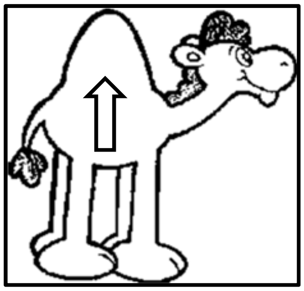
کنکور آسان است

KONKURSARA

معادله ی درجه دوم و روش های مختلف حل آن

درس اول



۱ معادله ی درجه دوم چیست؟

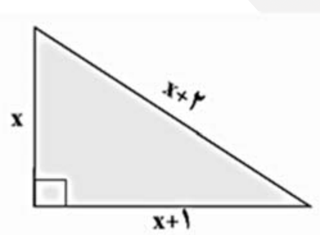
فرض کنید آرتین دنبال عددی است که وقتی با مربعش جمع می شود حاصل برابر عدد شش شود. در مورد یافتن چنین عددی به او چه پیشنهادی دارید؟ (با روش های آزمون و خطا به چه نتیجه ای می رسید)

حال بیایید همین مساله را به کمک تشکیل یک معادله حل کنیم ، فرض کنید که عدد مورد نظر x باشد پس معادله به صورت .... خواهد بود. این معادله را به صورت ساده تر نوشته و کل جملات آن را به یک طرف معادله انتقال می دهیم پس داریم :

هر معادله به این صورت را که پس از ساده شدن، بزرگ ترین توان متغیر آن ۲ باشد، **معادله ی درجه ی دوم** می نامیم.

در ادامه بیایید مساله را به کمک تجزیه که قبلا با آن آشنا شده اید حل کنیم و جواب های قبلی شما را با این جواب ها مورد مقایسه قرار دهیم :

اکنون چالش دیگری مطرح کنیم و آن را باز به کمک معادله ی درجه دوم حل نماییم : رامتین با یک مساله ی هندسی رو به روست طوری که مطابق شکل مثلث قایم الزاویه ای در اختیار او قرار داده اند و از او خواسته اند که مقدار x را بیابد .شما عزیزان به او در حل این مساله کمک کنید و با راهکار های پیشنهادی او را یاری دهید.



دبیر ریاضی : عادل آخکندی

درس اول : معادله ی درجه دوم

نتیجه : به طور کلی هر معادله به فرم $ax^۲ + bx + c = ۰$ با شرط $a \neq ۰$ را معادله درجه دو می نامیم . که در آن a, b, c ضرایب نام دارند.

یاد آوری :

سوال : تجزیه ی یک چند جمله ای را تعریف کنید : می دانیم تجزیه ی یک عبارت تبدیل آن به حاصل ضرب حداقل دو عبارت است . به عنوان مثال همان طور که قبلا تجزیه را انجام داده اید :

$$x^۲ + ۲x - ۳ = (x + ۳)(x - ۱)$$

از جمله تجزیه هایی که در حل معادله ی درجه ی دوم مورد استفاده قرار می گیرند عبارتند از :

۱) فاکتورگیری : $۴x^۲ + ۱۶x = ۰$

۲) تجزیه به کمک اتحاد مزدوج : $x^۲ - ۶۴ = ۰$

۳) تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک : $x^۲ + ۶x - ۷ = ۰$

ویژگی حاصل ضرب صفر :

اگر A و B دو عبارت جبری باشند و $AB=۰$، آنگاه حداقل یکی از این دو عبارت صفر است؛ یعنی :

$AB=۰ \Rightarrow A=۰$ یا $B=۰$

به عنوان مثال :

$x^۲ + ۵x + ۶ = ۰ \rightarrow (x + \cdots)(x + \cdots) = ۰ \rightarrow x = \cdots$ یا $x = \cdots$

تمرین : معادله ی $x^۲ - ۲x - ۳ = ۰$ را در صورت امکان حل نمایید .

۱.۱ حل معادله ی درجه دوم به روش تجزیه :

اگر در معادله ی درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ داشــته باشــیم $c = ۰$ با یک فاکتورگیری ســاده معادله حل می شود . به مثال های زیر دقت کنید :

۱) $۳x^۲ + ۱۲x = ۰$

۲) $۳t^۲ - t = ۰$

۳) $۵t^۲ = ۲۰$

سوال : از آرتین پرســیده شــد که آیا جواب هایی که در حل معادلات بالا بدســت آمده صــحیح اند اما او پاســخی نداشت حال شما چه راهکاری را به او پیشنهاد دهید تا از صحت جواب های خود مطمین شود؟

چنانچه هیچ یک از ضرائب صفر نباشد به کمک تجزیه کردن سه جمله ای می توان معادله را حل کرد . حتی در صورتی که ضرایب نیز بجز a صفر باشند باز به کمک تجزیه ها در صورت امکان می توان معادله را حل کرد . البته فراموش نکنید که هر معادله ای قابل تجزیه نیست.

سوال : معادلات درجه دوم زیر را در صورت امکان به کمک تجزیه حل نموده و جواب های خود را آزمایش کنید.

۱) $۹x^۲ - ۲۵ = ۰$

۲) $۴x^۲ + ۱۶x = ۰$

۳) $x^۲ + ۱۱x + ۳۰ = ۰$

۴) $\frac{-۱}{۲}x = \frac{۸}{۳}x^۲$

۵) $x^۲ - ۳x = ۱۰$

۶) $۵a^۲ - ۷a = ۲a(a - ۳)$

۷) $۹ - ۶z + z^۲ = ۰$

۸) $x^۳ + x^۲ = ۵۶x$

* ۹) $۴a^۲ + ۳a = ۱$

* ۱۰) $۴a^۲ + ۳ = ۰$

فراموش نکنید که: جواب های یک معادله ی درجه دوم را ریشه های آن معادله نیز می نامند.

۲.۱ حل معادله ی درجه دوم به کمک ریشه گیری :

اگر در معادله ی درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ دا شته با شیم $ac < ۰$ و $b = ۰$ با یک ریشه گیری معادله حل می شود . به مثال ها دقت کنید :

۱) $x^۲ = ۲۵$

۲) $۵x^۲ = ۲۰$

اگر a یک عدد حقیقی نامنفی(بزرگتر یا مساوی صفر) باشد، ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲=a$ عبارت‌اند از :

$x=\sqrt{a}$ و $x=-\sqrt{a}$

نتیجه : اگر در معادله ی درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ و $b = ۰$ و اعداد a, c مختلف العلامت باشـــند برای یافتن ریشه های معادله می توان از روش زیر استفاده کرد :

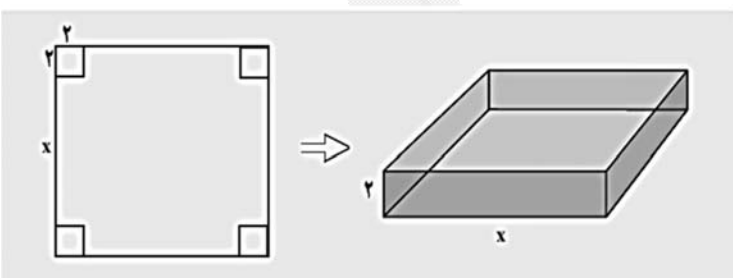
$$ax^۲ + c = ۰ \Rightarrow ax^۲ = -c \Rightarrow x^۲ = \frac{-c}{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

سوال : معادلات درجه ی دوم زیر را در صورت امکان به کمک ریشه گیری حل کنید .

۱) $۴t^۲ - ۱۶ = ۰$ ۲) $x^۲ - ۱۲ = ۴$ ۳) $x^۲ + ۵ = ۰$ ۴) $(r - ۲)^۲ = ۱۶$

تمرین در منزل: معادله درجه ی دوم $۳ - ۳k = ۳k(۲k - ۱)$ را به کمک ریشه گیری حل کنید .

سوال : تارا برای ساخت کاردستی با این مساله رو به رو است که با یک دستگاه برش، یک صفحه ی مقوایی به شکل مربع را برش می زند .سپس، چهار مربع کوچک در گوشه های آن را جدا می کند .بعد با تا زدن لبه ها، یک جعبه می سازد .اگر مربع های جداشده به ضلع ۲ سانتی متر باشند و بخواهد حجم این جعبه ۲۰۰ سانتی متر مکعب باشد، طول اضلاع کاغذهایی را که باید برای این کار انتخاب کند ، به دست آورید.



