات زیر پاسخ دهید.



الف) یک a-c مسیر به طول ۳ بنویسید.

جواب: abgc

ب) یک دور به طول ۴ مشخص کنید.

جواب: bcdgb

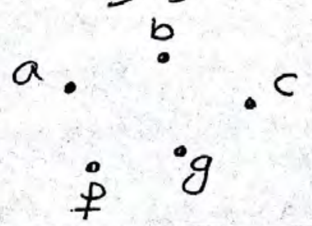
ج) درجه رأس a در گراف $\bar{G}$ را تعیین کنید.

جواب: $deg_{\bar{G}}(a)=5$

د) آیا گراف G همبند است؟ چرا؟

جواب: خیر، چون مثلاً از f به a مسیری وجود ندارد.

هـ) یک زیرگراف تهی ۵ رأسی، از گراف G رسم کنید.



(هماهنگ کشوری - دیماه ۹۷) (۱ نمره)

گراف G با مجموعه رأسهای $V(G)=\{a,b,c,d,e\}$ و مجموعهٔ یالهای $E(G)=\{ae,bc,bd,be,ec,ed\}$ مفروض است. بدون کشیدن نمودار آن به قسمتهای (الف) تا (ج) پاسخ دهید:

الف) مجموعه همسایگی باز راس d را بنویسید: $N_G(d)=\{b,e\}$:جواب

ب) اندازه گراف را مشخص کنید: $q=6$: جواب

ج) مجموع درجات رئوس این گراف برابر چند است؟

۱۲ = مجموع درجات رئوس

(هماهنگ کشوری - دیماه ۹۷) (۱ نمره)

گراف کامل K_p دارای ۳۶ یال است. در این گراف، مرتبهٔ گراف و $\Delta(G)$ را مشخص کنید (۱ نمره)

$$q(K_p)=\frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow \frac{p(p-1)}{2}=36 \Rightarrow$$

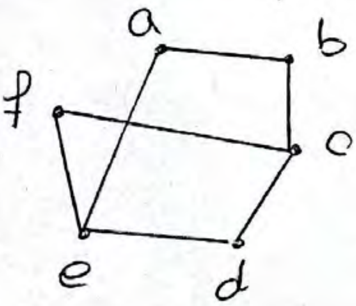
$$p(p-1)=72=9\times 8 \Rightarrow \boxed{p=9} \qquad \Delta(G)=p-1=9-1=8$$

$$\delta(G)=8$$

(هماهنگ کشوری شهریور ۹۸) (۲ نمره)

گراف G با مجموعه راس‌های $V=\{a,b,c,d,e,f\}$ و مجموعه یالهای زیر را در نظر بگیرید: $E=\{ab,bc,cd,ed,ae,cf,ef\}$

الف) نمودار گراف را رسم کنید.



ب) $N_G[b]$ را مشخص کنید: $N_G[b]=\{a,b,c\}$

ج) یک مسیر به طول ۵ از b به d بنویسید.

b, a, e, f, c, d

(هماهنگ کشوری - شهریور ۹۸) (۱ نمره)

یک گراف ۵ راسی غیرتهی k- منتظم رسم کنید بطوریکه:

الف) k بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

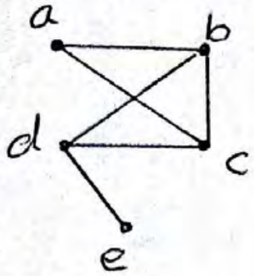
ب) k کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

(الف)

(ب)

(هماهنگ کشوری - دیماه ۹۸) (۱/۲۵ نمره)

گراف G بصورت مقابل را در نظر بگیرید و به سوالات زیر پاسخ دهید.



الف) $\delta(G)$ را مشخص کنید $\delta(G)=1$

ب) اندازه گراف را تعیین کنید. $q=4$

پ) مجموعه همسایگی بسته راس b را بنویسید.
$N_G[b]=\{b,a,c,d\}$

ت) اگر $N_G(d)=\{e,x,b\}$ باشد، x کدام راس است؟ $x=c$

(هماهنگ کشوری - دیماه ۹۸) (۱ نمره)

الف) گراف k-منتظم از مرتبه n را تعریف کنید $(0\leq k<n)$

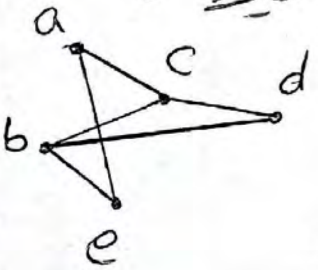
جواب: گرافی از مرتبه n که درجه تمام رئوس آن باهم مساوی و برابر k باشد

ب) آیا گراف ۳-منتظم از مرتبه ۵ وجود دارد؟ دلیل بیاورید.

جواب: وجود ندارد زیرا: $\sum_{i=1}^{5} deg\, v_i=2q \Rightarrow 5\times 3=2q$ تناقض

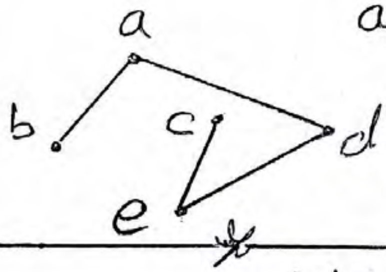
(هماهنگ کشوری - دیماه ۹۸) (۱ نمره)

گراف G بصورت مقابل را در نظر بگیرید و به سوالات زیر پاسخ دهید:

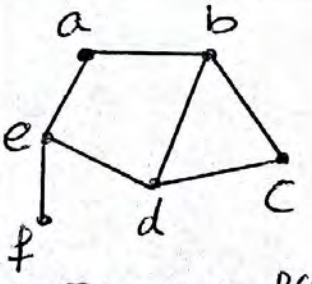


الف) دوری به طول ۵ مشخص کنید.
جواب: a, c, d, b, e, a

ب) مکمل گراف G را رسم کنید.



