اگرچه نیت خوبی است زیستن ...
اما خوشا که دست به تصمیم بهتری بزنیم !

بسم الله الرحمن الرحیم

هندسه(۱)

رشته‌های ریاضی و فیزیک

پایهٔ دهم

دورهٔ دوم متوسطه

فصل ۱ : ترسیم‌های هندسی و استدلال

درس اوّل: ترسیم‌های هندسی

درس دوّم: استدلال

بارم نوبت اول: ۹ نمره

بارم نوبت دوم: ۳ نمره

بارم شهریور: ۳ نمره

این فصل به دو بخش **ترسیم‌های هندسی** و **استدلال** تقسیم می‌شود.

ترسیم‌های هندسی

۱- مقدمات رسم
۲- برخی از خواص نیمساز زاویه و ترسیم آن
۳- برخی از خواص عمودمنصف و ترسیم آن
۴- رسم خط عمود و خط موازی

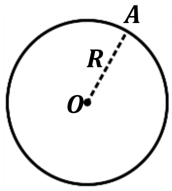
استدلال

۱- استقرا و استنتاج
۲- قضیه‌های دوشرطی
۳- مثال نقض

درس اوّل: ترسیم‌های هندسی

دایره:

مجموعۀ همۀ نقاطی که از یک نقطۀ ثابت مانند O به فاصلۀ معلومی مانند R هستند، دایره نامیده می‌شود. O را مرکز و R را شعاع دایره می‌نامیم.

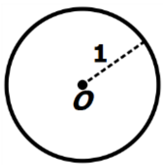


مثال:

مجموعه نقاطی را مشخص کنید که فاصلۀ آن‌ها از یک نقطه برابر با 1 باشد.

✍پاسخ:

یک نقطۀ ثابت مانند O را در نظر بگیرید. بینهایت نقطه در جهات مختلف O وجود دارند که فاصلۀ آنها تا O برابر با 1 است. کافیست دهانۀ پرگار را به اندازۀ 1 باز کنیم و دایره‌ای به شعاع 1 و مرکز O رسم کنیم.



تمرین:

مجموعه نقاطی را مشخص کنید که فاصلۀ آن‌ها از یک نقطه برابر با 2 باشد.

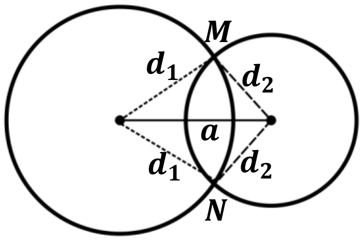
تعیین نقطه‌ای که از دو نقطۀ ثابت به فاصله‌های معلوم باشد

فرض کنیم A و B دو نقطۀ ثابت به فاصلۀ a از یکدیگر باشند. برای یافتن نقطه‌ای که از A به فاصلۀ d_1 و از B به فاصلۀ d_2 باشد، دو دایره یکی به مرکز A و شعاع d_1 و دیگری به مرکز B و شعاع d_2 رسم می‌کنیم. نقطه یا نقاط تلاقی دو دایره جواب است. به شکل صفحۀ بعد توجه کنید:

در شکل دو نقطهٔ و از دو نقطهٔ ثابت M و N به یک فاصله هستند.

اگر دو دایره مماس شوند مسئله یک جواب دارد.

اگر دو دایره یکدیگر را قطع نکنند، مسئله جواب ندارد.

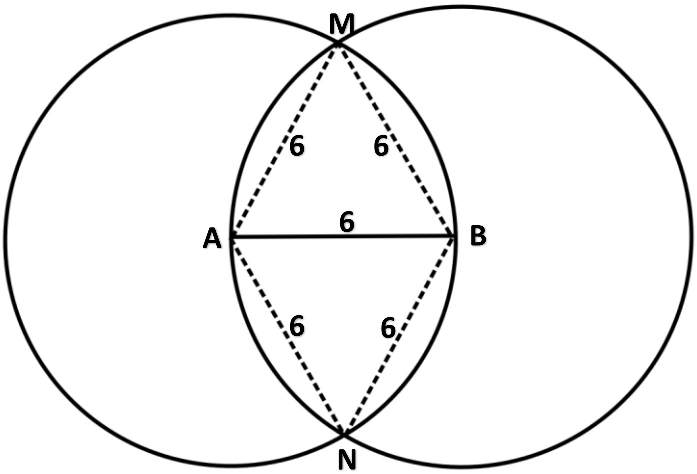


مثال:

دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ 6 سانتی‌متر مفروض هستند. نقاطی را بیابید که از دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ 6 سانتی‌متر باشند.

پاسخ:

نقاط M و N جواب هستند.

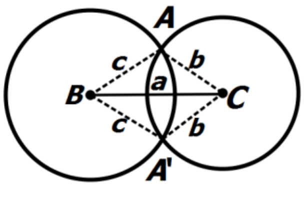


رسم مثلثی که سه ضلع آن معلوم است

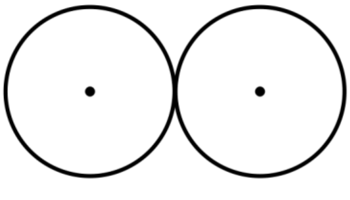
فرض کنیم سه ضلع مثلثی a ، b و C داده شده است.برای رسم مثلث، ابتدا یکی از سه ضلع داده شده مثلاً بزرگ‌ترین ضلع را رسم می‌کنیم $(BC = a)$ ، سپس به مرکز B و شعاع c و به مرکز C و شعاع b دو دایره رسم می‌کنیم. در صورت تقاطع دو دایره، جای رأس سوّم مثلث یعنی نقطهٔ A معلوم می‌شود.

الف) اگر دو دایره متقاطع باشند، مسئله دو جواب دارد. مثلث‌های ABC و $A'BC$ که با یکدیگر به حالت (ض ض ض) هم‌نهشت‌اند.

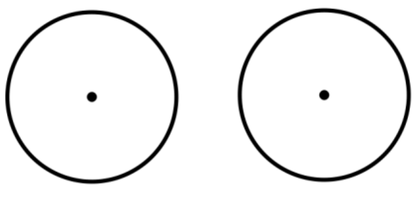
ب) اگر دو دایره مماس باشند، دراین‌صورت مسئله جواب ندارد.



الف



ب



پ

تمرین:

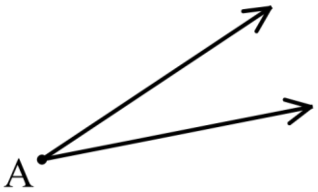
دو نقطه مانند A و B را به فاصلهٔ **3** سانتی‌متر از هم در نظر بگیرید. نقاطی را بیابید که فاصله‌شان از A، **2** و از B، **2.5** سانتی‌متر باشد.

تمرین:

توضیح دهید که چگونه می‌توان مثلثی به طول اضلاع **4** و **5** و **6** واحد رسم کنید.