۳.۱ حل معادله ی درجه دوم به روش مربع کامل کردن :

در روش مربع کامل کردن ابتدا ضریب متغیر که معمولا x یا هر چیز دیگری است را نصف می کنیم، سپس به کمک آن و متغیر اتحاد مربع دوجمله ای می سازیم، مربع نصف ضریب متغیر را همواره از اتحاد کم می کنیم و در نهایت در صورت وجود ، جمله فاقد متغیر را به عبارت می افزاییم. به مثال های زیر دقت کنید :

$$x^{۲} + bx + c = \left(x + \frac{b}{۲}\right)^{۲} - \left(\frac{b}{۲}\right)^{۲} + c$$

۱) $x^{۲} - ۶x + ۴ = ۰$

۲) $x^{۲} + x - ۴ = ۰$

نکته : در صورتی که ضریب جمله ی درجه دوم ، مخالف عدد یک باشد ابتدا کل جملات را بر ضریب تقسیم نموده سپس مراحل قبل را تکرار می کنید به عنوان مثال در $۲r^{۲} + r - ۲ = ۰$ داریم :

سوال : معادلات زیر را به روش مربع کامل کردن حل کنید.

۱) $n^{۲} - ۴n - ۵ = ۰$ ۲) $x^{۲} + ۲x = ۲۴$ * ۳) $t^{۲} + ۳t = -۳$

تمرین در منزل: معادله های درجه ی دوم $t^۲ + ۴t + ۴ = ۰$ و $t^۲ + ۶t + ۱۰ = ۰$ را به کمک مربع کامل کردن حل کنید .

۴.۱ حل معادله ی درجه دوم به روش فرمول کلی (دلتا یا مبین):

در بخش های قبل، روش هایی برای حل معادله های درجه‌ی دوم فرا گرفته اید .اکنون می خواهیم یک فرمول کلی برای حل معادله ی درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ که $a \neq ۰$ است پیدا کنیم :

مساله را بدین شیوه در نظر میگیریم ، معادله درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ را در نظر بگیرید.

حال طرفین معادله را بر a تقسیم می کنیم :

$$x^۲ + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = ۰$$

سپس به کمک روش مربع کامل کردن معادله را حل می کنیم :

در نهایت پس از ساده کردن باید به عبارت

$$\left(x + \frac{b}{۲a}\right)^۲ = \frac{b^۲ - ۴ac}{۴a^۲}$$

در ریاضیات دلتا را چنین تعریف می کنیم : $\Delta = b^۲ - ۴ac$

پس داریم :

$$\left(x + \frac{b}{۲a}\right)^۲ = \frac{\Delta}{۴a^۲}$$

آیا می توانید با ریشه ی دوم گرفتن از دو طرف این معادله، جواب های آن را به دست آورید؟

جواب : در صورتی که $\Delta < ۰$ باشد نمی توان از سمت راست معادله جذر گرفت پس می توان نتیجه گرفت که اگر $\Delta < ۰$ باشد معادله درجه دوم ریشه ندارد.

حال در صورتی که $\Delta \geq ۰$ باشد می توان از طرفین معادله ریشه دوم گرفت لذا :

$$x+\frac{b}{۲a}=\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{۲a}\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{۲a}-\frac{b}{۲a}\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{۲a}+\frac{-b}{۲a}\Rightarrow x=-\frac{b}{۲a}\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

پس در نهایت می توان گفت که :

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

جمع بندی آنچه که تا کنون گفته شده را در تصویر زیر می بینیم :

$$\mathbf{f(x)=ax^{۲}+bx+c}$$

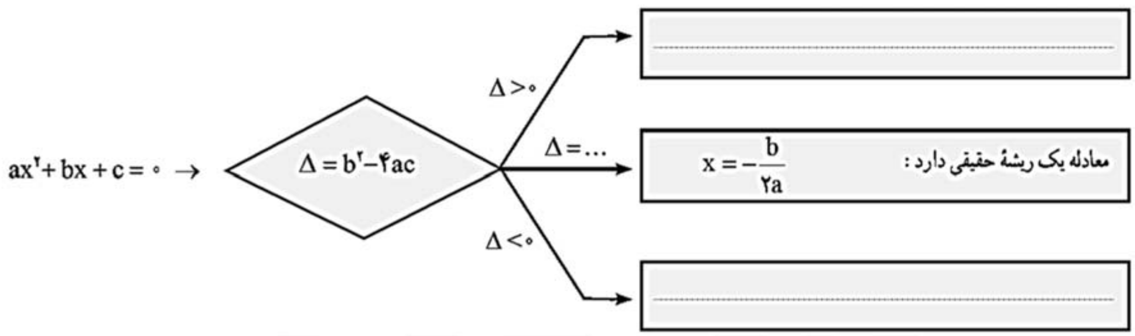
$$\xrightarrow{\Delta=b^{۲}-۴ac}\begin{cases}x_{۱}=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}\\[2ex] x_{۲}=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}\end{cases}$$

سوال : هر کدام از معادلات زیر را به روش کلی حل کنید.

۱) $x^{۲}-x+۱=۰$ ۲) $-x^{۲}+۴x-۴=۰$ ۳) $-۲x^{۲}+۳x+۳=۰$

۴) $r-r^{۲}=-۲$ ۵) $\frac{t^{۲}}{۳}-\frac{t}{۲}-\frac{۳}{۲}=۰$ ۶) $a^{۲}+۲\sqrt{۳}a=۹$

جمع بندی :



بررسی چند مساله :

۱) اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر ۴ سال است، اگر ۴ سال دیگر حاصلضرب سن آنها ۶۰ شود ، سن هر یک چقدر است؟

۲) طول یک مستطیل ۳ سانتی متر بیشتر از ۴ برابر عرض آن است ،اگر مساحت این مستطیل ۴۵ سانتی متر مربع باشد، ابعاد این مستطیل را مشخص کنید.

۳) در یک تیمگان(لیگ) والیبال، ۴۵ بازی انجام شده است .اگر هر تیم با دیگر تیم های تیمگان، تنها یک بازی انجام داده باشد، تعداد تیم های این تیمگان را به دست آورید .اگر تعداد بازی های تیمگان N و تعداد تیم ها n باشد، الگویی برای تعداد بازی ها به دست آورید .

۴) یک عکس به اندازه ی ۱۰ در ۱۵ سانتی متر درون یک قاب با مساحت ۳۰۰ سانتی متر مربع، قرار دارد .اگر فاصله‌ی همه‌ی لبه های عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد این قاب عکس را پیدا کنید.

۵) مجموع مربعات دو عدد فرد متوالی ۲۹۰ است .این دو عدد را پیدا کنید.

۶) از شخصی سن او را پرسیدند ، پاسخ داد ۲۱ سال بعد ، سن من مربع سنی خواهد بود که ۲۱ سال پیش از این داشتم. در حال حاضر این شخص چند سال سن دارد؟

تست : اگر معادله ی $۲x^۲ + ۴x + ۱ - ۳m = ۰$ دو ریشه ی حقیقی داشته باشد ، m به کدام بازه ی زیر تعلق دارد؟

الف) $(-۸,۲)$ ب) $(-۳,۸)$ ج) $\left(\frac{-۱}{۳}, +\infty\right)$ د) $\left(-\infty, \frac{-۱}{۳}\right)$

تست : اگر معادله ی $mx^۲ + (۲m + ۱)x + m - ۱ = ۰$ ریشه ی حقیقی نداشته باشد ، m به کدام بازه ی زیر تعلق دارد؟

الف) $\frac{-۱}{۴} < m < ۰$ ب) $m < \frac{-۱}{۸}$ ج) $۰ < m < ۲$ د) $m > \frac{۱}{۲}$

نکته : استفاده از روش Δ' در حل معادله ی درجه ی دوم :

به عنوان مثال در معادله : $x^۲ - ۱۸x - ۴۰ = ۰$

نکته: هرگاه در معادله ی درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ مجموع ضرایب صفر شود $a + b + c = ۰$ یکی از ریشه ها (۱) و دیگری $\frac{c}{a}$ است . به عنوان مثال در معادله $۲x^۲ - ۳x + ۱ = ۰$:

نکته : هرگاه در معادله ی درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ داشته باشیم $b = a + c$ یکی از ریشه ها (۱-) و دیگری $-\frac{c}{a}$ است . به عنوان مثال در معادله $۳x^۲ - ۲x - ۵ = ۰$:

تمرین : معادله ی $\sqrt{۳}x^۲ - (\sqrt{۳} + \sqrt{۵})x + \sqrt{۵} = ۰$ را حل کنید.

۵.۱ معادلات قابل تبدیل به معادله درجه دوم (پایه یازدهم)

منظور از معادلات قابل تبدیل به درجه دوم، معادلات به فرم $a\big(f(x)\big)^{۲n} + b\big(f(x)\big)^{n} + c = ۰$ اســـت. برای حل اینگونه معادلات تغییر متغیر $f(x)^n = t$ را منظور میکنیم و پس از به د ست آوردن مقادیر t ، مقادیر x را به دست می آوریم.