(هماهنگ کشوری - خرداد ۹۸) (۱/۵ نمره)



الف) مرتبه و اندازه گراف G را بنویسید.
$P=6\ ,\ q=7$

ب) مجموعه $N_G\ b$ را بنویسید.
$N_G(b)=\{a,d,c\}$

ج) مجموع درجه‌های راس‌های گراف $\bar{G}$ را مشخص کنید

$q(\bar{G})+q(G)=\frac{P(P-1)}{2} \Rightarrow q(\bar{G})+7=\frac{6(6-1)}{2}$

$\Rightarrow q(\bar{G})=8$

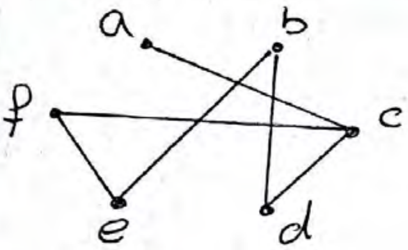
$\Rightarrow \sum deg_{\bar{G}} v=2q=2\times 8=16$

تذکر مهم:
شامل رأس a نیست ← $N_G(a)$ = مجموعه همسایگی باز رأس a

شامل رأس a است ← $N_G[a]$ = مجموعه همسایگی بسته رأس a

★ تمرینات مهم فصل ۲ درس ۱ با پاسخ ★

۱) گراف G با مجموعه رأس‌های $V(G)=\{a,b,c,d,e,f\}$ و مجموعه یالهای $E(G)=\{ab, ac, cd, ef, db, cf, be\}$ مفروض است. نمودار آن را رسم کنید و به موارد زیر جواب دهید:



الف) مرتبه و اندازه گراف G را بنویسید.

$P=6 \qquad q=7$

ب) درجه رأس‌های G را مشخص نمایید.

$deg(a)=deg(d)=deg(e)=deg(f)=2 \qquad deg(b)=deg(c)=3$

پ) کدام رأس‌های گراف G با رأس f مجاورند؟ رأس‌های c و e

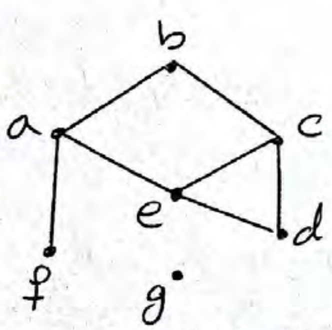
ت) مجموع درجات رئوس این گراف برابر چند است؟ $2q=2\times7=14$

ث) گراف H با مجموعه رأس‌های $V(H)=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ و مجموعه یالهای $E(H)=\{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_4v_1\}$ مفروض است. بدون کشیدن نمودار آن به قسمتهای (الف) تا (ت) در مورد گراف H پاسخ دهید.

$P=4 \,,\; q=6 \,,\; deg(v_1)=deg(v_2)=deg(v_3)=deg(v_4)=3 \,,\; 2q=12$

---

۲) گراف G را در نظر بگیرید.



الف) مجموعه‌های $V(G)$ و $E(G)$ را بنویسید.

$V(G)=\{a,b,c,d,e,f\} \qquad E(G)=\{ab, bc, cd, ce, de, ea, af\}$

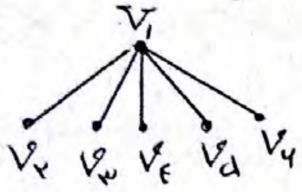
ب) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید. $\Delta(G)=3 \,,\; \delta(G)=1$

پ) مجموعه همسایه‌های رأس‌های f و g و e را بنویسید.

$N_G(f)=\{a\} \qquad N_G(g)=\emptyset \qquad N_G(e)=\{a, c, d\}$

ت) اگر $N_G(x)=\{a,c\}$ آنگاه x کدام رأس است؟ x رأس b است.

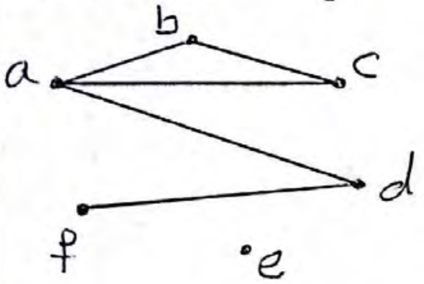
۳) گراف G با مجموعه رأس های $V(G)=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ مفروض است. اگر $N_G(v_1)$ دارای ۵ عضو باشد و مجموعه های $N_G(v_i)$ برای $2 \le i \le 6$ تک عضوی باشند. گراف G را رسم کنید:



$P=6 \Rightarrow N_G(v_1)=5$

پس v_1 به تمام رئوس دیگر وصل است و چون $2 \le i \le 6$ پس $N_G(v_i)$ تک عضوی است پس v_2 و ... و v_6 فقط به یک رأس وصل هستند که همان v_1 است

۴) در گراف G با مجموعه راس های $V(G)=\{a, b, c, d, e, f\}$ داریم:



$N_G(a)=\{b, c, d\}$ $\quad$ $N_G(b)=\{a, c\}$

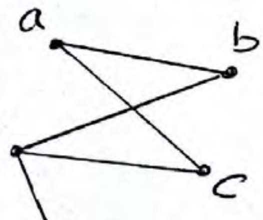
$N_G(c)=\{a, b\}$ $\quad$ $N_G(d)=\{a, f\}$

$N_G(e)=\{\ \}$ $\quad$ $N_G(f)=\{d\}$

گراف G را رسم و اندازه آن را مشخص کنید

$P=6 \quad , \quad q=5$

۵) گراف G رسم شده است. مجموع درجه های رأس های گراف G را مشخص کنید و همچنین درجات رئوس a و c در گراف $\bar{G}$ را تعیین نمایید.



