





مشتق تابع در یک نقطه: فرض کنید تابع  $f(x)$  در یک همسایگی نقطه‌ی  $a$  تعریف شده باشد. اگر  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  موجود باشد، یعنی عدد شود اصطلاحاً می‌گوییم تابع  $f(x)$  در  $x = a$  مشتق پذیر است و مقدار آن را با نماد  $f'(a)$  نمایش می‌دهیم.

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

تعریف دیگری که با تعریف فوق هم‌ارز است به صورت زیر است:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

تذکره: اگر این هر عدد یکتایی نشود و یا وجود نداشته باشد، تابع  $f(x)$  در نقطه‌ی  $x = a$  مشتق ناپذیر است.

برای محاسبه مشتق تابع در یک نقطه از یکی از روش‌های زیر استفاده می‌شود.

$$۱) f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$۲) f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

در روش اول به شکل زیر عمل می‌کنیم:

۱. محاسبه  $f(a)$ ، ۲. تعیین  $f(x) - f(a)$ ، ۳. تشکیل و ساده کردن  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ ، ۴. محاسبه  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  که دارای ابعاد  $\frac{\cdot}{\cdot}$  است و روش‌های رفع ابهام آن را در هر دیریم.

در روش دوم به شکل زیر عمل می‌کنیم:

۱. محاسبه  $f(a)$ ، ۲. تعیین  $f(a+h)$ ، ۳. محاسبه  $f(a+h) - f(a)$ ، ۴. محاسبه  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  که دارای ابعاد  $\frac{\cdot}{\cdot}$  است.

۸۶) با استفاده از تعریف مشتق، مشتق پذیری تابع  $f(x) = x|x-2|$  را در نقطه  $x=2$  مورد بررسی قرار دهید. (شهریور ۹۴)

پاسخ:

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x|x-2| - 0}{x - 2} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x(x-2)}{x-2} = 2 = f'(2^+) \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x(x-2)}{x-2} = -2 = f'(2^-) \end{cases}$$

تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست. زیرا مشتق چپ و راست آن با هم برابر نیست.

۸۷) با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع  $f(x) = x^2 + 1$  را در نقطه‌ی  $x = a$  محاسبه کنید. (خرداد ۹۴)

پاسخ:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^2 + 1 - a^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 + 1 - a^2 - 1}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2ah + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2a + h = 2a$$

۸۸) با استفاده از تعریف، مشتق تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  را در نقطه  $x=1$  بررسی کنید.

پاسخ:

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{x} = -1$$

برای دریافت نمونه سوالات و جزوات رایگان بیشتر کلیک کنید

۸۹) مشتق پذیری تابع  $f(x) = |x^2 - 1|$  را در نقاط  $x = 1$  بررسی کنید.

پاسخ:

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - 1| - 0}{x - 1} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2 = f'_+(1) \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)(x+1)}{x-1} = -2 = f'_-(1) \end{cases}$$

تابع در این نقطه مشتق ناپذیر است.

۹۰) مشتق تابع  $f(x) = x^2 + 3x$  را در نقطه‌ی  $x = 1$  با استفاده از تعریف مشتق بیابید.

پاسخ:

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} x + 4 = 5$$

راه اول)

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 + 3(1+h) - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h^2 + 2h) + (3+3h) - 4}{h}$$

راه دوم)

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 6h + 3h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h^2 + 3h + 6)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h^2 + 3h + 6) = 6$$

(هماهنگ کشوری ۸۸)

۹۱) با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع  $f(x) = \sqrt{4-x}$  را به دست آورید.

پاسخ:

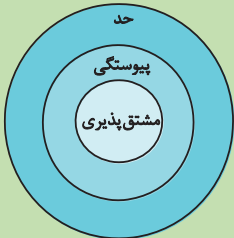
گویا کردن

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-(x+h)} - \sqrt{4-x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-(x+h)} - \sqrt{4-x}}{h} \times \frac{\sqrt{4-(x+h)} + \sqrt{4-x}}{\sqrt{4-(x+h)} + \sqrt{4-x}} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 - (x+h) - 4 + x}{h(\sqrt{4-(x+h)} + \sqrt{4-x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h(\sqrt{4-(x+h)} + \sqrt{4-x})} = \frac{-1}{2\sqrt{4-x}}$$

مشتق راست: در تابع  $y = f(x)$  اگر  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  موجود باشد (عدد شود) این حد را مشتق راست تابع  $f(x)$  در  $x = a$  نامیده و با نماد  $f'_+(a)$  نشان می‌دهند.