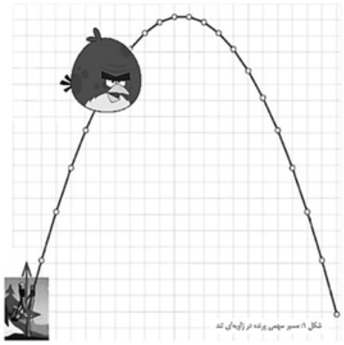
سوال : معادله ی $x^۴ - ۳x^۲ + ۲ = ۰$ را حل کنید .

تست : معادله ی $(x^۲ - x)^۲ - (x^۲ - x) - ۱۲ = ۰$ ، چند ریشه حقیقی دارد ؟

الف) صفر　　ب) ۴　　ج) ۲　　د) ۱

درس دوم

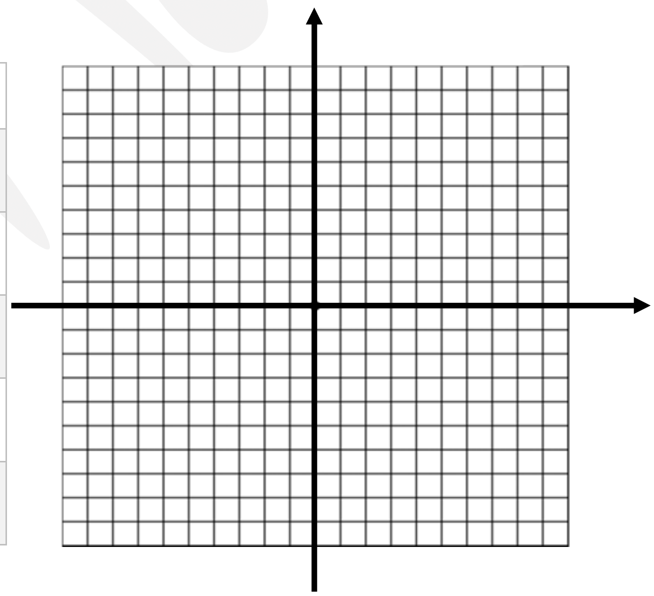
۲ سهمی



به مسیر حرکت پرنده مقابل توجه کنید، این یک مسیر به صورت خط راست نیست بلکه مسیری منحنی شکل به نام سهمی است که بحث مورد نظر ما را تشکیل می دهد.

سوال : معادله ی $y = x^۲ - ۴$ را در نظر بگیرید ، ابتدا جدول زیر را کامل نموده، سپس نقاط به دست آمده را روی یک دستگاه مختصات مشخص نمایید و آنها را به صورت منحنی به هم وصل نمایید.

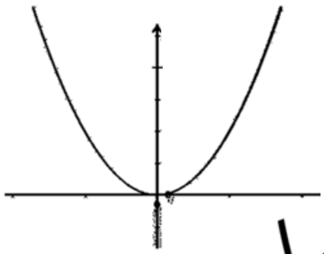
x	$y = x^۲ - ۴$	(x, y)
-۲		
-۱		
۰		
۱		
۲		



نتیجه : همان طور که می دانیم برای رسم چنین نموداری تعداد نقاط زیادی لازم است.اما در آینده خواهیم دید که با کاهش در ست تعداد این نقاط باز می توان نمودار را ر سم کرد. به نظر شما محل برخورد نمودار با محور طول ها نشانه ی چه نقاطی است؟

درس دوم : سهمی

ســـهمی : به طوری کلی نمودار معادله $y = ax^{۲} + bx + c$ یا $y = a(x-h)^{۲} + k$ که بعد ها به طور کامل رسم خواهد شد سهمی نام دارد . دقت کنید که $a\ ,b\ ,c$ را ضرایب گویند.



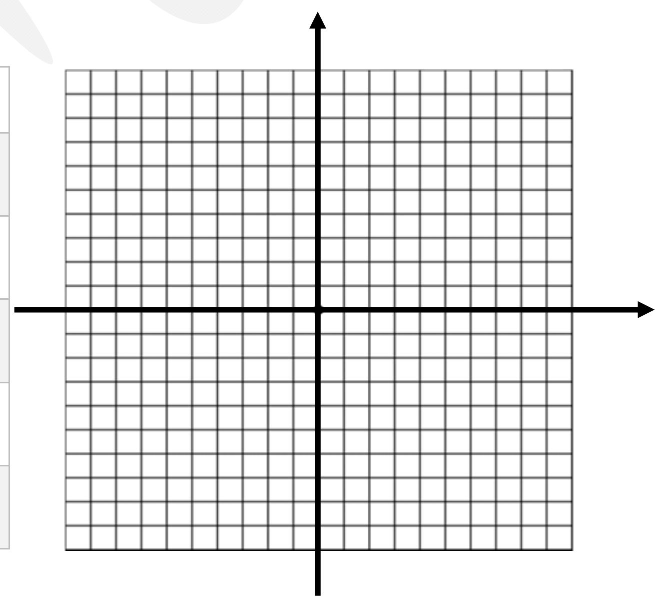
در یک سهمی علامت ضریب a تعیین کننده جهت دهانه سهمی است.

نکته : اگر ضریب $x^{۲}$ مثبت باشد $(a > ۰)$ دهانه ی نمودار روبه بالاست .

نکته : اگر ضریب $x^{۲}$ منفی باشد $(a < ۰)$ دهانه ی نمودار روبه پایین است .

سوال : معادله ی یک سهمی به صورت $y = x^{۲} - ۴x + ۵$ است ، ابتدا جدول زیر را کامل نموده، سپس نقاط به دست آمده را روی یک دستگاه مختصات مشخص نمایید و آنها را به هم وصل نمایید.

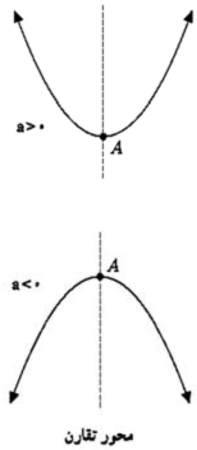
x	$y = x^{۲} - ۴x + ۵$	(x, y)
۰		
۱		
۲		
۳		
۴		



سوال : آیا می توانید پایین ترین نقطه ی سهمی بالا را بیابید؟

درس دوم : سهمی

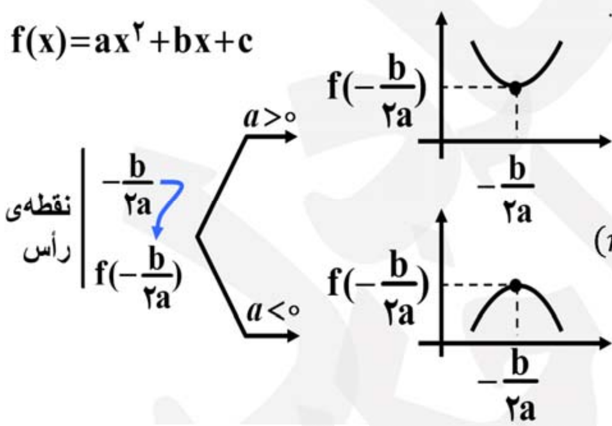
معرفی نقطه ای به نام راس سهمی :



نقطهٔ A را در شکل‌های مقابل رأس سهمی می‌گوییم.
اگر $a>0$ باشد، A پایین‌ترین نقطهٔ سهمی و اگر $a<0$ باشد، A بالاترین نقطهٔ سهمی است.
همچنین خط عمودی که از رأس سهمی می‌گذرد، خط تقارن سهمی نامیده می‌شود.

به طور کلی در یک سهمی اگر دهانه رو به بالا باشد ، نقطه ای وجود دارد که کمترین ارتفاع را دارد و به طور مشابه اگر دهانه سهمی رو به پایین باشد،نقطه ای وجود دارد که بیشترین ارتفاع را دارد و آن را راس سهمی گویند، که کاربرد های خاصی دارد.

چگونه بتوانیم این نقطه را به راحتی بیابیم :



نکته: اگر ضریب x^{2} مثبت باشد سهمی دارای مینیمم (min) و اگر منفی باشد سهمی دارای ماکزیمم (max) است.

نکته : برای یافتن راس ســـهمی از دو روش می توان اســـتفاده نمود یکی به کمک فرمول و دیگری به کمک روش مربع کامل کردن است .

الف) یافتن راس سهمی به کمک فرمول : ابتدا به کمک رابطه ی $x=\frac{-b}{2a}$ طول نقطه ی راس را می یابیم،سپس با جایگزینی آن در معادله عرض این نقطه را نیز می یابیم . دقت کنید که $x=\frac{-b}{2a}$ خط تقارن سهمی نیز هست.

سوال : در هر کدام از سهمی های زیر نقطه ی راس و جهت دهانه سهمی را مشخص نمایید.