$P=5 \quad , \quad q=6$

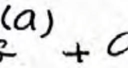
$q(G)+q(\bar{G})=\frac{P(P-1)}{2} \Rightarrow 6+q(\bar{G})=\frac{5\times 4}{2}$

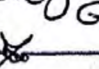
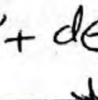
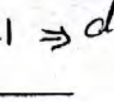
$\Rightarrow q(\bar{G})=4 \Rightarrow$ مجموع درجات رئوس $\bar{G}$ $=2q(\bar{G})=8$

$deg_G(a)+deg_{\bar{G}}(a)=P-1 \Rightarrow 2+deg_{\bar{G}}(a)=5-1 \Rightarrow deg_{\bar{G}}(a)=2$

$deg_G(c)+deg_{\bar{G}}(c)=P-1 \Rightarrow 3+deg_{\bar{G}}(c)=5-1 \Rightarrow deg_{\bar{G}}(c)=1$

۶) گراف های کامل از مرتبه ۱ تا ۵ را رسم کنید

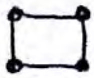
K_1: K_2: 

K_3:  K_4:  K_5: 

۷) در هر یک از حالات زیر در صورت امکان یک گراف r - منتظم از مرتبه n رسم کنید.

الف) $n=4$ ، $r=1$

ب) $n=4$ ، $r=2$



ت) $n=5$ ، $r=2$

پ) $n=5$ ، $r=3$ — ۵ راس درجه فرد نداریم

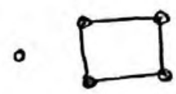
ث) $n=6$ ، $r=4$

ج) $n=7$ ، $r=3$ — ۷ راس درجه فرد نداریم

---

۸) برای هر یک از حالتهای زیر در صورت امکان یک گراف ۵ راسی رسم کنید بطوریکه:

الف) یک راس تنها داشته باشد



ب) دو راس تنها داشته باشد

پ) سه راس تنها داشته باشد

ت) چهار راس تنها داشته باشد — امکان ندارد

ث) پنج راس تنها داشته باشد

---

۹) هفت نفر در یک اتاق هستند و برخی از آنها با یکدیگر دست می‌دهند ۶ نفر از آنها هرکدام دقیقاً با ۲ نفر دست داده اند. نشان دهید نفر هفتم نمی‌تواند دقیقاً با ۵ نفر دست داده باشد.

حل: هفت نفر را رئوس گراف درنظر می‌گیریم و ۲ نفری را که باهم دست داده اند بهم وصل می‌کنیم، ۶ تا راس درجه ۲ خواهیم داشت اگر نفر هفتم با ۵ نفر دست داده باشد درجه آن ۵ است و فقط یک راس درجه فرد داریم که امکان پذیر نیست.

---

۱۰) علی، سامان، محمد، ناصر و مهرداد در یک شبکه اجتماعی عضو هستند و هرکدام از آنها ممکن است در فهرست دوستان هرکدام از ۴ نفر دیگر باشد یا نباشد:

الف) چند حالت مختلف می‌تواند وجود داشته باشد؟

e = مهرداد ، d = ناصر ، c = محمد ، b = سامان ، a = علی

$(x, y) =$ y در فهرست دوستان x است

$= \{(a,b), (a,c), (a,d), (a,e), (b,a), (b,c), (b,d), (b,e)$ تمام حالتهای ممکن
$, (c,a), (c,b), (c,d), (c,e), (d,a), (d,b), (d,c), (d,e), (e,a), (e,b)$
$, (e,c), (e,d)\} \Rightarrow$ جمعاً = ۲۰ حالت

ب) اگر بودن در فهرست دوستان، رابطه‌ای دو طرفه داشته باشد یعنی هر دو نفر یا هر دو در فهرست دوستان هم هستند و یا هیچ کدام در فهرست دوستان دیگری نیست، در این صورت چند حالت مختلف می‌تواند وجود داشته باشد؟

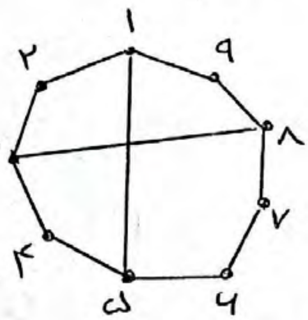
حل: فقط ۱۰ حالت کلی می‌تواند وجود داشته باشد.

$\{ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de\}$

---

۱۱) یک گراف ۹ راسی رسم کنید بطوریکه:

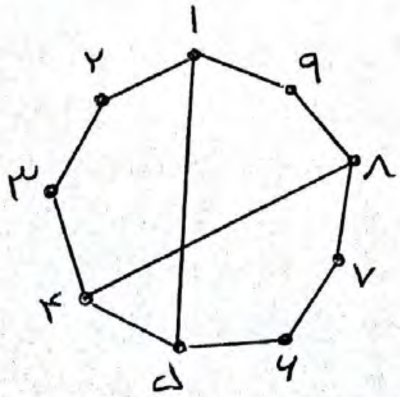
الف) دورهایی به طول ۵ و ۶ و ۷ و ۹ داشته باشد و هیچ دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.



دور به طول ۵ = ۱۲۳۴۵۱
دور به طول ۶ = ۱۵۶۷۸۹۱
دور به طول ۷ = ۱۲۳۸۷۶۵۱
دور به طول ۹ = ۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱

دور به طولهای دیگر وجود ندارد.