زاویه

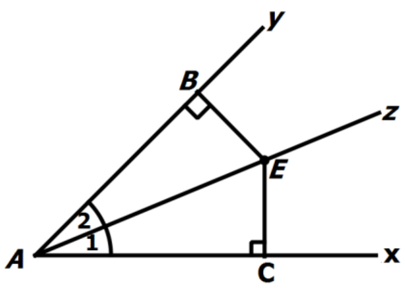
دو نیم‌خط با ابتدای مشترک تشکیل یک زاویه می‌دهند. پس برای رسم یک زاویه کافیست با استفاده از خط‌کش دو نیم‌خط متقاطع رسم کنیم.



برخی خواص نیمساز یک زاویه

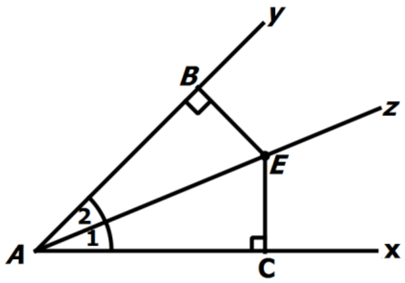
الف) اگرنقطه‌ای روی نیمساز یک زاویه باشد، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است. یعنی در شکل زیر داریم:

$$BE = CE$$



منظور از فاصله، کوتاهترین فاصله است که همان فاصلهٔ عمودی می‌باشد.

ب) اگر نقطه‌ای به فاصلهٔ یکسان از دو ضلع یک زاویه باشد، آن نقطه روی نیمساز آن زاویه قرار دارد. یعنی در شکل زیر، با فرض $BE = CE$، داریم $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$.

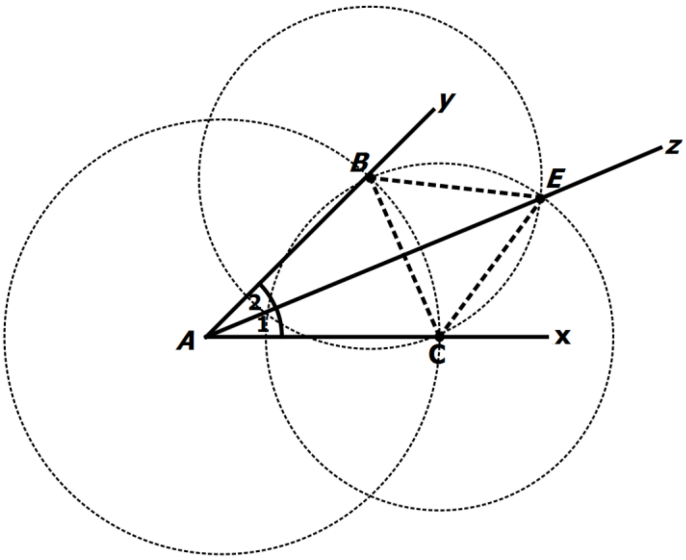


رسم نیمساز یک زاویه

الف) دهانهٔ پرگار را کمی باز کنید و به مرکز A کمانی بزنید تا نیم‌خط AX و AY را در نقطهٔ C و B قطع کند، داریم $AB = AC$.

ب) به مرکز C و شعاع BC و بار دیگر به مرکز B و شعاع BC دو کمان رسم می‌کنیم. نقطهٔ تلاقی این دو کمان را E می‌نامیم. داریم $CE = BE$.

پ) AE نیمساز زاویهٔ XAY است. زیرا دو مثلث ABE و ACE به حالت (ض ض ض) هم‌نهشت‌اند. پس $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$.



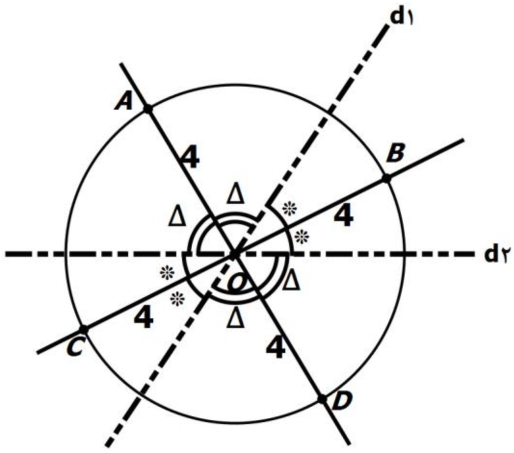
مثال:

دو خط متقاطع d_1 و d_2 مفروضند. نقطه‌ای بیابید که از نقطهٔ تقاطع دو خط به فاصلهٔ 4 سانتی‌متر باشد و از هر یک از دو خط d_1 و d_2 به یک فاصله باشد.

✍پاسخ:

نقطه‌ای که از دو خط متقاطع d_1 و d_2 به یک فاصله قرار دارد روی نیمساز زوایای ایجاد شده بین دو خط است. از طرفی نقطه‌ای که از نقطهٔ O (محل تلاقی دو خط) به فاصلهٔ 4 سانتی‌متر است روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع 4 سانتی‌متر قرار

دارد، پس محل تلاقی این دایره با نیمسازها جواب است یعنی A ، B ، C و D .



نکته

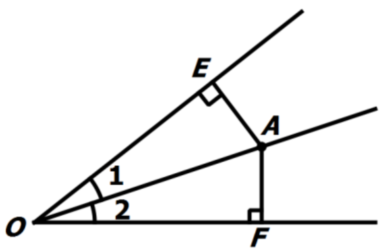
تمام نقاط روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع زاویه به یک فاصله‌اند.

قضیهٔ 1:

نشان دهید که تمام نقاط روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع زاویه به یک فاصله‌اند.

اثبات:

زاویهٔ O و نقطهٔ A روی نیمساز O را در نظر بگیرید. می‌دانیم که فاصلهٔ یک نقطه از یک خط برابر است با طول پاره‌خط عمود بر آن. بنابراین از نقطهٔ A به اضلاع زاویهٔ O عمود می‌کنیم و نقاط تقاطع را E و F می‌نامیم. دو مثلث OAE و OAF را در نظر بگیرید. داریم:



$$\begin{cases} O\bar{A} = O\bar{A} \\ A\hat{E}O = A\hat{F}O = 90^\circ \\ \widehat{O_1} = \widehat{O_2} \quad (\text{نقطهٔ } A \text{ روی نیمساز است}) \end{cases}$$

بنابراین دو مثلث OAE و OAF بنابرحالت وتر و یک زاویهٔ حاده همنهشت هستند. یعنی

$$\overset{\Delta}{AEO} \cong \overset{\Delta}{AFO}$$

در نتیجه $A\bar{E} = A\bar{F}$. یعنی فاصلهٔ تمام نقاط روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع زاویه به یک اندازه‌اند.