مشتق چپ: در تابع  $y = f(x)$  اگر  $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  موجود باشد (عدد شود) این حد را مشتق چپ تابع  $f(x)$  در  $x = a$  نامیده و با نماد  $f'_-(a)$  نشان می‌دهند.



هر تابع مشتق پذیر، پیوسته است ولی هر تابع پیوسته‌ای مشتق پذیر نیست.

عملاً پیوستگی شرط لازم مشتق پذیری است ولی کافی نیست.

یعنی توابعی وجود دارند که پیوسته‌اند ولی مشتق پذیر نیستند.



اگر تابعی در  $x = a$  فقط پیوستگی راست داشته باشد در آن نقطه مشتق چپ ندارد و مشتق راست نیز باید بررسی شود و همچنین اگر تابعی فقط پیوستگی چپ داشته باشد در آن نقطه مشتق راست ندارد و مشتق چپ آن باید بررسی شود.



برای حل مسائل مربوط به مشتق پذیری در یک نقطه به روش زیر عمل کنید:  
 (۱) پیوستگی تابع در  $x = a$  را بررسی کنید. یعنی باید  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  اگر یکی از پیوستگی‌ها برقرار نبود مشتق آن نیز وجود ندارد. (عدم وجود مشتق را بیان کنید. به خصوص در توابع قدرمطلق، پند ضابطه‌ای و برآکتی)

(۲) مشتق چپ و راست را از راه تعریف بررسی می‌کنیم. اگر داشته باشیم:  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$  عدد  $f'(a)$  را می‌گوییم تابع در  $x = a$  مشتق پذیر است.

(۹۲) با استفاده از تعریف مشتق، مشتق‌های چپ و راست تابع  $f(x) = |x - 2|$  را در  $x = 2$  در صورت وجود بیابید. (خرداد ۹۲)  
 پاسخ: تابع در  $x = 2$  مشتق پذیر نیست.

بررسی پیوستگی

$$\lim_{x \rightarrow 2} |x - 2| = 0 = f(2) \Rightarrow f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2| - 0}{x - 2} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2}{x - 2} = 1 = f'_+(2) \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x - 2)}{x - 2} = -1 = f'_-(2) \end{cases}$$

(۹۳) در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید:

الف) دامنه‌ی مشتق پذیری تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  برابر است با .....

ب) شیب خط مماس بر نمودار تابع  $g(x) = \frac{1}{x}$  در  $x = 1$  برابر است با .....

پاسخ:

الف)  $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow D_f = [0, +\infty)$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow D_{f'} = (0, +\infty)$

ب)  $g'(x) = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow m = g'(1) = -1$

پاسخ نهایی

پاسخ نهایی

(۹۴) پاسخ هر عبارت ستون A را از بین گزینه‌های ستون B انتخاب کنید.

ستون B	
الف) ۱	د) صفر
ب) $(\frac{1}{4}, +\infty)$	ه) ۴
ج) وجود ندارد	و) $(-\infty, \frac{1}{4})$

ستون A
۱) دامنه‌ی مشتق پذیری تابع $y = \sqrt{1 - 2x}$ کدام است؟
۲) مشتق چپ تابع $y = [2x]$ در نقطه‌ی $x = 1$ کدام است؟
۳) در تابع $y =  2 - x $ حاصل $f'_+(2) + f'_-(2)$ کدام است؟

پاسخ:

۱) گزینه‌ی «و» صحیح است.

$1 - 2x \geq 0 \Rightarrow D_f = (-\infty, \frac{1}{2}] \Rightarrow f'(x) = \frac{-2}{2\sqrt{1 - 2x}} \Rightarrow D_{f'} = (-\infty, \frac{1}{4})$

۲)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} [2x] = [2^-] = 1 \neq f(1) = 2$

گزینه‌ی «ج» صحیح است. تابع در  $x = 1$  پیوستگی چپ ندارد، بنابراین مشتق چپ آن وجود ندارد.

۳)  $f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|2 - x| - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2|}{x - 2} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2}{x - 2} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x - 2|}{x - 2} = -1 \end{cases} \Rightarrow f'_+(2) + f'_-(2) = 0$  گزینه‌ی «د» صحیح است.