۱) $y=-x^{2}-4x+5$

۲) $y=x^{2}-4$

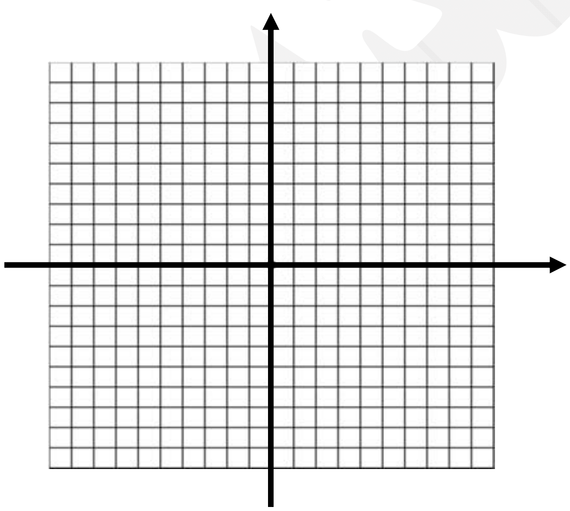
۳) $y=-3x^{2}+x$

درس دوم : سهمی

نکته : برای پیدا کردن راس سهمی می توان از رابطه ی $A=\left(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right)$ یا $A=\left(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ نیز به طور مستقیم استفاده نمود ، به عنوان مثال در سهمی $y=-x^2-4x+5$:

۱.۲ رسم نمودار سهمی $y=a(x-h)^2+k$ به مربع کامل کردن :

در این روش ابتدا معادله ی داده شده را با استفاده از روش مربع کامل کردن ساده کنید تا به فرم $y=a(x-h)^2+k$ که $a\neq 0$ است درآید ، سپس به کمک نکته ی قبل ابتدا طول و عرض راس سهمی را بیابید ، به کمک طول راس سهمی دو نقطه قبل و بعد از طول راس (ترجیحا نقاط متقارن نسبت به راس) را به دلخواه انتخاب نموده و به کمک این نقاط سهمی را رسم کنید .تشخیص جهت دهانه سهمی را قبل از رسم سهمی فراموش نکنید!! به عنوان مثال در سهمی $y=x^2-3x+2$ داریم :



راس سهمی

x	$y=x^2-3x+2$	(x,y)

تمرین : در هر یک از سهمی های زیر پس از یافتن نقطه ی راس آن را رسم کنید (به کمک روش های گفته شده قبلی می توانید نقطه ی راس را بیابید) :

۱) $y=(x-1)^2-2$

۲) $y = -۲x^۲ + ۱$

۳) $y = -۲x^۲ + ۴x - ۳$

۴) $y = -(x + ۱)^۲ - ۳$

۵) $y = x - x^۲$

۶) $y = x^۲$

درس دوم : سهمی

سوال : نمودار $y = x^{2} + 3x + 2$ را ابتدا رسم نموده سپس به سوالات داده شده پاسخ دهید :

الف) جواب های معادله (ریشه های معادله) را به کمک روش کلی یا تجزیه یافته و با محل برخورد نمودار با محور طول ها مقایسه کنید .

ب) به جای مقدار x در معادله نقطه ی صفر قرار داده و محل آن را روی نمودار مشخص کنید .

نتیجه : محل برخورد نمودار سهمی $y = ax^{2} + bx + c$ با محور طول ها همان ریشه ها یا جواب های معادله ی $ax^{2} + bx + c = 0$ است که چنین نقاطی دارای عرض صفر هستند.

نتیجه : اگر به جای مقدار x در معادله نقطه ی صفر قرار داده ، محل برخورد نمودار با محور عرض ها بدست می آید که طول این نقطه صفر خواهد بود .

تمرین : نمودار سهمی $y = ax^{2} + bx + c$ محور y ها را در نقطه ای به عرض ۲ و محور x را در نقاط به طول ۲, ۱− قطع کرده است، معادله ی سهمی را بنویسید و آن را رسم کنید.

تمرین در منزل : نمودار سهمی $y = ax^{2} + bx + c$ محور y ها را در نقطه ای به عرض ۳ و محور x را در نقطه ای به طول ۲ قطع کرده و از نقطه ی $(1, -1)$ نیز می گذرد ، معادله ی سهمی را بنویسید.

درس دوم : سهمی

سوال : اگر نقاط $(۰,۶)$ و $(-۲,۶)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، خط تقارن این سهمی را بدست آورید.

نتیجه : به ازای هر دو نقطه ی دلخواه از سهمی ، اگر عرض این دو نقطه با هم برابر باشند ، آنگاه طول این دو نقطه نسبت به محور تقارن قرینه خواهد بود.

۱.۱.۲ بررسی یک مساله کاربردی :

دو پرتابگر وزنه در یک مسابقه ی ورزشی، وزنه های خود را با زاویه های متفاوت α و β که $\alpha < \beta$ است پرتاب کرده اند ، پرتابگر A زاویه ی α را انتخاب می کند و مسیر طی شده از رابطه ی $y = \frac{-x^۲}{۲} + \frac{۳}{۲}x + ۲$ بدست می آید و پرتابگر B نیز زاویه ی β را انتخاب می کند و مسیر طی شده از رابطه ی $y = -۲x^۲ + ۳x + ۲$ بدست می آید ، در هر دو معادله y ، ارتفاع وزنه از سطح زمین و x مسافت افقی طی شده بر حسب متر است

الف) مسیر حرکت هر کدام از وزنه ها را رسم کنید.

ب) محل برخورد وزنه ها با زمین یا محور x ها درچه نقاطی است؟ کدامیک از وزنه ها مسافت افقی بیشتری را طی کرده است ؟

پ) کدام یک از وزنه ها ارتفاع بیشتری از سطح زمین پیدا کرده است؟ اندازه ی آنها را مشخص کنید.

۲.۲ رسم دقیق نمودار سهمی $y = a(x+b)^2 + c$ به کمک نقاط کلیدی :

روش را با رسم نمودار $y = x^۲ + ۳x + ۲$ به صورت مرحله به مرحله توضیح می دهیم :

برای رسم موارد زیر را در نظر می گیریم :

۱) ابتدا ریشـــه های معادله (محل برخورد نمودار با محور طول یعنی نقاطی که عرض آنها صــفر اســت که همان جواب های معادله است) را در صورت وجود می یابیم.

۲) محل برخورد نمودار با محور عرض ها یعنی نقطه ای که طول آن صــفر اســت را می یابیم (کافی اســت که به جای طول عدد صفر را قرار دهیم)

۳) راس سهمی را می یابیم.

۴) برای دقت بیشتر ، پس از یافتن راس سهمی ، دو نقطه ی دلخواه در دو سمت چپ و راست راس سهمی در نظر بگیرید و سپس به کم این نقاط نمودار را رسم کنید.

مثال : نمودار های زیر را رسم کنید.

۱) $y = x^۲ + ۲x + ۳$

درس دوم : سهمی

۲) $y = x^{۲} + ۴x + ۴$

تمرین : مجموع دو عدد مقدار ثابت ۲۰ است .بیشترین مقدار حاصلضرب این دو عدد را بدست آورید.

تمرین : یک طناب به طول ۸۸ متر در دسترس است .با این طناب قرار است زمینی مستطیل شکل که یک طرف آن رودخانه است حصار شود .بیشترین مساحتی که می توان با این طناب حصار کرد چقدر است؟

تمرین : مقدار a را به گونه ای بیابید تا ماکزیمم سهمی $y = ax^{۲} + ۴x + ۵$ برابر ۹ گردد .

تمرین : اگر $x + ۲y = ۳۰$ باشد بیشترین مقدار حاصل ضرب xy را بدست آورید.

تمرین : چندجمله ای درجه دوم $y = ۳x^{۲} + ۲x - ۱$ را به صورت $y = a(x-m)(x-n)$ بنویسید که mوn ریشه های آن باشند.

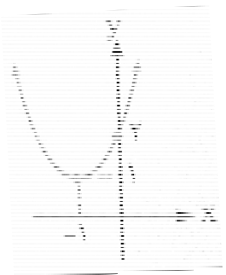
سوال: حا صل ضرب دو عدد طبیعی متوالی از ۵ برابر عدد کوچکتر ۳۲ واحد بی شتر ا ست، مجموع آن دو عدد را بیابید.