ب) دورهایی به طول ۵ و ۶ و ۸ و ۹ داشته باشد و دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.



دور به طول ۵ = ۱۲۳۴۵۱
دور به طول ۶ = ۱۵۶۷۸۹۱
دور به طول ۸ = ۱۲۳۴۸۷۶۵۱
دور به طول ۹ = ۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱

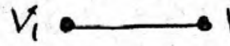
دور به طولهای دیگر وجود ندارد.

۱۲) فرض کنید G یک گراف باشد و $\delta(G)\geq k$، درستی یا نادرستی هر یک از موارد زیر را ثابت کنید:

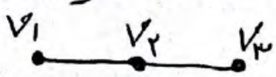
الف) G لزوماً شامل یک مسیر به طول k است

جواب: درست است

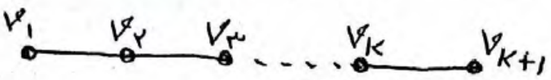
فرض کنید v_1 یک راس از گراف باشد چون $\delta(G)\geq k$ پس v_1 به حداقل یک راس دیگر مانند v_2 وصل است.



چون $\deg(v_2)\geq k$ پس v_2 به حداقل یک راس دیگر وصل است.



و اگر همین طور ادامه دهیم نمودار زیر قابل رسم است که یک مسیر به طول k است.



ب) G لزوماً شامل یک مسیر به طول $k+1$ است.

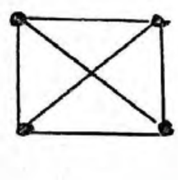
جواب: نادرست است

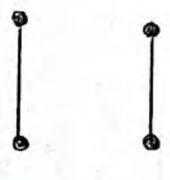
$\delta(G)\geq 2$ ولی مسیر به طول ۳ نداریم

۱۳) یک گراف ۴ راسی غیر تهی k-منتظم بکشید که:

الف) k بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد

ب) k کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

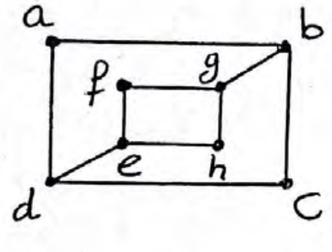




درس ۲ : مدل سازی با گراف

تعریف مجموعهٔ احاطه‌گر :

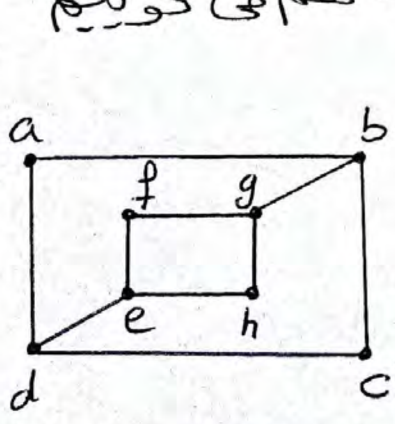
زیرمجموعه D از راس های گراف را مجموعهٔ احاطه‌گر می‌نامیم هرگاه هر راس از گراف که در D نباشد، حداقل به یکی از راس های D وصل باشد.



در گراف مقابل $D=\{a, f, h, c\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است چون راسهای دیگر گراف که در D نیستند (یعنی راسهای b و g و e و d) به یکی از راسهای D وصل هستند مجموعه $D=\{a, b, g, e, d\}$ هم می‌تواند یک مجموعه احاطه‌گر دیگر باشد چون راسهای دیگر گراف که در D نیستند به یکی از راسهای D وصل هستند. در گراف G هر راس خودش و همه راسهای دیگر گراف G را پوشش می‌دهد و احاطه می‌کند

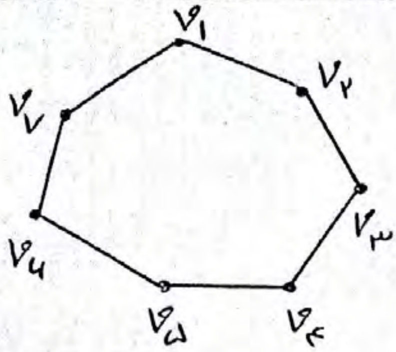
تعریف مجموعه احاطه‌گر مینیمم :

در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G ، مجموعه (یا مجموعه‌ها) که کمترین تعداد عضو را دارند ، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم نامیده و تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را عدد احاطه‌گری گراف G می‌نامیم و آن را با $\gamma(G)$ (گامای جی) نشان می‌دهیم به یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم، یک γ- مجموعه هم می‌گوییم



مجموعه احاطه‌گر مینیمم $D=\{b, e\}$

$\gamma(G)=2$



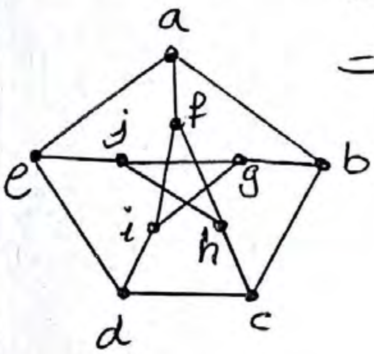
مثال) برای گراف مقابل که دور C_7 است مطلوبست محاسبه $\gamma(G)=?$ و یک مجموعه احاطه گر؟

$\{v_7, v_5, v_3, v_1\}$ = یک مجموعه احاطه گر

$\{v_1, v_4, v_7\}$ = یک مجموعه احاطه گر مینیمم

$\{v_1, v_2, v_5\}$ = یک مجموعه احاطه گر مینیمم دیگر

$$\gamma(G)=3$$



مثال) در گراف مقابل که به گراف پترسن معروف است مطلوبست:

الف) دو مجموعه احاطه گر معرفی کنید.