روش‌های محاسبه‌ی مشتق توابع:



$$f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$$

مشتق تابع ثابت صفره

$$f(x) = \sin^r x + \cos^r x \Rightarrow f'(x) = (1)' = 0$$

$$f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = nax^{n-1}$$

$$f(x) = au^n \Rightarrow f'(x) = anu^{n-1}u'$$

$$f(x) = \sqrt[r]{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{r}x^{\frac{1}{r}-1}$$

$$h(x) = f(x) \pm g(x) \Rightarrow h'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

$$h(x) = f(x) \times g(x) \Rightarrow h'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

مومنز

$$f(x) = (2x^r + 3x - 1)(4x^r + 2x^r + 3) \Rightarrow f'(x) = (4x + 3)(4x^r + 2x^r + 3) + (12x^r + 4x)(2x^r + 3x - 1)$$

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

موم

$$h(x) = \frac{x^r + 1}{x - 1} \Rightarrow h'(x) = \frac{rx(x-1) - (1)(x^r + 1)}{(x-1)^2}$$

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \Rightarrow f'(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$$

$$f(x) = \frac{au + b}{cu + d} \Rightarrow f'(x) = \frac{ad - bc}{(cu + d)^2} u'$$

$$f(x) = \sqrt[n]{u^m} \Rightarrow f'(x) = \frac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$$

$$y = (\text{عبارت های جبری})^n \rightarrow y' = n \times (\text{مشتق عبارت جبری}) \times (\text{عبارت های جبری})^{n-1}$$



۹۵) مشتق بگیرد.

$$۱) f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}(1)x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

عبارت کسری با یک توان کمتر

مشتق عبارت کسری

توان

$$۲) f(x) = \left(\frac{2x+1}{x-2}\right)^r \Rightarrow f'(x) = (r) \left(\frac{2(x-2) - (1)(2x+1)}{(x-2)^2}\right) \left(\frac{2x+1}{x-2}\right)^{r-1}$$

$$۳) f(x) = \frac{(3x^r - 1)^r}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{r(6x)(3x^r - 1)^{r-1}(x+1) - (3x^r - 1)^r(1)}{(x+1)^2}$$

$$۴) y = \sqrt{x}(2x-1)^5 \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(2x-1)^5 + 5(2)(2x-1)^4 \sqrt{x}$$

$$۵) y = \frac{x^r - 1}{(3x+5)^r} \Rightarrow y' = \frac{rx(3x+5)^r + r(3x+5)(x^r - 1)}{(3x+5)^{2r}}$$

۹۶) مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).

$$۱) f(x) = \left(\frac{2x+1}{x}\right)^{\Delta} \quad ۲) g(x) = (\sqrt{\Delta - 7x})\left(4 - \frac{x}{3}\right)$$

پاسخ:

$$۱) y' = \Delta \left(\frac{2(x) - (1)(2x+1)}{x^2}\right) \left(\frac{2x+1}{x}\right)^{\Delta-1}$$

$$۲) y' = \frac{-7}{2\sqrt{\Delta - 7x}} \left(4 - \frac{x}{3}\right) - \frac{1}{3}(\sqrt{\Delta - 7x})$$

مشتق توابع مرکب

فرض کنیم تابع  $g(x)$  در نقطه‌ی  $x=a$  مشتق پذیر و تابع  $f(x)$  در  $g(a)$  مشتق پذیر باشد. آن‌گاه تابع  $h(x) = f(g(x))$  در  $x=a$  مشتق پذیر است و داریم:

$$h(x) = f(g(x)) \Rightarrow h'(a) = g'(a)f'(g(a))$$

$$(f(u))' = u'f'(u) \quad , \quad ((u)^m)' = m(u')(u)^{m-1}$$

۹۷) اگر  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2-h) - f(2)}{h} = \frac{-2}{3}$  باشد، مشتق تابع  $f(\sqrt{x-1})$  در  $x=5$  را به دست آورید.

پاسخ:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h) - f(2)}{h} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h) - f(2)}{-h} = -f'(2) = \frac{-2}{3} \Rightarrow f'(2) = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow (f(\sqrt{x-1}))' = \left(\frac{1}{2\sqrt{x-1}} f'(\sqrt{x-1})\right)_{x=5} = \frac{1}{2} f'(2) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6}$$

۹۸) اگر  $f'(x) = \frac{1}{2x^2 + 3}$  باشد، آن‌گاه مشتق تابع  $f\left(\frac{1}{x}\right)$  را در  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  به دست آورید.