■

نکته

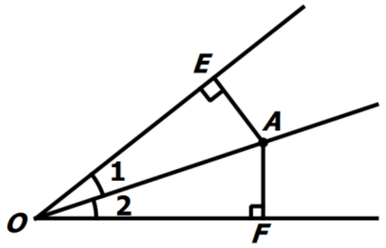
اگر نقطه‌ای از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد آنگاه حتماً روی نیمساز زاویه قرار دارد.

قضیهٔ 2:

نشان دهید که اگر نقطه‌ای از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد آنگاه حتماً روی نیمساز زاویه قرار دارد.

اثبات:

نقطهٔ A را داخل زاویهٔ O طوری در نظر بگیرید که فاصله‌اش تا دو ضلع زاویه مقداری یکسان باشد. A را به O وصل می‌کنیم. دو مثلث OAE و OAF را در نظر بگیرید. داریم:



$$\begin{cases} \overline{OA} = \overline{OA} & \text{(ضلع مشترک)} \\ A\widehat{E}O = A\widehat{F}O = 90^\circ & \\ A\overline{E} = A\overline{F} & \text{(طبق فرض)} \end{cases}$$

بنابراین دو مثلث OAE و OAF بنابرحالت وتر و یک ضلع همنهشت هستند. یعنی

$$\overset{\triangle}{AEO} \cong \overset{\triangle}{AFO}$$

در نتیجه $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$.

یعنی اگر نقطه‌ای از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد آنگاه حتماً روی نیمساز زاویه قرار دارد.

■

تمرین:

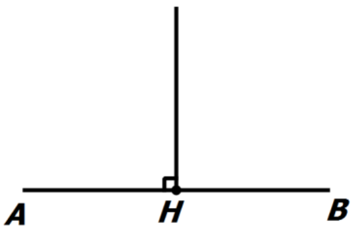
پاره‌خط AB به‌طول 8 سانتی‌متر مفروض است. نقاطی را تعیین کنید که ازدو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ 6 سانتی‌متر باشند.

تمرین:

توضیح دهید که چگونه می‌توان مثلثی به طول اضلاع 5 و 6 و 7 واحد رسم کنید.

عمودمنصف

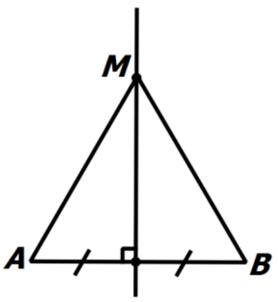
خطی است که بر پاره‌خط عمود است و آن را نصف می‌کند.



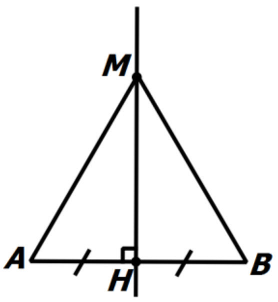
برخی خواص عمودمنصف یک پاره‌خط

الف) اگرنقطه‌ای روی عمودمنصف یک پاره‌خط باشد، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است. یعنی در شکل زیر داریم:

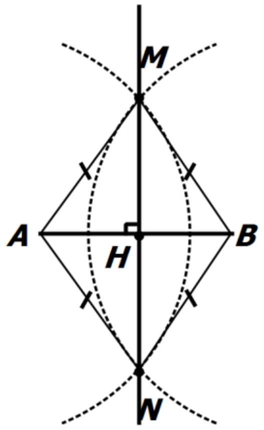
$$AM = BM$$



ب) اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد. یعنی در شکل زیر، با فرض $AM = BM$، داریم$AH = BH$ و $MH \perp AB$.



رسم عمودمنصف یک پاره‌خط



پاره‌خط AB مفروض است.

دهانهٔ پرگار را بیش از نصف طول AB باز می‌کنیم و یک‌بار کمانی به مرکز A و بار دیگربا همان اندازه از نقطهٔ B کمان بزنید تا یکدیگر را در دو نقطهٔ M و N قطع کنند. داریم:

$AM = BM$

و

$AN = BN$

زیرا اندازهٔ شعاع دایره ثابت است.

خط MN عمودمنصف پاره‌خط AB است، زیرا M و N از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله‌اند و $MN \perp AB$.

نکته

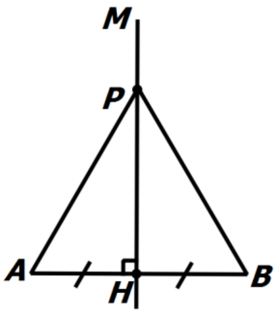
اگر نقطه‌ای روی عمودمنصف یک پاره‌خط باشد، فاصله‌اش از دوسر پاره‌خط به یک اندازه است.

قضیهٔ 3:

نشان دهید که اگر نقطه‌ای روی عمودمنصف یک پاره‌خط باشد، فاصله‌اش از دوسر پاره‌خط به یک اندازه است.

اثبات:

پاره‌خط AB و عمودمنصف MH و نقطهٔ P روی آن‌را در نظر بگیرید. نقطهٔ P را به A و B وصل می‌کنیم. داریم:



$$\begin{cases} P\overline{H} = P\overline{H} & \text{(ضلع مشترک)} \\ \widehat{H_1} = \widehat{H_2} = 90^\circ & \text{(طبق فرض)} \\ A\overline{H} = B\overline{H} & \text{(طبق فرض)} \end{cases}$$

بنابراین دو مثلث PHA و PHB بنابرحالت دو ضلع و زاویهٔ بین همنهشت هستند. یعنی

$$P\overset{\Delta}{H}A \cong P\overset{\Delta}{H}B$$

در نتیجه $A\overline{P} = B\overline{P}$. ■

نکته

اگر نقطه‌ای فاصله‌اش تا دو سر یک پاره‌خط به یک اندازه باشد، آن‌گاه آن نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط است.

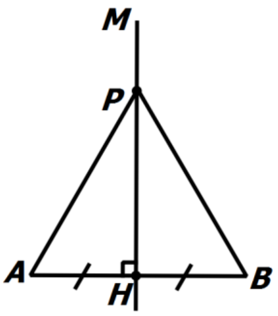
قضیهٔ 4:

نشان دهید که اگر نقطه‌ای فاصله‌اش تا دو سر یک پاره‌خط به یک اندازه باشد، آن‌گاه آن نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط است.