$D=\{a,b,c,d,e\}$ یا $D=\{a,j,i,c\}$

ب) دو مجموعه احاطه گر مینیمم معرفی کنید.

$D=\{a,i,h\}$ یا $D=\{a,g,c\}$ $\gamma(G)=3$

معرفی یک نماد:

می دانیم اگر x یک عدد صحیح باشد جزء صحیح x را با علامت $[x]$ نشان داده و آنرا بصورت زیر تعریف می کنیم

$$[x]=n \Leftrightarrow n\leq x<n+1 \quad n\in \mathbb{Z}$$

یا

$$[x]=\begin{cases} x & x\in\mathbb{Z} \\ \text{بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از } x & x\notin\mathbb{Z}\end{cases} \qquad [3]=3 \qquad [4.7]=4$$

جزء صحیح عدد x را کف عدد x نیز می گویند و آنرا با علامت $\lfloor x\rfloor$ نشان داده و به آن کف x می گویند.

اگر x عددی غیر صحیح باشد برای نمایش عدد صحیح بعد از x از علامت $\lceil x\rceil$ استفاده می کنیم و آنرا سقف x می خوانیم در حالت کلی:

$$\lceil x \rceil = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ \text{کوچکترین عدد صحیح بزرگتر از } x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$[3] = \lfloor 3 \rfloor = 3$ $\qquad [3/7] = \lfloor 3/7 \rfloor = 3$ $\qquad \lfloor 5/1 \rfloor = 5$

$\lceil 3 \rceil = 3$ $\qquad \lceil 3/7 \rceil = 4$ $\qquad \lceil 5/1 \rceil = 6$

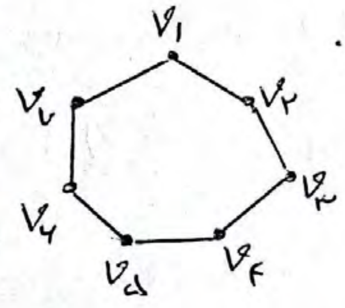
باتوجه به مثالهای بالا، اعداد کف و سقف در اعداد صحیح باهم برابرند

کران پایین $\gamma(G)$:

اگر G یک گراف n رأسی باماکزیمم درجه Δ باشد آنگاه: $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$

در گراف G عدد $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ را یک کران پایین $\gamma(G)$ می نامند یعنی $\gamma(G)$ نمی تواند از آن کمتر باشد

مثال ۱ : عدد احاطه گری گراف C_7 را بدست آورید.



$\Delta = 2$ و $n = 7$

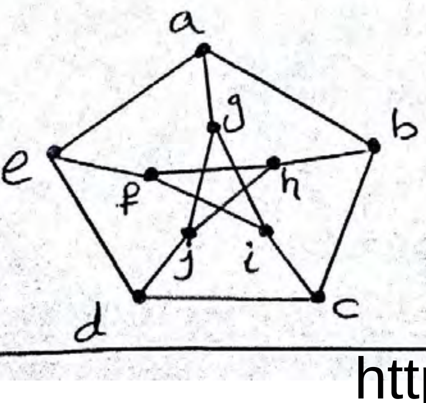
گراف ۲- منتظم است پس: $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{7}{2+1} \right\rceil = 3$

از طرفی $D = \{v_1, v_4, v_6\}$ یک مجموعه احاطه گر است پس $\gamma(G) \leq 3$

$$\left.\begin{matrix} \gamma(G) \geq 3 \\ \gamma(G) \leq 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \gamma(G) = 3$$

مثال ۲ : (هماهنگ - خرداد ۹۹) :

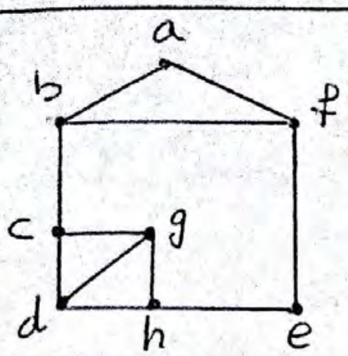
عدد احاطه گری گراف زیر را مشخص و ادعای خود را ثابت کنید (۱٫۲۵ نمره)



حل: در گراف مقابل $n = 10$ و $\Delta = 3$ پس:

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{10}{3+1} \right\rceil \Rightarrow \gamma(G) \geq 3$$

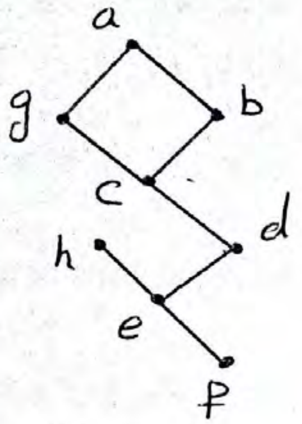
از طرفی $D = \{g, h, d\}$ یک مجموعه احاطه گری برای گراف است پس $\gamma(G) \leq 3$ بنابراین: $\gamma(G) = 3$



مثال ۳: عدد احاطه گری گراف مقابل را بدست آورید.

حل: گراف از مرتبه $n=8$ و $\Delta=3$ است

پس: $\gamma \geq \lceil \frac{8}{3+1} \rceil = 2$ از طرفی $\{f, g\}$ کل رأسها را احاطه می کنند پس $\gamma \leq 2$ درنتیجه: $\gamma = 2$

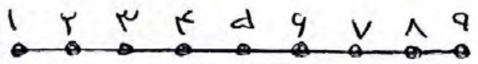


مثال ۴: عدد احاطه گری گراف مقابل را بدست آورید.