پاسخ:

$$\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = \frac{-1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)_{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \left(\frac{-1}{x^2}\right) \times \left(\frac{1}{2\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 3}\right)_{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -2 \times \frac{1}{2 \times (2) + 3} = \frac{-2}{7}$$

۹۹) اگر  $f'(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  باشد، مشتق تابع  $y = f(\Delta x^2 - x)$  را نسبت به  $x$  تعیین کنید. (هماهنگ کشوری ۸۵)

پاسخ:

$$y = f(\Delta x^2 - x) \Rightarrow y' = (\Delta x^2 - x)' f'(\Delta x^2 - x) \Rightarrow y' = (1 \cdot 2x - 1) f'(\Delta x^2 - x) = (1 \cdot 2x - 1) \sqrt{(\Delta x^2 - x)^2 + 1}$$

۱۰۰) مشتق  $f(\sqrt[3]{6x+2})$  در نقطه‌ی  $x=1$  برابر  $-2$  است. مشتق تابع  $f$  در نقطه‌ای به طول  $2$  کدام است؟

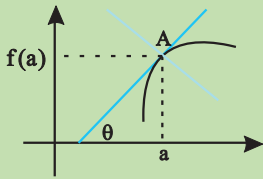
$$\sqrt[3]{6x+2} = 2 \Rightarrow x=1 \quad \text{پاسخ:}$$

$$\sqrt[3]{6x+2} = 2 \Rightarrow x=1 \Rightarrow (f(\sqrt[3]{6x+2}))'_{x=1} = \left(\frac{6}{3\sqrt[3]{(6x+2)^2}} f'(\sqrt[3]{6x+2})\right)_{x=1} = \frac{6}{12} f'(2) = -2 \Rightarrow f'(2) = -4$$

برای دریافت نمونه سوالات و جزوات رایگان بیشتر کلیک کنید



شیب خط مماس بر منحنی و معادله‌ی خط مماس و قائم در نقطه‌ای روی منحنی:



اگر خط  $L$  در نقطه‌ای به طول  $a$  واقع بر منحنی نمایش تابع  $y = f(x)$  مماس باشد، شیب خط مماس از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$m = \tan \theta = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \quad \text{شیب خط مماس در نقطه‌ی } A$$



(۱) اول مفصلیات نقطه‌ای که می‌فواهیم مماس یا قائم در آن را بنویسیم معلوم کنید.

(۲) از تابع  $f(x)$  مشتق بگیریم و  $f'(a)$  را تعیین کنید این همان شیب خط مماس است.  $m = f'(a)$  و

$m' = \frac{-1}{f'(a)}$  شیب خط قائم است. (بعضی وقتا این مشتق رو از راه تعریف می‌فوان)

(۳) معادله‌ی خط مماس و معادله‌ی خط قائم به شکل زیر نوشته می‌شوند:

$$L: \quad y - f(a) = f'(a)(x - a) \quad \text{خط مماس} \quad L': \quad y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x - a) \quad \text{خط قائم}$$

(۱۰۱) با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع  $y = x^2 - 1$  را در نقطه‌ای به طول ۱ محاسبه نماید. سپس به کمک آن معادله‌ی خط مماس بر منحنی این تابع را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر منحنی تابع بنویسید. (شهریور ۹۴ خارج کشور)

پاسخ:

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 - (1 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

$$A \left| \begin{matrix} a \\ f(a) \end{matrix} \right. \begin{matrix} 2 \\ (2)^2 - 1 = 3 \end{matrix} \Rightarrow L: \quad y - 3 = 2(x - 2)$$

(۱۰۲) معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع  $y = \frac{x}{x - 2}$  را در نقطه‌ی  $A(3, 3)$  به دست آورید. (خرداد ۹۲)

$$y' = \frac{-2}{(x - 2)^2} \Rightarrow m = y'(3) = -2 \Rightarrow y - 3 = -2(x - 3) \quad \text{پاسخ:}$$

(۱۰۳) با استفاده از تعریف، مشتق تابع  $f(x) = x^2$  را در نقطه دلخواه  $a$  حساب کنید. سپس معادله خط قائم بر نمودار تابع را در نقطه  $A(1, 1)$  به دست آورید. پاسخ:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x^2 + ax + a^2)}{x - a} = 3a^2$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f'(1) = 2(1) = 2 = m \Rightarrow m' = \frac{-1}{2} \Rightarrow L: y - 1 = \frac{-1}{2}(x - 1) \quad \text{خط قائم}$$

(۱۰۴) معادله‌ی خط مماس بر تابع  $f(x) = \sqrt{x - 1}$  در نقطه‌ی  $x = 1$  را بنویسید.