✍**اثبات:**

پاره‌خط AB و نقطهٔ P روی آن‌را در نظر بگیرید بطوریکه فاصهٔ P تا دو سر پاره‌خط AB به یک اندازه باشد. یعنی $\overline{AP} = \overline{BP}$

از نقطهٔ P به AB عمود می‌کنیم و پای عمود را H می‌نامیم. داریم:



$$\begin{cases} \overline{PH} = \overline{PH} & \text{(ضلع مشترک)} \\ \widehat{H_1} = \widehat{H_2} = 90^\circ & \text{(طبق فرض)} \\ \overline{AP} = \overline{BP} & \text{(طبق فرض)} \end{cases}$$

بنابراین دو مثلث PHA و PHB بنابرحالت وتر و یک ضلع همنهشت هستند. یعنی

$$P\overset{\Delta}{H}A \cong P\overset{\Delta}{H}B$$

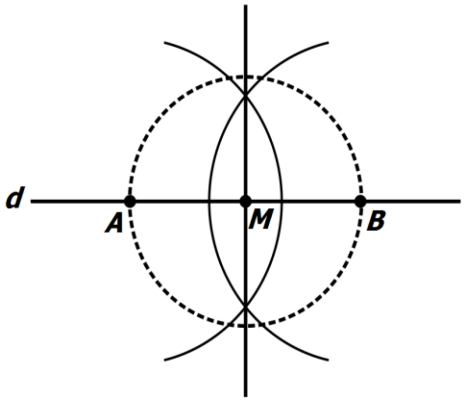
در نتیجه $\overline{AH} = \overline{BH}$ ، پس P روی عمودمنصف AB قرار دارد.

■

تمرین:

متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن 6 و 8 باشد. چند متوازی‌الاضلاع با این شرایط می‌توان رسم کرد؟

رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای روی آن



خط d و نقطهٔ M را روی آن در نظر بگیرید.

دایره‌ای به مرکز M و شعاع دلخواه رسم کنید.

نقاط برخورد را A و B بنامید.

عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنید.

دراین‌صورت خطی عمود بر خط d رسم کرده‌ایم که از نقطهٔ M می‌گذرد.

رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای غیر واقع بر آن

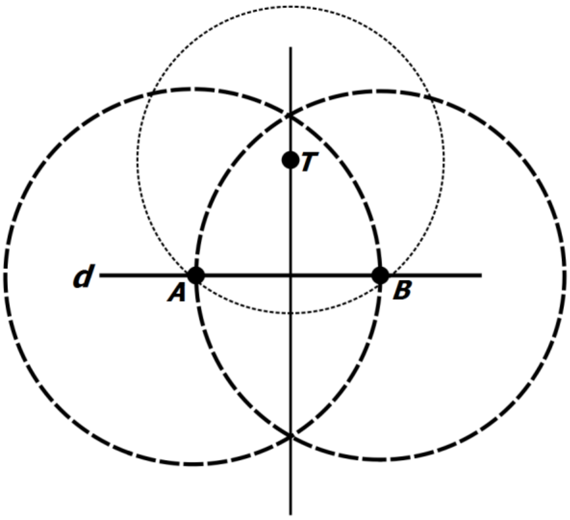
خط d و نقطهٔ T را روی آن در نظر بگیرید.

دهانهٔ پرگار را بیشتر از فاصلهٔ T تا خط d باز کرده و دایره‌ای به مرکز T رسم کنید.

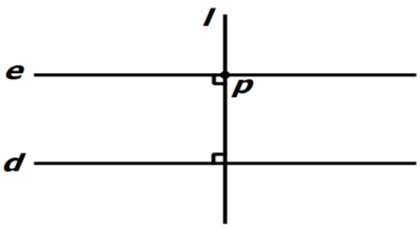
نقاط برخورد را A و B بنامید.

عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنید.

نقطهٔ T از نقاط A و B به یک فاصله است، بنابراین T روی عمودمنصف پاره‌خط AB و در نتیجه روی خط عمود بر خط d قرار دارد.



رسم خط موازی با یک خط از یک نقطهٔ غیر واقع بر آن



خط d و نقطهٔ p خارج از آن را در نظر بگیرید:

خط عمود بر d و گذرنده از نقطهٔ p را رسم کنید، آن را l می‌نامیم.

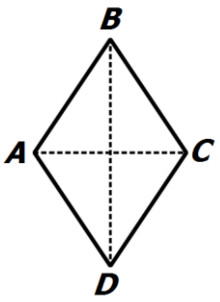
خط عمود بر l و گذرنده از نقطهٔ p را رسم کنید، آن را e می‌نامیم.

خط l را به عنوان خط مورب گذرنده از دو خط d و e در نظر می‌گیریم. چون تمام زوایای حاصل با هم مساوی و برابر با 90° هستند بنابراین خط e با خط d موازی است.

ترسیم لوزی

قبل از روش ترسیم، خواص لوزی را یادآوری می کنیم:

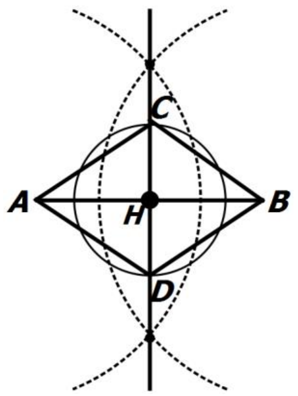
- ضلع های روبرو موازی‌اند.
- تمام اضلاع برابرند.
- زوایای روبرو دو به دو برابرند.
- قطرها عمود منصف یکدیگرند.
- زوایای مجاور مکمل‌اند.
- دارای 2 محور تقارن است.
- قطرها نیمساز زاویه‌ها هستند.



مثال:

لوزی با قطرهایی به طول 6 و 4 رسم کنید.

✍پاسخ:



پاره‌خط AB به طول 6 رسم می‌کنیم.
عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد با AB را H می‌نامیم.
دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ 2 باز کرده و دایره‌ای به مرکز H و شعاع 2 می‌زنیم.
نقاط برخورد با عمودمنصف را C و D می‌نامیم ،C و D را به A و B وصل می‌کنیم.
چون قطرها بر هم عمود هستند و یکدیگر را نصف می‌کنند
بنابراین چهارضلعی $ABCD$ یک لوزی است.

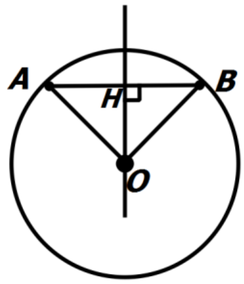
یافتن مرکز دایره

قضیهٔ 5:

عمودمنصف وتر یک دایره از مرکز آن میگذرد.

✍اثبات:

دایره‌ای به مرکز O و وتر AB در آن در نظر بگیرید. از O به AB عمود می‌کنیم و نقطهٔ برخورد را H می‌نامیم.
داریم:



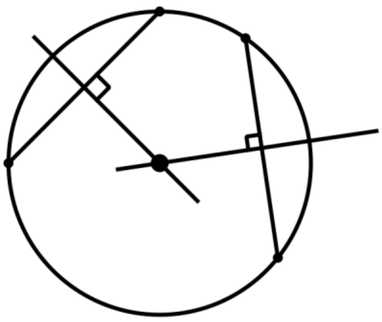
$$\begin{cases} \overline{OH} = \overline{OH} & \text{(ضلع مشترک)} \\ \widehat{H_1} = \widehat{H_2} = 90^\circ & \text{(طبق فرض)} \\ \overline{OA} = \overline{OB} & \text{(طبق فرض)} \end{cases}$$

بنابراین دو مثلث OHA و OHB بنابرحالت وتر و یک ضلع همنهشت هستند. یعنی

$O\overset{\Delta}{H}A \cong O\overset{\Delta}{H}B$

در نتیجه $A\bar{H} = B\bar{H}$ ، درنتیجه عمودمنصف وتر AB از O می‌گذرد. ■

پس برای یافتن مرکز یک دایره کافیست



- **دو وتر از دایره را که با هم موازی نیستند رسم میکنیم.**
- **عمودمنصفهای آنها را رسم می‌کنیم.**
- **چون عمودمنصف‌ها از مرکز دایره می‌گذرند،**

بنابراین

محل برخورد عمود منصف‌های دو وتر غیرموازی در دایره،

مرکز دایره است.