درس دوم : سهمی

تست: اگر $x = ۲$ معادله ی محور تقارن سهمی به معادله ی $y = ۲(x + m - ۱)^۲ + ۲m$ باشد ، مختصات راس سهمی کدام است ؟

الف) $(۳,۶)$　　ب) $(۲,-۲)$　　ج) $(۳,-۶)$　　د) $(۲,۲)$

تست : معادله ی سهمی شکل مقابل کدام است ؟



الف) $y = (x - ۱)^۲ + ۱$　　ج) $y = -(x + ۱)^۲ + ۱$

ب) $y = ۲(x - ۱)^۲ + ۱$　　د) $y = (x + ۱)^۲ + ۱$

تست: اگر $x = ۱$ محور تقارن سهمی به معادله ی $y = -۲(x + m)^۲ + ۸$ باشد ، این سهمی محور طول ها را در چه نقاطی قطع می کند ؟

الف) ۳ – و۱　　ب) ۲ – و۲　　ج) ۳و۱–　　د) ۲ – و۳–

تعیین علامت

درس سوم

درس را با مساله ی زیر آغاز می کنیم :

تارا در یک کارگاه حسابدار است و با بررسی های انجام شده روی میزان فروش ، سود حاصل از فروش کارگاه را توانسته از رابطه $p(x) = ۸x - ۶۴۰۰$ بدست آورد که در آن x تعداد کالای فروخته شده است،اما سوالی که برای او ایجاد شده آن است که بداند چه هنگامی سود دهی مثبت و چه هنگامی سود دهی وجود ندارد. برای این منظور جدول زیر را تنظیم می کند ، حال نوبت شماست که در تکمیل این جدول به او کمک کنید :

تعداد کالای تولید شده x	۳۰۰	۵۰۰	۸۰۰	۸۵۰	۹۵۰	۱۰۰۰
$p(x) = ۸x - ۶۴۰۰$						

نتیجه : همان طور که از جدول بالا استنباط می شود، با تولید .... تعداد کالا ، این کارگاه هیچ سودی نخواهد داشت و اگر بیشتر از .... تعداد کالا به فروش برسد سود دهی مثبت آغاز خواهد شد. اما اگر کمتر از .... تعداد کالا به فروش برسد سود دهی منفی (زیان) آغاز میگردد.

جدول بالا را می توانیم به جدول زیر خلاصه کنیم که تنها به کمک علامت ها و عدد صفر متوجه خواهیم شد که این کارگاه از نظر سود دهی می تواند در چه شرایطی باشد.

x	$x < ۸۰۰$	۸۰۰	$x > ۸۰۰$
$p(x)$	$-$	۰	$+$

چنین جدولی را که معرف این شرایط باشد ، جدول تعیین علامت گویند که در بسیاری از مسایل می تواند کاربرد داشته باشد.

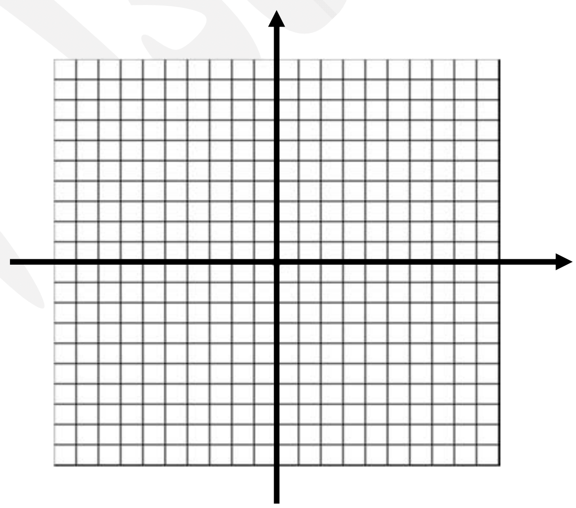
تمرین در منزل : رابطه ی $f(x) = -۸x + ۶۰۰$ را در نظر گرفته و جدول تعیین علامت مربوطه را در صورت امکان برای آن رسم کنید.

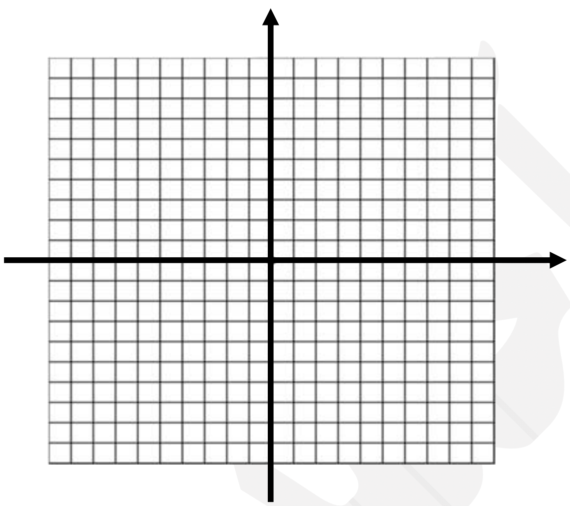
درس سوم : تعیین علامت

سوال : در مسـاله ی مربوط به سـود کارگاه $y = ۸x - ۶۴۰۰$ نمودار مربوط به این رابطه را که یک خط راسـت است رسم نمایید و با استفاده از آن علامت y را در جدول زیر بنویسید .

x	$x < ۸۰۰$	۸۰۰	$x > ۸۰۰$
y			

تمرین : نمودار خط های $y = ۳x - ۶$ و $y = -۳x + ۶$ را رسـم نمایید و با توجه به نمودار ها جدول های مربوطه را که مشخص کننده ی علامت y هستند تکمیل نمایید.





x	$x < \cdots$	...	$x > \cdots$
y			

x	$x < \cdots$	...	$x > \cdots$
y			

سوال : در دو قسمت بالا علامت عددی که ضریب x است چه تفاوتی را در جدول تعیین علامت ایجاد کرده است؟

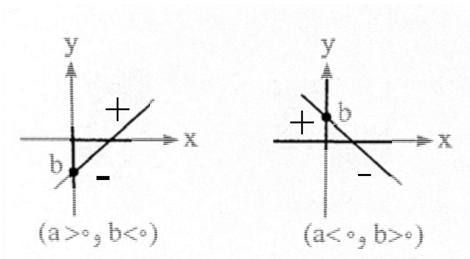
سوال : در رابطه ی $y = ۳x - ۶$ عدد ۲ چه نقشی در جدول ایفا می کند ؟

۳ تعیین علامت چند جمله ای درجه ی اول

۱) ابتدا معادله ی $ax+b=۰$ را حل می کنیم و ریشه ی آن یعنی $x=-\frac{b}{a}$ که در واقع مرز مقادیر منفی و مثبت دو جمله ای مورد نظر است را مشخص می کنیم .

۲) به کمک جدول زیر دو جمله ای را تعیین علامت می کنیم :

x	$x<-\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$x>-\frac{b}{a}$
y = ax+b	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a



سوال : عبارت $y=۵x-۲$ را تعیین علامت کنید :

الف) ابتدا ریشه ی عبارت $y=۵x-۲$ یعنی .... را می یابیم.

ب) با توجه به اینکه علامت ضریب x یعنی $a=۵$.که .... ا ست ، جدول تعیین علامت را به صورت زیر می نویسیم :

سوال : علامت عبارت $A=(۲x-۱)(۳-x)$ را برای x های مختلف تعیین کنید.

نتیجه : دقت کنید که روی نواحی و ستون ها قاعده ی ضرب انجام شده است.

در جدول بالا مقادیر A را برای $x=۴$ و $x=۰$ بدست آورید و صحت علامت مقادیر بدست آمده را با جدول بررسی کنید .

درس سوم : تعیین علامت

سوال : عبارت $D = \frac{x-۲}{۳-۲x}$ را تعیین علامت کنید.

برای تعیین علامت عبارت های کسری ابتدا ریشه های صورت و مخرج را به صورت مجزا می یابیم ، سپس مشابه حالت قبل ، جدول تعیین علامت را برای آنها رسم می کنیم.

تذکر مهم : چنانچه بخواهیم علامت یک عبارت جبری را که شامل چند دوجمله ای درجه اول است را تعیین کنیم، می توانیم در یک جدول همه ی دوجمله ایها را نوشته و ریشه تک تک آنها را یافته و هر کدام را تعیین علامت کنیم و دست آخر با ضرب علامت ها درهم علامت کل عبارت را بیابیم .مثال زیر را که به همین طریق حل می شود به دقت نگاه کنید.

مثال : عبارت $(۲x-۶)^۳$ را تعیین علامت کنید .

تمرین : هر یک از عبارت های زیر را تعیین علامت کنید.