پاسخ:

$$f(x) = \sqrt{x - 1} \Rightarrow f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x - 1} - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{(x - 1)^2}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

بنابراین خط مماس بر تابع در  $x = 1$  خطی موازی محور  $y$  هاست و معادله‌ی آن همان طول نقطه است.

$$L: \quad x = 1$$



شیب خط مماس بر تابع، تغییر آهنگ یا تغییر آنی، تغییرات لحظه‌ای، همگی یعنی مشتق تابع در نقطه‌ی داده شده

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = m = A(a, f(a)) \quad \text{تغییر آهنگ} = \text{شیب خط مماس در نقطه‌ی}$$

۱۰۵) تابع  $f(x) = x^2 + 5x + 4$  با ضابطه‌ی داده شده است.

الف) دستور کلی آهنگ متوسط تغییر این تابع را نسبت به متغیر  $x$  تعیین کنید.

ب) آهنگ متوسط تغییر این تابع را وقتی  $x = 3$  و  $\Delta x = 0.4$  را به دست آورید.

ج) آهنگ آنی را در  $x = 3$  به دست آورید.

☑ پاسخ:

$$\text{الف) } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^2 + 5(x + \Delta x) + 4 - (x^2 + 5x + 4)}{\Delta x}$$

$$\text{ب) } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(3 + 0.4)^2 + 5(3 + 0.4) + 4 - ((3)^2 + 5(3) + 4)}{0.4} = \frac{17.2 + 0.16 + 2}{0.4} = \frac{37.36}{0.4}$$

$$\text{ج) } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) \Rightarrow f'(3) = (x^2 + 5x + 4)'_x = (2x + 5)_x = 11$$

۱۰۶) اگر  $f(t) = t^2 + 3t$  نمایش جمعیت یک نوع باکتری در زمان  $t$  باشد، نسبت آهنگ متوسط تغییر  $f$  در بازه‌ی زمانی  $1 \leq t \leq 1/2$  به آهنگ لحظه‌ای تغییر  $f$  در  $t = 1$  کدام است؟

$$\frac{f(1/2) - f(1)}{1/2 - 1} = \frac{((1/2)^2 + 3(1/2)) - (1 + 3)}{0.5 - 1} = \frac{1.25 - 4}{-0.5} = \frac{2.75}{0.5} = 5.5$$

$$f'(1) = (2t + 3)_{t=1} = 5 \Rightarrow \frac{5.5}{5} = 1.1$$

۱۰۷) در چه نقطه‌ای از بازه  $[9, 25]$  آهنگ لحظه‌ای  $f(x) = \sqrt{x}$  با آهنگ متوسط آن برابر است؟

$$\frac{f(25) - f(9)}{25 - 9} = \frac{\sqrt{25} - \sqrt{9}}{16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{1}{8} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \sqrt{x} = 4 \Rightarrow x = 16$$

۱۰۸) گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظه  $t = 0$  سوراخی در ظرف ایجاد میشود اگر حجم مایع باقی مانده در ظرف پس از  $t$  ثانیه از رابطه‌ی

$$V(t) = 40 \left( 1 - \frac{t}{100} \right)^2 \quad \text{به دست می‌آید در چه زمانی آهنگ تغییر لحظه‌ای برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه  $[0, 100]$  می‌شود؟}$$

$$\frac{V(100) - V(0)}{100 - 0} = \frac{0 - 40}{100} = -\frac{4}{10}, \quad V'(t) = 80 \left( \frac{-1}{100} \right) \left( 1 - \frac{t}{100} \right) = \frac{-80}{100} \left( 1 - \frac{t}{100} \right) = -\frac{4}{10}$$

$$2 - \frac{t}{50} = 1 \Rightarrow t = 50$$

مالا آهنگ تغییر رو مساوی تغییرات متوسط قرار می‌دیم

برای دریافت نمونه سوالات و جزوات رایگان بیشتر کلیک کنید