مثال:

متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول ضلع‌هایش 6 و 4 و طول یک قطر آن 7 باشد.

✍پاسخ:

پاره‌خط AB به طول 7 رسم می‌کنیم.

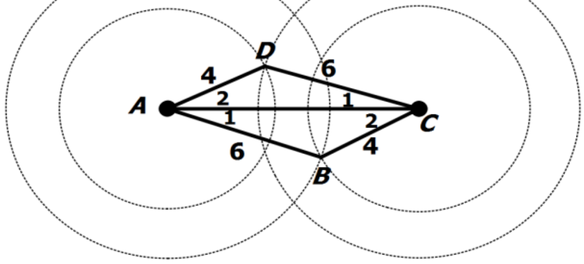
به مرکز A و به شعاع 4 و به مرکز C و شعاع 6 دو کمان رسم می‌کنیم، یک نقطهٔ تلاقی آن‌ها را D می‌نامیم.

به مرکز A و به شعاع 6 و به مرکز C و شعاع 4 دو کمان رسم می‌کنیم، یک نقطهٔ تلاقی آن‌ها را B می‌نامیم.

چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع مطلوب است، زیرا دو مثلث ABC و CDA به حالت (ض ض ض) هم‌نهشت‌اند.

پس:

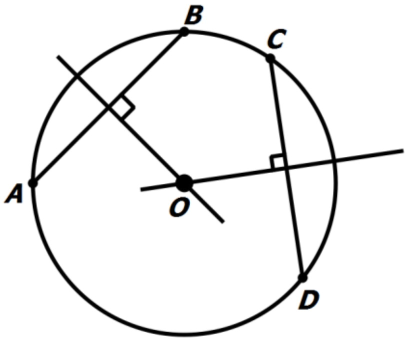
$$\widehat{A}_1 = \widehat{C}_1 \quad \Rightarrow \quad AB \parallel CD \ . \ \widehat{A}_2 = \widehat{C}_2 \quad \Rightarrow \quad BC \parallel AD$$



مثال:

میدان یک شهر به‌صورت دایره است. می‌خواهیم مرکز آن را یافته و در آن‌جا مجسمه‌ای قرار می‌دهیم. به کمک وسایل ترسیم و ترسیم‌های مقدماتی، مرکز این دایره را بیابید.

✍پاسخ:

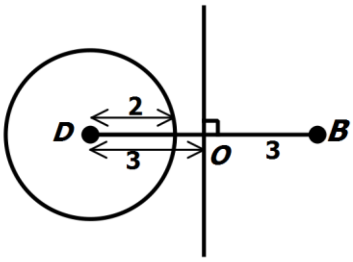


می‌دانیم که مرکزدایره روی عمودمنصف‌های وترهای آن قرار دارد. دو وتر دلخواه AB و CD را می‌کشیم و عمودمنصف‌های آن‌ها را رسم می‌کنیم، محل برخورد این عمودمنصف‌ها مرکز دایره را نشان می‌دهد.

مثال:

چند لوزی به طول ضلع 2 و قطر کوچک 6 می‌توان رسم کرد؟

✍پاسخ:

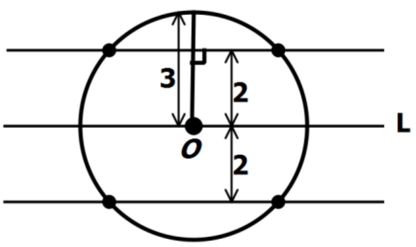


می‌دانیم که قطرهای لوزی عمودمنصف یکدیگرند، پس ابتدا پاره‌خطی به طول 6 می‌کشیم و عمودمنصف آن را رسم می‌کنیم. حالا دایره‌ای به مرکز D و شعاع 2 رسم میکنیم. محل برخورد این دایره با عمودمنصف BD جای دو رأس دیگر است. اما دقت کنید که دایره‌ای به شعاع 2 اصلاً نمی‌تواند این خط را قطع کند. پس با این اندازه‌ها لوزی قابل رسم نیست.

مثال:

نقطهٔ O روی خط L قرار دارد. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از نقطهٔ O به فاصلهٔ 3 و از خط L به فاصهٔ 2 باشند؟

✍پاسخ:



نقاطی که از نقطهٔ O به فاصلهٔ 3 هستند، دایره‌ای به مرکز O و شعاع 3 است و نقاطی که از خط L به فاصلهٔ 2 هستند، دو خط موازی خط L خواهند بود. نقاط تلاقی این دو خط و دایره، نقاط مورد نظر هستند.

درس دوّم: استدلال

در احکام و مسائل هندسی همواره به استدلالی نیاز است که درستی یا نادرستی هر یک را نشان می‌دهد.(اثبات کند) در اینگونه موارد، معمولاً به دو صورت با مسأله برخورد می‌شود.

استدلال استقرایی:

در این روش با چندین مشاهده، یک نتیجه‌گیری کلی انجام می‌دهیم. یعنی:

استدلال استقرایی رسیدن از جزء به کل است.

مثال:

یک انسان دورهٔ ماقبل تاریخ را در نظر بگیرید. او ممکن است بعد از کشف آتش، این تجربیات را داشته باشد:

- با حرارت دادن آب، ببینید پس از مدتی آب به بخار تبدیل می‌شود.
- با حرارت دادن یک تکه یخ، آن هم به بخار تبدیل شده است.

و به علت دانش و اطلاعات ناقص، نتیجه گرفته باشد که:

هر شیء با حرارت دیدن، بعد از مدتی به بخار تبدیل می‌شود.

می‌دانیم که این نتیجه برای تمام اشیاء صحیح نیست و در نتیجه استدلال استقرایی ممکن است نتایج نادرست حاصل کند.

استدلال استنتاجی:

برخورد صحیح با یک حکم این است:

- بر اساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایهٔ واقعیت‌هایی است که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم و به آن «استدلال استنتاجی» می‌گویند. بنابراین

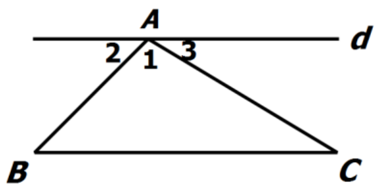
استدلال استنتاجی رسیدن از کل به جزء است.