۱) $(۲x-۳)^۲$

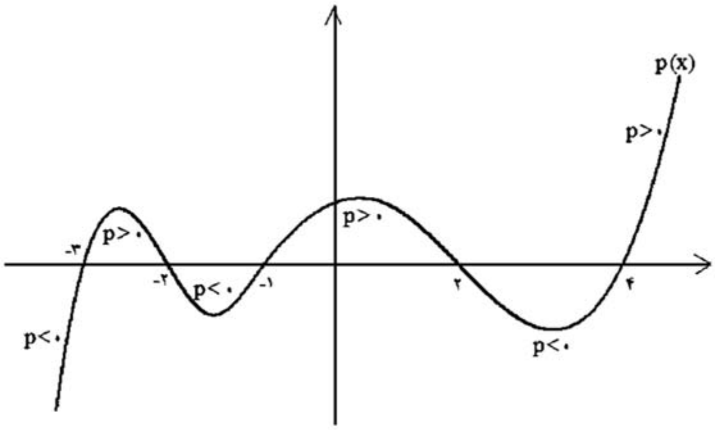
۲) $(۳x+۱)(x-۲)$

۳) $\frac{x-۲}{۳-۲x}$

۴) $x^۳(۷-x)$

جمع بندی : به دقت به شکل رو به رو نگاه کنید .نمودار یک منحنی در دستگاه مختصات ترسیم شده است .نام منحنی $p(x)$ است و لذا در برخی بازه ها بالای محور x هاست پس مثبت است و در برخی بازه ها زیر محور x است ، پس منفی است .اگر دقت کنید نقاطی که منحنی محور طولها را در آن ها قطع کرده است نقشی اساسی در تعیین اینکه $p(x)$ مثبت است یا منفی بازی می کند <u>**چنین نقاطی را ریشه های p گوییم**</u> .

<u>**در حالت کلی نقاط حاصل از حل معادله $p(x) = ۰$ را ریشه های p** گوییم.</u>



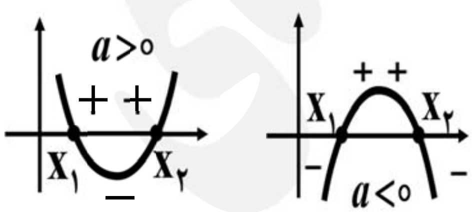
$$\begin{cases} x < -۳ \rightarrow p(x) < ۰ \\ -۳ < x < -۲ \rightarrow p(x) > ۰ \\ -۲ < x < -۱ \rightarrow p(x) < ۰ \\ \vdots \\ x > ۴ \rightarrow p(x) > ۰ \end{cases}$$

۴ تعیین علامت چند جمله ای درجه دوم

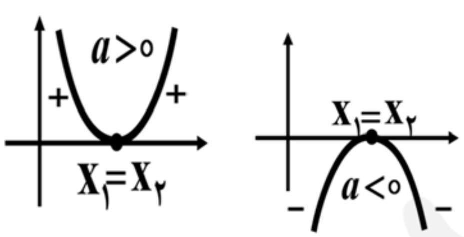
بررسی نمودار سهمی درجه ی دوم به کمک ریشه ها (حل معادله)

همان طور که می دانیم نمودار درجه ی دوم نسبت به محور ها می تواند ۳ حالت زیر را داشته باشد:

۱- محور x را در دو نقطه قطع کند. به عنوان مثال معادله ی $-۲x^۲ + ۳x - ۱ = ۰$ چنین شرایطی را دارد .

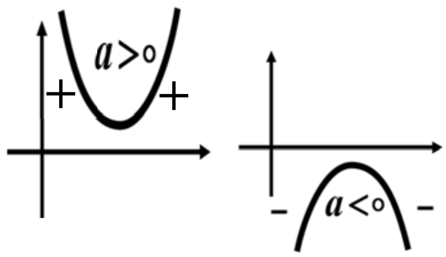


۲ - محور x را در یک نقطه قطع کند. به عنوان مثال معادله ی $x^۲ + ۴x + ۴ = ۰$ چنین شرایطی را دارد .



درس سوم : تعیین علامت

۳- محور x را قطع نکند. به عنوان مثال معادله ی $x^۲ + ۲x + ۴ = ۰$ چنین شرایطی را دارد .



۱.۴ تعیین علامت سهمی با استفاده از نمودار و ریشه های آن :

$f(x)=ax^۲+bx+c$

علامت یک رابطه درجه ی دوم با ضابطه ی $p(x) = ax^۲ + bx + c$

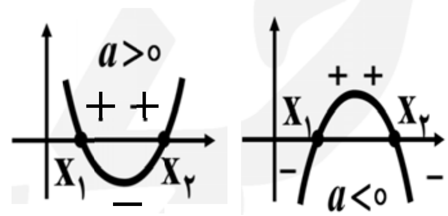
در حالت کلی به Δی آن و ضریب $x^۲$ یعنی a بستگی دارد .

$$\xrightarrow{\Delta = b^۲-۴ac} \begin{cases} x_۱ = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a} \\ x_۲ = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} \end{cases}$$

الف) **اگر** $\Delta > ۰$ باشد (معادله دو ریشه متمایز دارد)

۱) $\Delta > ۰$

x	$-\infty$	$x_۱$	$x_۲$	$+\infty$
y	موافق علامت a	مخالف علامت a	موافق علامت a	

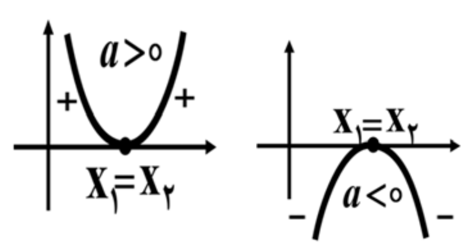


به عنوان مثال می خواهیم عبارت $y = x^۲ - ۵x + ۶$ را تعیین علامت کنیم :

ب) اگر $\Delta = ۰$ باشد (معادله یک ریشه دارد) در این حالت گوییم معادله ریشه مضاعف دارد.

۲) $\Delta = ۰$

x	$-\infty$	$x_۱ = x_۲ = -\frac{b}{a}$	$+\infty$
	موافق علامت a	موافق علامت a	

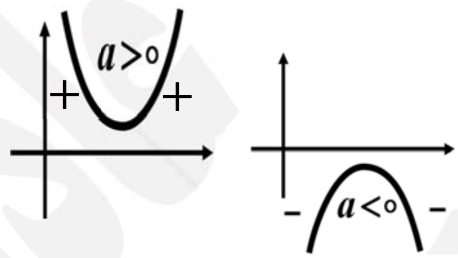


به عنوان مثال در چند جمله ای $x^۲-۴x+۴$ یا $(x-۲)^۲$داریم:

ج) اگر $\Delta<۰$ باشد در این حالت گوییم معادله ریشه ندارد.

۳) $\Delta<۰$

x	$-\infty$	$+\infty$
y	موافق علامت a	



به عنوان مثال در رابطه ی $y=-x^۲+۴x-۹$ تعیین علامت به صورت زیر خواهد بود :

سوال: مجموعه جواب نامعادله ی $x^۲-۳x+۲<۰$ (همواره منفی یا پایین محور طول) را بیابید.

نکته : در تعیین علامت عبارت $y=(ax+b)^n$:

الف : اگر n زوج باشد همیشه بزرگتر مساوی صفر است .

ب : اگر n فرد باشد علامت آن با علامت $ax+b$ یکی است .

مثال : عبارت های $(۲x-۳)^۲$ و $(۲x-۳)^۳$ را تعیین علامت کنید.

تمرین : عبارت $\frac{x(x-۳)^{۲}}{x^{۲}+x-۲}$ را تعیین علامت کنید .

برای این منظور ابتدا ریشه های صورت و مخرج را یافته ، سپس هر یک از عبارت های صورت و مخرج را تعیین علامت نموده و در جدول می نویسیم ، دقت کنید که ریشه های مخرج را در نهایت به صورت تعریف نشده قرار می دهیم :

تمرین : چند جمله ای $y=-x^{۲}+x+۲$ را به دو روش رسم نمودار و جدول ، تعیین علامت کنید .

تمرین : عبارت های زیر را تعیین علامت کنید .

$$A=\frac{-x^{۲}+۶x+۹}{x^{۲}+x+۳} \qquad B=(x^{۲}-۹)(۳x-۱) \qquad C=\frac{(۱-x)^{۴}(۲-x)}{(۴-۳x-x^{۲})}$$

۱.۱.۴ انواع ریشه و تاثیر آن در تعیین علامت (روش سریع تعیین علامت)

انواع ریشه : $(x-a)^n$
- ریشه فرد
  - **توان یک (ساده)**
  - توان فرد غیر یک
- ریشه زوج
  - توان دو (مضاعف)
  - توان غیر دو زوج

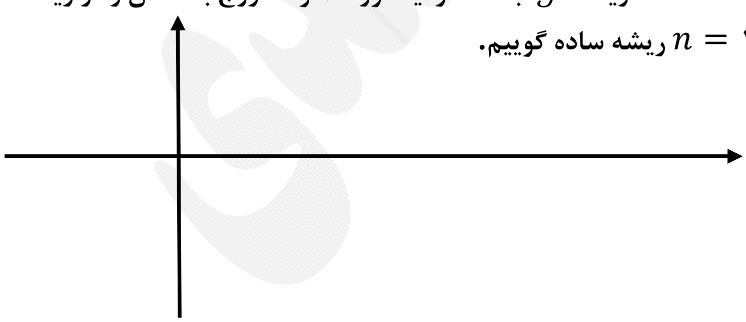
اگر $x=a$ ریشه چندجمله ای $f(x)$ باشد در این صورت چند حالت داریم :

۱) اگر این ریشه فقط یک بار تکرار شده باشد به آن ریشه ساده میگویند. مثلا در عبارت $f(x)=(x-۱)(x-۲)^۴(x-۳)^۷$ ریشه $x=۱$ ریشه ساده این رابطه است .