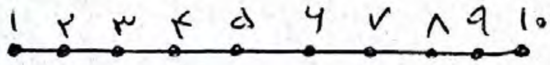
حل: گراف از مرتبه $n=8$ و $\Delta=3$ است

پس $\gamma \geq \lceil \frac{8}{3+1} \rceil = 2$ به نظر می رسد که با ۲ راس نمی توان کل راسها را احاطه کنیم زیرا برای احاطه کردن رئوس a، b، c، d و g حداقل دوتا از آنها باید در مجموعه احاطه گر باشند (چون $\lceil \frac{5}{3+1} \rceil = 2$) و برای احاطه کردن رئوس e، f و h حداقل یکی از آنها باید انتخاب شوند (چون $\lceil \frac{3}{2+1} \rceil = 1$) بنابراین حداقل ۳ راس باید در مجموعه احاطه گر باشد یعنی $\gamma(G) \geq 3$ از طرفی چون $\{a, c, e\}$ یک مجموعه احاطه گر است پس $\gamma(G) \leq 3$ درنتیجه: $\gamma(G) = 3$

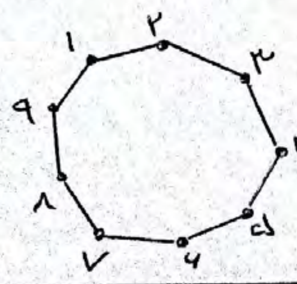
مثال ۵: گراف های P_{10} و P_9 و C_{10} و C_9 را رسم کنید و عدد احاطه گری هر یک را مشخص کنید

P_9:


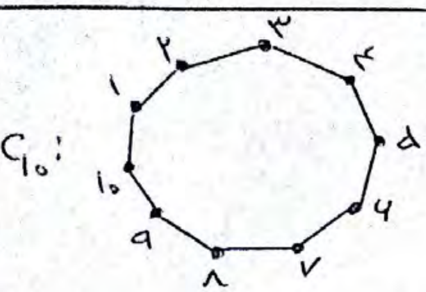
$\gamma(P_9) \geq \lceil \frac{9}{2+1} \rceil = 3$ از طرفی $\{۲, ۵, ۸\}$ یک مجموعه احاطه گر است پس $\gamma(P_9) \leq 3$ درنتیجه: $\gamma(P_9) = 3$

P_{10}:


$\gamma(P_{10}) \geq \lceil \frac{10}{2+1} \rceil = 4$ از طرفی $\{۲, ۵, ۸, ۱۰\}$ یک مجموعه احاطه گر است پس: $\gamma(P_{10}) \leq 4$ درنتیجه: $\gamma(P_{10}) = 4$

C_9:


$\gamma(C_9) \geq \lceil \frac{9}{2+1} \rceil = 3$ از طرفی $\{۱, ۴, ۷\}$ یک مجموعه احاطه گر است پس: $\gamma(C_9) \leq 3$ درنتیجه: $\gamma(C_9) = 3$



$4 = \lceil \frac{10}{2+1} \rceil \le \gamma(C_{10})$ از طرفی $\{1, 4, 7, 9\}$

یک مجموعه احاطه‌گر می‌باشد پس $\gamma(C_{10}) \le 4$

درنتیجه: $\gamma(C_{10}) = 4$

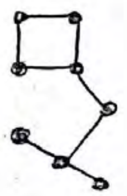
مثال ۷: (هماهنگ دیماه ۹۸) (نمره ۱/۲۵)

اگر n تعداد رئوس گراف و Δ ماکزیمم درجه گراف باشد:

الف) گرافی رسم کنید که برای آن عدد احاطه‌گر برابر $\lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil$ است.

جواب: اگر $n=10$ باشد C_{10} و P_{10} رسم شود چون $\gamma(G) = \lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil = 4$

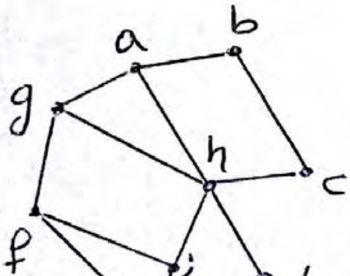
ب) گرافی رسم کنید که برای آن عدد احاطه‌گری بزرگتر از $\lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil$ باشد (یا برابر $\lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil$ نباشد)



$\lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil = 2$ ولی: $\gamma(G) = 3$

مجموعه احاطه‌گر مینیمال:

مجموعه احاطه‌گری که با حذف هر یک از رأس‌هایش، دیگر احاطه‌گر نباشد را احاطه‌گر مینیمال می‌گوییم.

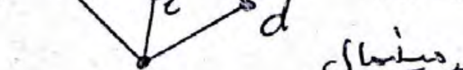


مثال ۱: (هماهنگ شهریور ۹۸):

در گراف مقابل یک مجموعه احاطه‌گر غیرمینیمال انتخاب کنید سپس با حذف برخی از رأس‌ها آن را به یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال تبدیل کنید (۱ نمره)

$\{a, h, f, b\}$ = یک مجموعه احاطه‌گر غیرمینیمال

اکنون با حذف رأس a از آن، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال بدست می‌آید.