مثال:

نشان دهید مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.

✍پاسخ:

مثلث ABC را در نظر بگیرید. از رأس A خطی موازی BC رسم کنید. داریم:

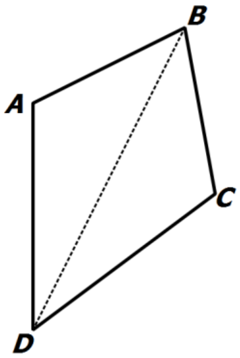


$$d \parallel BC \Rightarrow \begin{cases} \hat{B} = \hat{A}_2 \\ \hat{C} = \hat{A}_3 \end{cases} \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180^\circ$$

مثال:

نشان دهید مجموع زوایای داخلی هر چهارضلعی محدب 360° است.

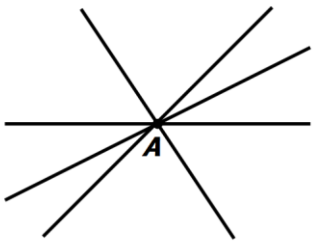
✍پاسخ:



می‌دانیم مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است. یک چهارضلعی دلخواه مانند $ABCD$ در نظر می‌گیریم و دو رأس مقابل آن را به هم وصل می‌کنیم. مجموع زوایای داخلی چهارضلعی $ABCD$ با مجموع زاویه‌های داخلی دو مثلث ABD و BCD برابر است.

بنابراین مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی $ABCD$ برابر است با 360°.

خطوط همرس:



چند خط که همگی در یک نقطه مانند A مشترک باشند را همرس گویند.

نقطهٔ A را نقطهٔ همرسی این خطها می‌نامیم.

مثال:

نشان دهید نیمسازهای زوایای داخلی هر مثلث همرس‌اند.

✍پاسخ:

مثلث دلخواه ABC را در نظر گرفته، نیمسازهای زوایای $\hat{A}$ و $\hat{B}$ را رسم کرده و نقطهٔ تقاطع آن‌ها را O می‌نامیم.
همچنین با رسم عمودهایی از O بر اضلاع، فاصلهٔ O تا سه ضلع به‌صورت OH، OK و OL مشخص می‌شوند.

اکنون توجه کنید:

- **چون O نیمساز زاویهٔ $\hat{A}$ است، طبق خاصیت نیمساز داریم:**

$$OK = OL$$

- چون O نیمساز زاویهٔ $\widehat{B}$ است، طبق خاصیت نیمساز داریم:

$$OH = OL$$

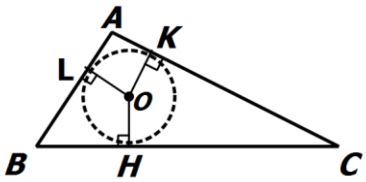
با مقایسهٔ دو تساوی فوق نتیجه می‌گیریم که: $OK = OH$. یعنی فاصلهٔ O تا دو ضلع زاویهٔ $\widehat{C}$ نیز با هم برابر است و در نتیجه:

نقطهٔ O روی نیمساز $\widehat{C}$ نیز قرار داشته و سه نیمساز در نقطهٔ O همرس هستند.

☑نتیجه:

با توجه به اثبات بالا، به دو مورد جالب دست می‌یابیم:

- نقطه‌ی همرسی سه نیمساز زوایای داخلی، نقطه‌ای چون O درون مثلث است با این خاصیت که:
  فاصله‌ی O تا سه ضلع مثلث با هم برابر است: $OH = OK = OL$.
- اگر دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی OH باز کرده و به مرکز O دایره‌ای رسم کنیم، این دایره از نقاط H ، K و L عبور خواهد کرد:



این دایره از داخل مثلث بر هر سه ضلع آن مماس است.

مثال:

نشان دهید عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث همرس‌اند.

✍پاسخ:

مثلث دلخواه ABC را در نظر گرفته، چون پاره‌خط‌های AB و AC متقاطع‌اند، عمودمنصف‌های آنها نیز در نقطه‌ای مانند O متقاطع‌اند.

- نقطهٔ O روی عمودمنصف پاره‌خط AC است، بنابراین $OA = OC$.
- نقطهٔ O روی عمودمنصف پاره‌خط AB است، بنابراین $OA = OB$.

در نتیجه $OB = OC$. بنابراین نقطهٔ O روی عمودمنصف BC قرار دارد. در نتیجه نقطهٔ O محل برخورد عمودمنصف اضلاع مثلث ABC است.

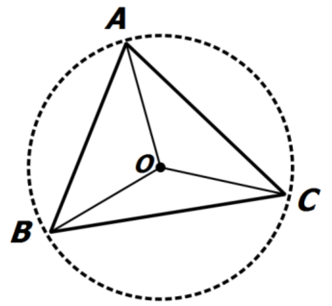
☑نتیجه:

با توجه به اثبات بالا، به دو مورد جالب دست می‌یابیم:

- نقطه‌ی همرسی سه عمودمنصف اضلاع مثلث، نقطه‌ای چون O درون مثلث است با این خاصیت که:

فاصله‌ی O تا سه رأس مثلث با هم برابر است: $OA = OB = OC$.

- اگر دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی OA باز کرده و به مرکز O دایره‌ای رسم کنیم، این دایره از هر سه رأس مثلث عبور خواهد کرد:



مثال:

نشان دهید ارتفاع‌های وارد بر اضلاع هر مثلث همرس‌اند.

پاسخ:

مثلث دلخواه ABC را در نظر گرفته و از هر رأس آن خطی به موازات ضلع مقابل به آن رأس رسم کنید تا مطابق شکل، مثلثی مانند DEF به وجود آید.

(۱) چهارضلعی $ABCF$ متوازی‌الاضلاع است، زیرا اضلاع مقابل در آن موازیند. بنابراین $BC = AF$.

(۲) چهارضلعی $ACBE$ متوازی‌الاضلاع است، زیرا اضلاع مقابل در آن موازیند. بنابراین $BC = AE$.