۲) اگر این ریشه به تعداد زوجی تکرارشده باشد آن را ریشه زوج گویند مثلا $x=۲$ ریشه زوج مثال بالا است .

۳) اگر ریشه به تعداد فردی تکرار شده باشد آن را ریشه فرد گویند مثلا $x=۳$ در مثال بالا ریشه فرد تابع است.

توجه : در تعاریف بالا باید بیشترین تعداد تکرار ریشه را در نظر بگیریم. یعنی $f(x)$ را به صورت $f(x)=(x-a)^n g(x)$ می نویسیم که $x=a$ ریشه g نباشد. در اینصورت اگر n زوج باشد آن را از ریشه زوج و اگر فرد باشد ا ز ریشه فرد گوییم. و اگر $n=۱$ ریشه ساده گوییم.



حال به نحوه تعیین علامت در ریشه های زوج و فرد توجه کنید:

$$\frac{(x-۱)(x-۲)(x+۲)^۴}{(x-۳)(x-۴)^۳}$$

$$\frac{(x-۱)(x+۲)}{x^۲+۳x-۱۰}$$

۲.۴ بررسی نامعادلات

۱.۲.۴ نامساوی ها

ابتدا با خواص نامساوی ها که در حل نامعادلات نقش اساسی دارند آشنا می شویم :

اصل تثلیث : برای هر دو عدد حقیقی مانند a و b اصل تثلیث برقرار است به عبارتی هر گاه دو عدد دلخواه را داشته باشیم قطعا یکی از حالت های زیر رخ خواهد داد یعنی :

$$a<b \quad \text{یا} \quad a=b \quad \text{یا} \quad a>b$$

نکته : به طرفین یک نامساوی می توان عددی را اضافه یا کم کرد .

$$if \quad a<b \implies a\pm c<b\pm c$$

به عنوان مثال $x+۶<۳ \implies$

نکته: طرفین یک نامساوی را میتوان در عددی مثبت ضرب یا بر عددی مثبت تقسیم کرد .

$$if \quad a<b \quad \xrightarrow{m>۰} \quad am<bm \;, \frac{a}{m}<\frac{b}{m}$$

به عنوان مثال : $۲x<۱۲ \implies$

تمرین : نامعادله ی $۵x-۱\geq ۳x-۷$ را حل کنید و مجموعه جواب را روی محور اعداد نشان دهید.

نکته : اگر طرفین یک نامساوی را در یک عدد منفی ضرب یا بر یک عدد منفی تقسیم کنیم جهت نامساوی عوض می شود .

$$if \quad a<b \quad \overset{m<۰}{\Longrightarrow} \quad am>bm \ , \frac{a}{m}>\frac{b}{m}$$

به عنوان مثال : $-۲<۳x-۱\Rightarrow$

نکته : طرفین یک نامساوی را میتوان به توان عددی فرد رساند یا از طرفین ریشه فرد گرفت .

$$if \quad a<b \quad \Rightarrow \quad a^{۲n+۱}<b^{۲n+۱} \quad , \quad \sqrt[۲n+۱]{a}<\sqrt[۲n+۱]{b}$$

نکته : اگر دو طرف یک نامساوی مثبت باشد ، طرفین نامساوی را میتوان به توان عدد زوج رساند یا از طرفین ریشه زوج گرفت .

$$if \quad ۰<a<b \quad \Rightarrow \quad a^{۲n}<b^{۲n}, \ \sqrt[۲n]{a}<\sqrt[۲n]{b}$$

نکته : اگر دو طرف یک نامساوی منفی باشد توان زوج رساندن جهت نامساوی را عوض می کند .

به عنوان مثال :

دقت کنید در این شرایط نمی توان ریشه زوج گرفت .

$$if \quad a<b<۰ \quad \nRightarrow \quad a^{۲n}>b^{۲n}$$

نکته : اگر حالت $a<۰<b$ اتفاق بیفتد و طرفین را به توان عدد زوج برسانیم سه حالت داریم :

۱) $\begin{cases} a<۰<b \\ |a|<|b| \end{cases} \Rightarrow a^{۲n}<b^{۲n}$

۲) $\begin{cases} a<۰<b \\ |a|=|b| \end{cases} \Rightarrow a^{۲n}=b^{۲n}$

۳) $\begin{cases} a<۰<b \\ |a|>|b| \end{cases} \Rightarrow a^{۲n}>b^{۲n}$

سوال : سعی کنید برای حالت های بالا مثال بیاورید .

نکته: اگر طرفین یک نامساوی هم علامت را معکوس کنیم جهت نامساوی عوض می شود .

$$\begin{cases} ۰ < a < b \\ \text{یا} \\ a < b < ۰ \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{۱}{a} > \frac{۱}{b}$$

سوال : برای حالت های بالا مثال بیاورید.

نکته : اگر طرفین یک نامساوی مختلف العلامه را معکوس کنیم جهت نامساوی عوض نمی شود .

$$if \quad a < ۰ < b \quad \Rightarrow \quad \frac{۱}{a} < \frac{۱}{b}$$

نکته : طرفین دو نامساوی هم جهت را می توان نظیر به نظیر با هم جمع کرد .

$$۱)\ \begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow \quad a + c < b + d$$

$$۲)\ \begin{cases} a < b \\ c \le d \end{cases} \Rightarrow \quad a + c < b + d$$

$$۳)\ \begin{cases} a \le b \\ c \le d \end{cases} \Rightarrow \quad a + c \le b + d$$

نکته : طرفین دو نامساوی هم جهت را نمی توان از هم کم کرد .

سوال : با ذکر یک مثال دلیل این نکته را توضیح دهید.

نکته : طرفین دو نامساوی هم جهت را وقتی می توان نظیر به نظیر در هم ضرب کرد که دو طرف هر دو نامساوی مثبت باشد .

به عنوان مثال :

نکته : در حالت کلی طرفین دو نامساوی مثبت و هم جهت را نمی توان بر هم تقسیم کرد .

مثلا :

$$\begin{cases} ۱۲ > ۴ \\ ۶ > ۱ \end{cases} \quad \not\Rightarrow \quad \frac{۱۲}{۶} > \frac{۴}{۱}$$

نکته : اعدادی که بین صفر و یک هستند توان بیشتر آنها را کوچکتر و فرجه بیشتر آنها را بزرگتر می کند .

$$۰ < a < ۱ \Rightarrow \begin{cases} ۱ > a > a^{۲} > a^{۳} > \cdots > ۰ \\ ۰ < a < \sqrt{a} < \sqrt[۳]{a} < \cdots < ۱ \end{cases}$$

سوال : برای نکته بالا مثال بیاورید.

نکته : اعدادی که بزرگتر از یک هستند توان بیشتر آنها را بزرگتر و فرجه بیشتر آنها را کوچکتر می کند .

$$if \quad a > ۱ \quad \Rightarrow \begin{cases} ۱ < a < a^{۲} < a^{۳} < \cdots < +\infty \\ a > \sqrt{a} > \sqrt[۳]{a} > \sqrt[۴]{a} > \cdots > ۰ \end{cases}$$

نکته : مجموع هر عدد مثبت و معکوسش عددی بزرگتر یا مساوی ۲ است .

$$if \quad a > ۰ \quad \Rightarrow \quad a + \frac{۱}{a} \geq ۲$$

نکته : مجموع هر عدد منفی با معکوسش عددی کوچکتر یا مساوی ۲- است .

$$if \quad a < ۰ \quad \Rightarrow \quad a + \frac{۱}{a} \leq -۲$$

نکته : اگر $a, b \geq ۰$ آنگاه واسطه ی حسابی a و b همواره بزرگتر مساوی واسطه ی هندسی آنهاست .

$$\forall \ a, b \in R \quad \frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab}$$

تمرین : نامعادله ی $-۸x + ۳(x-۲) > -x + ۲$ را حل کنید.

۲.۲.۴ حل نامعادلات وابسته $(f(x) < g(x) < h(x))$

برای حل این نوع نامعادلات، نامعادلات $f(x) < g(x)$ و $g(x) < h(x)$ را جداگانه حل می کنیم و از جواب هر دو معادله اشتراک می گیریم .

درس سوم : تعیین علامت

سوال : نامعادله ی $-۲ < ۱ - ۳x \leq ۸$ را حل نموده و مجموعه جواب آن را به صورت بازه نمایش داده ، سپس روی محور اعداد نمایش دهید.