مثال ۲: (هماهنگ شهریور ۹۸)

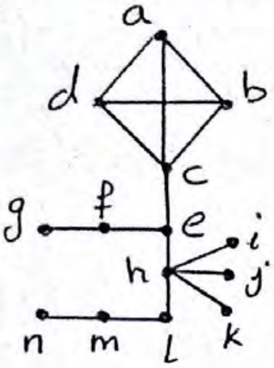
الف) گراف P_8 را رسم کنید. (۱/۵ نمره)

ب) یک γ-مجموعه از آن را مشخص کنید. $\{a, d, g\}$

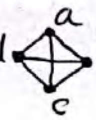
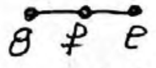
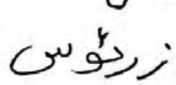
ج) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۴ عضوی از آن مشخص نمایید $\{a, d, e, h\}$

★ حل تمرینات مهم فصل ۲ درس ۲ با پاسخ ★

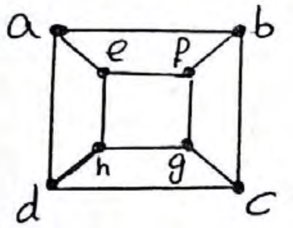
۱) عدد احاطه‌گری را برای هر یک از گراف‌های زیر مشخص نمایید.



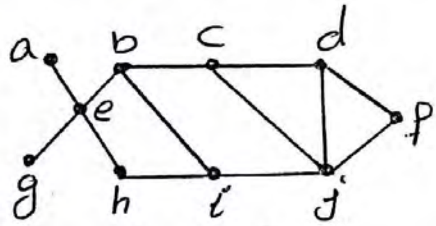
الف) $n=14$ و $\Delta=5$ پس : $\gamma(G) \geq \lceil \frac{14}{5+1} \rceil = 3$

اما حداقل یکی از رئوس a و b و c و d باید انتخاب شود چون باید  احاطه شود حداقل یکی از رئوس e و f و g باید انتخاب شود تا گراف  احاطه شود حداقل یکی از رئوس h و i و j و k باید انتخاب شود تا گراف  باید احاطه شود حداقل یکی از رئوس l و m و n باید انتخاب شود تا گراف  احاطه شود بنابراین حداقل ۴ راس در هر مجموعه احاطه‌گر باید باشد لذا $\gamma(G) \geq 4$

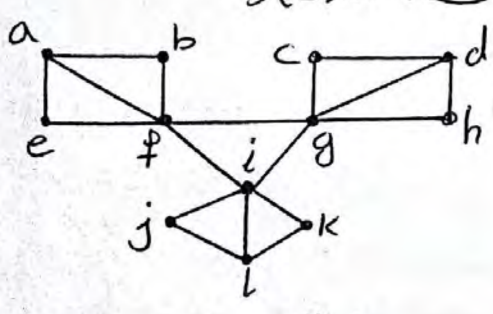
از طرفی چون $\{c, f, h, m\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است لذا $\gamma(G) \leq 4$ پس $\gamma(G)=4$



ب) $n=8$ و $\Delta=3$ پس $\gamma(G) \geq \lceil \frac{8}{4} \rceil = 2$ از طرفی $\{h, b\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است لذا $\gamma(G) \leq 2$ پس : $\gamma(G)=2$

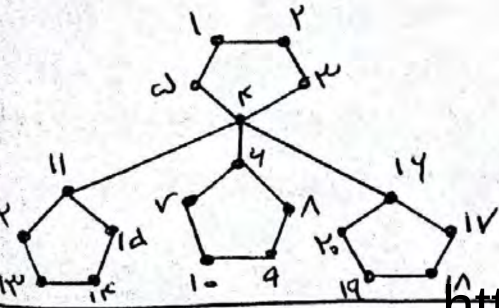


پ) $n=10$ و $\Delta=4$ پس $\gamma(G) \geq \lceil \frac{10}{5} \rceil = 2$ از طرفی $\{e, j\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است لذا $\gamma(G) \leq 2$ پس : $\gamma(G)=2$



ت) $n=12$ و $\Delta=5$ پس $\gamma(G) \geq \lceil \frac{12}{6} \rceil = 2$

از طرفی $\{f, d, l\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است لذا $\gamma(G) \leq 3$ پس $\gamma(G)=3$



ث) $n=20$ و $\Delta=5$ پس $\gamma(G) \geq \lceil \frac{20}{6} \rceil = 4$

از طرفی $\{19, 17, 14, 12, 10, 8, 4, 2\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است پس $\gamma(G)=8$

۲) اگر برای گراف G داشته باشیم $\gamma(G)=1$ در این صورت به چه ویژگی هایی از گراف G می توان پی برد؟

حل: چون $\gamma(G)=1$ پس یک راس وجود دارد که با همه رأسها مجاور است در نتیجه: $\Delta(G)=p-1$ پس $q_{min}=p-1$ و گراف می تواند حداکثر یک گراف کامل باشد پس $q_{max}=\binom{p}{2}$

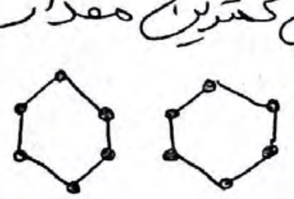
۳) $\gamma(P_n)$ و $\gamma(C_n)$ را به ازای هر $n\in \mathbb{N}$ مشخص کنید.

پاسخ: $\gamma(C_n)=\lceil \frac{n}{3} \rceil$ و $\gamma(P_n)=\lceil \frac{n}{3} \rceil$

۴) اگر G یک گراف k- منتظم n راسی باشد نشان دهید $\gamma(G)\geq \lceil \frac{n}{k+1} \rceil$

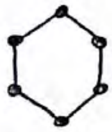
حل: چون گراف k- منتظم است پس $\Delta=k$ و $\gamma(G)\geq \lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil=\lceil \frac{n}{k+1} \rceil$

۵) یک گراف ۲- منتظم ۱۲ راسی بکشید که عدد احاطه گری آن کمترین مقدار ممکن باشد.