از (۱) و (۲) نتیجه میگیریم: $AF = AE$، بنابراین نقطهٔ A وسط پاره‌خط EF است.

$$\begin{cases} AG \perp BC \\ BC \parallel EF \end{cases} \Rightarrow \quad AG \perp EF$$

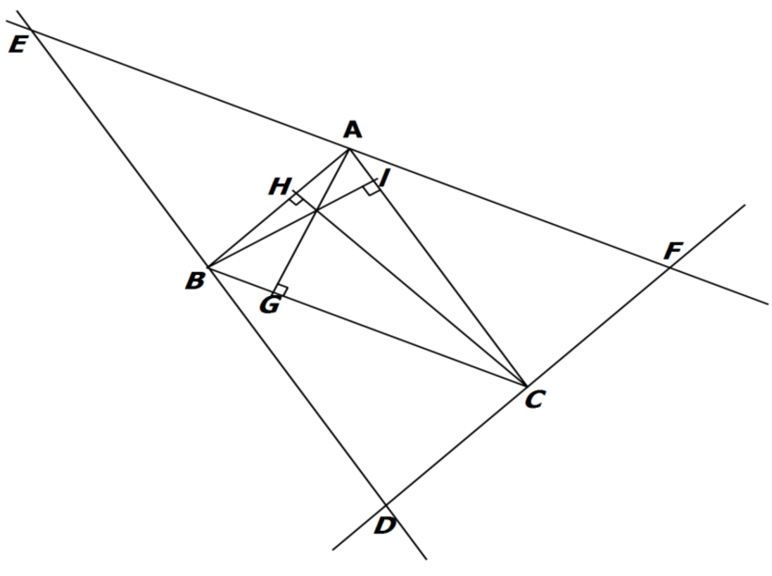
لذا خط AG عمودمنصف پاره‌خط EF است.

به‌طور مشابه می‌توان نشان داد:

پاره‌خط Bl ، عمودمنصف پاره‌خط DE است.

پاره‌خط CH ، عمودمنصف پاره‌خط DF است.

بنابراین، ارتفاع‌های مثلث ABC ، روی عمود منصف اضلاع مثلث DEF هستند و در نتیجه همرسند.

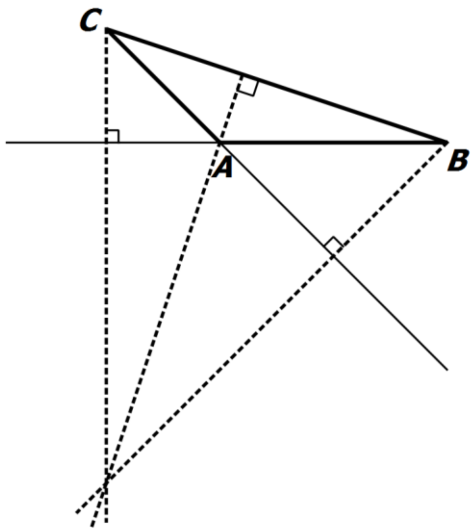


☑نتیجه:

بر خلاف نقطهٔ همرسی نیمسازهای مثلث که همیشه درون مثلث قراردارد، نقطهٔ همرسی ارتفاع‌ها و عمود منصف‌های اضلاع ممکن است بیرون مثلث قرار گیرند.

مثال:

در مثلث ABC ، دو ارتفاع بر امتداد ضلع مقابل BC عمود شده است. در نتیجه، نقطهٔ همرسی O در بیرون مثلث قرار گرفته است.



تمرین:

مثلث دلخواه ABC را با شرایط تند بودن زوایای داخلی رسم کرده و O را نقطهٔ همرسی ارتفاع‌های آن در نظر بگیرید. سپس نقطهٔ همرسی ارتفاع‌های مثلث OAC را مشخص کنید.

مثال نقض:

اگر یک حکم نادرست باشد، کافی است یک مثال بیاوریم که نادرست بودن آن را نشان دهد. به چنین مثالی «مثال نقض» گفته می‌شود.

مثال:

برای موارد زیر مثال نقض آورده و آن‌ها را رد کنید.

الف) اگر $x^2 > 4$ باشد، در این‌صورت $x > 2$ است.

ب) نقطهٔ همرسی ارتفاع‌های مثلث همیشه درون آن قرار می‌گیرد.

پاسخ:

الف) عدد $x = -3$ را در نظر بگیرید. مشاهده می‌کنید که $(-3)^2 = 9 > 4$ صحیح بوده ولی **3-** بزرگ‌تر از **2** نیست و نابراین حکم نادرست است.

ب) کافی است مثلثی با یک زاویه‌ی باز را به عنوان مثال نقض در نظر بگیرید. زیرا نقطهٔ همرسی ارتفاع‌ها خارج مثلث قرار می‌گیرد.

تمرین:

برای موارد زیر مثال نقض آورده و آن‌ها را رد کنید.

الف) همهٔ اعداد صحیح مثبت‌اند.

ب) هر چهار ضلعی که چهار ضلع برابر داشته باشد، مربع است.

پ) هر چهار ضلعی که دو ضلع موازی و دو ضلع برابر داشته باشد، متوازی‌الاضلاع است.

قضیه شرطی و دو شرطی:

گزاره:

در ریاضیات، به هر ادعا یا خبر که یا «دقیقاً درست» و یا «دقیقاً نادرست» است، یک «گزاره» گویند.

- اگر گزاره فقط شامل یک خبر باشد، به آن یک گزاره‌ی «ساده» گوئیم.

  نمونه: عبارت «عدد **7** سومین عدد اوّل است» یک گزاره‌ی ساده است.

- اگر گزاره شامل دو یا چند خبر باشد، به آن گزاره‌ی «مرکب» گویند.

نمونه: عبارت «عدد 7 چهارمین عدد اول و عدد $\sqrt{2}$ گنگ است» یک گزاره‌ی مرکب است.

تمرین:

کدام‌یک از موارد زیر یک گزاره است؟

الف) آیا فردا هوا بارانی است؟

ب) مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180 درجه است.

پ) کتابت را مطالعه کن.

ت) $2 < 3$.

در برخورد با یک گزاره، باید یکی از دو حالت زیر در نظر گرفته شود:

الف) اگر گزاره درست باشد، باید آن را با استدلال استنتاجی ثابت کنیم که به این استدلال، «برهان» هم گفته می‌شود.

نمونه: همرس بودن ارتفاع‌ها یا نیمسازهای زوایای داخلی مثلث.

توجه

در بین احکام درست، برخی از آن‌ها جایگاه خاصی دارند. در هندسه، گزاره‌هایی که کاربردهای زیادی داشته و برای آن‌ها برهان درستی آورده‌ایم، «قضیه» نامیده می‌شوند. بنابراین

قضیه: گزاره‌ی مهمی است که همیشه درست است.

ب) هرگاه گزاره نادرست باشد، باید برای آن‌ها مثال نقض ارائه دهیم.

قضیه و گزاره شرطی:

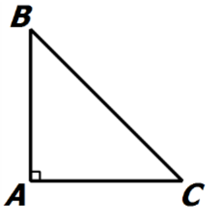
می‌توان یک گزاره را به‌صورت زیر بیان کرد که در این‌صورت به آن «گزاره شرطی» گویند.

اگر فرض، آن‌گاه حکم

اگر یک قضیه را به‌صورت شرطی بیان کنیم، به آن «قضیهٔ شرطی» گفته می‌شود.

مثال:

قضیه فیثاغورس

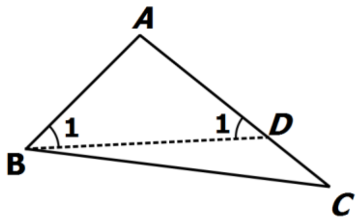


اگر مثلث ABC قائم‌الزاویه باشد، آن‌گاه $BC^2 = AB^2 + AC^2$ است.

قضیهٔ 6:

اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویهٔ روبه‌رو به ضلع بزرگتر، بزرگ‌تر است از زاویهٔ روبه‌رو به ضلع کوچکتر.

✍اثبات:



با توجه به شکل، حکم داده شده به صورت شرطی چنین است:

اگر در مثلث ABC، $AC > AB$ باشد، آن‌گاه $\hat{B} > \hat{C}$ است.

چون $AC > AB$ است، می‌توان نقطهٔ D را روی ضلع AC طوری انتخاب کرد که $AB = AD$ باشد.

- بنابر انتخاب نقطهٔ D ، مثلث ABD متساوی‌الساقین بوده و در نتیجه $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$ است. از طرفی زاویه‌ی $\hat{B}_1$ جزئی از زاویه‌ی اصلی $\hat{B}$ بوده و در نتیجه $\hat{B} > \hat{B}_1$ است. لذا:

$$\begin{cases} \hat{B} > \hat{B}_1 \\ \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \end{cases} \Rightarrow \quad \hat{B} > \hat{D}_1$$

- از طرف دیگر، زاویه‌ی $\hat{D}_1$ برای مثلث DBC یک زاویه‌ی خارجی بوده و از زاویه‌ی غیر مجاور خود، یعنی $\hat{C}$ بزرگ‌تر است. بنابراین:

$$\begin{cases} \hat{B} > \hat{D}_1 \\ \hat{D}_1 > \hat{C} \end{cases} \Rightarrow \quad \hat{B} > \hat{C}$$

نقیض گزاره:

هر گاه در یک گزاره، خبر (حکم) آن را کاملاً برعکس کنیم، نقیض آن به‌دست می‌آید.

می‌توانید برای نقیض کردن گزاره، عبارت «چنین نیست که» را به ابتدای آن اضافه کنید.

مثال:

نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) امروز هوا گرم است.

ب) a از b بزرگتر است.

ج) مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.

پاسخ:

الف) چنین نیست که امروز هوا گرم است. (امروز هوا گرم نیست.)

ب) چنین نیست که a از b بزرگتر باشد. (a از b بزرگتر نیست).

که معادل است با « a از b کوچکتر و یا با b برابر است»

ج) چنین نیست که مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° باشد.

که معادل است با « مثلثی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن 180° نیست»

برهان خلف:

گاهی ارائه استدلال استنتاجی به‌صورت عادی مشکل یا غیرممکن است. در چنین صورتی، معمولاً روش اثبات غیرمستقیم به‌صورت زیر، کمک بسیار زیادی می‌کند.

برای استفاده از این روش، طبق گام‌های زیر عمل می‌کنیم:

- حکم مورد نظر را نادرست در نظر می‌گیریم. یعنی: فرض می‌کنیم نقیض آن درست باشد. به این فرض جدید، «فرض خلف» هم می‌گویند.
- با توجه به فرض مرحله‌ی قبل و آوردن دلیل مناسب، به یک تناقض با فرض آن قضیه یا مسأله می‌رسیم.
- نتیجه می‌گیریم: حکم آن مسأله نمی‌تواند نادرست باشد و از ابتدا صحیح بوده است.

مثال:

از یک نقطهٔ غیر واقع بر خط نمی‌توان بیش از یک عمود بر آن خط رسم کرد.

پاسخ:

فرض: نقطه‌ای مانند A غیر واقع بر خطی مانند d وجود دارد.

حکم: از نقطهٔ A نمی‌توان بیش از یک عمود بر خط d رسم کرد.

استدلال: با برهان خلف (برهان غیرمستقیم) فرض می‌کنیم حکم غلط باشد. یعنی فرض می‌کنیم از نقطهٔ A دو عمود بر خط d رسم کرده‌ایم که مانند شکل، خط d را در نقاط B و C قطع کرده‌اند. در این‌صورت مجموع زوایای

داخلی مثلث ABC بزرگ‌تر از 180° خواهد شد و این غیر ممکن است. پس امکان رسم دو عمود از یک نقطهٔ غیر واقع بر یک خط وجود ندارد. یعنی حکم نمی‌تواند غلط باشد.

تمرین:

نشان دهید هر مثلث حداکثر یک زاویه‌ی باز دارد.

عکس قضیهٔ شرطی:

برای نوشتن عکس یک قضیهٔ شرطی، جای فرض و حکم را عوض می‌کنیم.

توجه کنید:

«عکس یک قضیهٔ شرطی ممکن است یک قضیه نباشد، یعنی ممکن است حکمی نادرست شود.»

مثال:

الف) حکم زیر را به‌صورت شرطی نوشته و تعیین کنید درست است یا نادرست؟

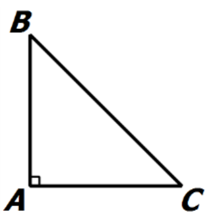
« در مثلث قائم‌الزاویه، وتر بزرگ‌ترین ضلع است»

ب) عکس حکم فوق را نوشته و مشخص کنید درست است یا نادرت است؟

✍پاسخ:

الف) بیان شرطی حکم با استفاده از شکل چنین است:

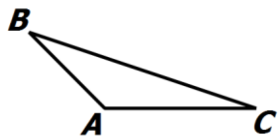
« اگر مثلث ABC قائم‌الزاویه باشد $\widehat{A} = 90^\circ$، آن‌گاه وتر BC از دو ضلع AB و AC بزرگ‌تر است.»



ب) عکس گزاره :

« اگر در مثلث ABC ضلع BC از AB و AC بزرگ‌تر باشد، آن‌گاه مثلث ABC قائم‌الزاویه است.»

این گزاره نادرست است و می‌توانیم برای آن مثال نقض بیاوریم:



مثال:

عکس قضیهٔ زیر را بنویسید.

«اگر در یک چهار ضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه قطرهایش یکدیگر را نصف می‌کنند.»

✍پاسخ:

اگر در یک چهارضلعی قطرها یکدیگر ران صنف کنند، آن‌گاه آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

تمرین:

عکس قضیهٔ زیر را بنویسید.

«اگر دو ضلع از یک مثلث با هم برابر باشند، آن‌گاه ارتفاع‌های وارد بر آن دو ضلع نیز با هم برابرند.»

قضیهٔ دو شرطی:

هرگاه عکس یک قضیهٔ شرطی همواره درست باشد، آن قضیه را می‌توان به صورت دو شرطی بیان کرد.

فرض اگر و فقط اگر حکم

مثال:

قضیهٔ فیثاغورس را به‌صورت یک قضیهٔ دو شرطی بیان بنویسید.

✍پاسخ:

مثلث ABC قائم‌الزاویه است اگر و فقط اگر $BC^2 = AB^2 + AC^2$.