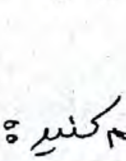
حل: می دانیم: $\gamma(G)\geq \lceil \frac{n}{k+1} \rceil$ پس $\gamma(G)\geq \lceil \frac{12}{3} \rceil$ پس $\gamma(G)\geq 4$ در شکل مقابل $\gamma(G)=4$

۶) یک گراف ۶ راسی که γ- مجموعه آن به اندازه یک باشد رسم کنید



۷) یک گراف ۶ راسی که γ- مجموعه آن به اندازه دو باشد رسم کنید

۸) فرض کنید n و k دو عدد طبیعی باشند و $k\leq n$ روشی برای رسم یک گراف n راسی که عدد احاطه گری آن k باشد ارائه دهید

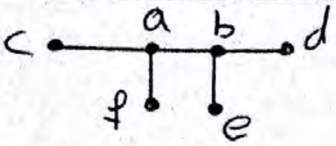


حل: کافیست k-1 راس ایزوله قرار دهیم و در بقیه رئوس یک راس را به تمام رئوس دیگر وصل کنیم مثلاً: $n=7$ و $k=3$ و $\gamma(G)=3$

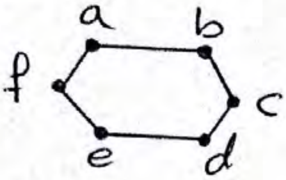
۹) (هماهنگ کشوری - خرداد ۹۸) : گرافی ۶ راسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید:

الف) بطوریکه مجموعه احاطه گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.

ب) بطوریکه بیش از یک مجموعه احاطه گر با اندازه ۲ داشته باشد.



حل الف) گراف روبه‌رو از مرتبه ۶ و دارای تنها یک مجموعه احاطه‌گر یکتا $\{a,b\}$ است.



حل ب) گراف مقابل دارای سه مجموعه احاطه‌گری به اندازه ۲ است که عبارتند از: $\{e,b\}$ و $\{f,c\}$ و $\{a,d\}$

۱۰) برای هر $n\in\mathbb{N}$ $(n\geq 4)$ دلخواه توضیح دهید که:

الف) چگونه می‌توانید یک گراف n راسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.

حل: کافیست یک رأس ایزوله باشد و در بقیه رئوس یک راس را به همه رئوس دیگر وصل کرد.

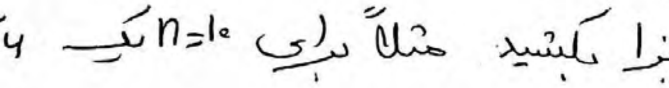
ب) چگونه می‌توانید یک گراف n راسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه ۲ داشته باشد

حل ب) کافیست دو گراف کامل مجزا بکشید مثلاً برای $n=10$ یک K_4 و یک K_6 بکشیم

در تمرین ۹ قسمت (ب) می‌توانستیم گراف را بصورت زیر هم رسم کنیم.

مجموعه‌های {۴و۱} و {۵و۲} مجموعهٔ احاطه‌گرند

(هماهنگ - دیماه ۹۷)

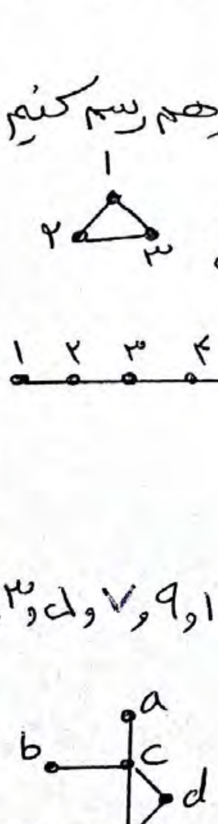


۱۱) گراف P_{12} را رسم کنید:

الف) یک γ- مجموعه از آن مشخص کنید

حل: مجموعه {۲، ۵، ۸، ۱۱} یک γ- مجموعه است.

ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۶ عضوی از آن مشخص کنید {۱، ۳، ۵، ۷، ۹، ۱۱}



(هماهنگ - دیماه ۹۸)

برای گراف روبه‌رو:

الف) یک مجموعه احاطه‌گر با ۴ عضو مشخص کنید $\{c,f,h,g\}$

ب) مجموعه‌ای از رئوس را مشخص کنید که احاطه‌گر مینیمال باشد $\{c,f,g\}$

(هماهنگ کشوری ـ خرداد ۹۸)

در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

الف) یک گراف کامل ۸ رأسی، ...... یال دارد. جواب: ۲۸

ب) در یک گراف از مرتبه ۱۰ با ۳=δ حداقل ...... راس برای احاطه همه رئوس لازم است.

جواب: ۳

ج) اگر در گراف G از مرتبه P داشته باشیم $\gamma(G)=1$ در اینصورت $\Delta(G)$ برابر ...... است.

جواب: $P-1$

(هماهنگ کشوری دیماه ۹۸)

درست یا نادرست بودن عبارت زیر را مشخص کنید.

تعداد رأس‌های زوج هر گراف، عددی فرد است. جواب: نادرست

(هماهنگ ـ شهریور ۹۸)

جاهای خالی را پر کنید:

الف) گراف G را ...... می‌نامیم هرگاه بین هر دو راس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد جواب: همبند

ب) مقدار $\gamma(C_n)$ به ازای هر عدد طبیعی $n>2$ برابر است با: ...... جواب: $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$

(هماهنگ کشوری ـ دیماه ۹۷)

درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید.

الف) گراف حاصل از مدل سازی پل کونیگسبرگ یک گراف ساده است

جواب: نادرست

ب) گراف ۳ـ منتظم از مرتبه ۵ قابل رسم نیست

جواب: درست