روش دوم: در صورتی که چنین نامعادله ی دوگانه ای وجود داشته باشد طوری که متغیر تنها در عبارت وسط قرار گیرد از خواص جمع و ضرب نامساوی ها استفاده کنید و این نامعادله ی دوگانه را حل کنید :

تمرین : نامعادلات زیر را حل کنید.

$۱)\ ۱ < ۲x - ۳ \leq ۳$ $\qquad$ $۲)\ x + ۱ \leq ۵ - x < ۲x + ۳$ $\qquad$ $۳)\ -۲ < \frac{۵ - x}{۲} < ۰$

سوال : نامعادلات زیر را به دو روش هندسی و جدول تعیین علامت حل کنید.

$۱)\ x^۲ \leq ۱۶$ $\qquad$ $۲)\ ۳x^۲ - x - ۲$

درس سوم : تعیین علامت

سوال: حدود m را طوری بیابید که سهمی $y=(m+2)x^2+4x+m-1$ محور طول ها را در دو نقطه قطع کند.

نکته : شرط آنکه سهمی همواره بالای محور طول ها باشد آن است که (همواره مثبت)

$ax^2+bx+c>0 \rightarrow$ 

$\rightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta<0 \end{cases}$

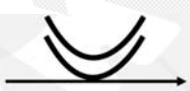
سوال: به ازای کدام مقدار m نمودار سهمی $y=(m-1)x^2+\sqrt{3}x+m$ همواره بالای محور x هاست؟

نکته: شرط آنکه سهمی همواره پایین محور طول ها باشد آن است که (همواره منفی)

$ax^2+bx+c<0 \rightarrow$ 

$\rightarrow \begin{cases} a<0 \\ \Delta<0 \end{cases}$

نکته : شرط آنکه سهمی همواره بالای محور طول ها یا بر آن مماس باشد آن است که(همواره نامنفی) :

$ax^2+bx+c\geq 0 \rightarrow$ 

$\rightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta\leq 0 \end{cases}$

نکته : شرط آنکه سهمی همواره پایین محور طول ها یا بر آن مماس با شد آن است که (همواره نامثبت) :

$ax^2+bx+c\leq 0 \rightarrow$ 

$\rightarrow \begin{cases} a<0 \\ \Delta\leq 0 \end{cases}$

تست : به ازای کدام مقدار m نمودار سهمی با ضابطه ی $y=(m-2)x^2-3x+m+2$ بالای محور xها و مماس بر آن است (نامنفی) ؟

الف) -3 ب) $-\frac{5}{2}$ ج) $\frac{5}{2}$ د) 3

درس سوم : تعیین علامت

سوال : نامعادلات زیر را حل کنید.

$$۱)\ \frac{x^{۲}-۹}{۲x+۱}\geq ۰ \quad ۲)\ \frac{x^{۳}-x}{x^{۲}-۲x+۲}\leq ۰ \quad ۳)\ x(x^{۲}+۴)<۰ \quad ۴)\ \left(\sqrt{۲}-۱\right)^{۲x+۳}<\left(\sqrt{۲}-۱\right)^{۵x-۳}$$

سوال : نامعادلات زیر را حل کنید.

$$۱)\ \frac{۱}{x-۱} \geq \frac{۱}{x+۴}$$

$$۲)\ \frac{x^{۲}-۴}{x^{۲}-۳x+۲} > \frac{۲x+۴}{x-۲}$$

$$۳)\ -۱ < \frac{x^{۲}-۴x}{x+۲} \leq ۰$$

نکته : در نام ساوی ها اگر طرفین نامعادله هم زمان مثبت یا منفی بود با طرفین – و سطین کردن جهت نام ساوی تغییر نمی کند . به مثال زیر توجه کنید :

$$\frac{۱}{(x-۱)^{۲}+۱} < \frac{۱}{(x-۲)^{۲}+۳}$$

سوال : حدود m را طوری تعیین کنید که نامعادله ی $\frac{x^{۲}-mx+۱}{x^{۲}+x+۱} < ۱$ همواره برقرار باشد.

تست : از دستگاه نامعادلات $\begin{cases} \frac{۳x-۱}{۲} \geq ۵x+۳ \\ ۱-\frac{x}{۲} < \frac{۸+x}{۲} \end{cases}$ ، حدود تغییرات x کدام است ؟

الف) $[-۱,۱)$ ب) $(-۳,-۱]$ ج) $(-۵,-۲]$ د) $[-۲,۱)$

۳.۲.۴ حل نامعادلات مستقل $\left(f(x) < g(x) \text{ یا } f(x) > h(x)\right)$

برای حل این نوع نامعادلات ابتدا دو نامعادله ی $f(x) < g(x)$ و $f(x) > h(x)$ را جداگانه حل کنید . مجموعه جواب اجتماع جواب های بدست آمده است .

به عنوان مثال در نامعادله ی $۵-x < ۲x+۳$ یا $x+۱ \leq ۵-x$ داریم :

درس سوم : تعیین علامت

تست : به ازای کدام مقادیر m معادله ی $\frac{m}{x} - ۱ = ۲\left(\frac{x-۱}{x+۱}\right)$ جواب حقیقی ندارد ؟

الف) $m < ۱$ ب) $m > ۹$ ج) $-۹ < m < ۱$ د) $۱ < m < ۹$

نکته : اگر در معادله ی $y = ax^۲ + bx + c$ ضرایب c یا b صفر باشند ، معادله را ناقص گویند به عنوان مثال معادلات $۳x^۲ = ۰$ و $۳x^۲ + ۲x = ۰$ و $۳x^۲ - ۱ = ۰$ همگی ناقص هستند.

نکته : استفاده از روش Δ' در حل معادله ی درجه ی دوم :

به عنوان مثال در معادله ی : $x^۲ - ۱۸x - ۴۰ = ۰$

تست : محور تقارن نمودار سهمی $f(x) = -۳x^۲ + ۴x$ خط به معادله $۲y + ۳x = ۱$ را به کدام عرض قطع می کند ؟

الف) $-\frac{۱}{۲}$ ب) $-\frac{۳}{۲}$ ج) $\frac{۱}{۲}$ د) $\frac{۳}{۲}$

تست :کمترین مقدار سهمی $f(x) = ۲x^۲ - ۳x + ۴$ کدام است ؟

الف) $\frac{۱۹}{۸}$ ب) $\frac{۳}{۴}$ ج) $\frac{۲۱}{۸}$ د) $\frac{۲۳}{۸}$

تست: اگر حداکثر مقدار ت سهمی $y = ax^۲ - ۴x + ۲a + ۱$ برابر ۳ باشد ، a کدام است؟

الف) -۱ ب) -۲ ج) ۱ د) -۲ و -۱

درس سوم : تعیین علامت

سوال: با فرض اینکه $y=\frac{-۱}{۲}$ مماس بر سهمی $f(x)=۲x^۲-۳x+a$ باشد مقدار a را بیابید.

سوال : کم ترین مقدار عبارت $y=\frac{۱}{-۲x^۲+۳x+۱}$ را بیابید.

سوال : یک جسم از بالای یک ساختمان که ۱۳ متر ارتفاع دارد، به هوا پرتاب می شود .اگر ارتفاع این جسم از سطح زمین در ثانیه t محاسبه شود،از رابطه ی $h=-۵t^۲+۱۸t+۱۳$ محاسبه شود ، در چه فاصله ی زمانی ارتفاع توپ از سطح زمین بیشتر از ۱۳ متر خواهد بود؟

تست : کسر $\frac{(x-۱)(x-۲)}{(x^۲+۱)(x^۲-۷x+۱۲)}$ در کدام فاصله زیر همواره منفی است ؟

الف) $(-\infty,۱)$ ب) $(۲,۳)$ ج) $(۳,۴)$ د) $(۲,+\infty)$

تست : تابع $f(x)=\frac{x^۲+۲x+۱}{x^۴-۹x^۲}$ در R چند بار تغییر علامت می دهد ؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴

تست : مقادیر تابع با ضابطه ی $f(x)=-\frac{۱}{۲}x^۲+۲x+۶$ در بازه ی (a,b) بزرگتر از $\frac{۷}{۲}$ است

بیشترین مقدار $b-a$ کدام است ؟

الف) ۴ ب) ۵ ج) ۵,۵ د) ۶

درس سوم : تعیین علامت

تست : در کدامیک از بازه های زیر علامت $\frac{(x-۱)^۲(۲x+۱)^۳}{|x|(۲-x)}$ منفی است؟

الف) $(\frac{-۱}{۲},۰)$ ب) $(-\infty,۱)$ ج) $(۲,+\infty)$ د) $(۱,۲)$

تست : معادله ی $\frac{-۶x-۲}{x^۲+۳}=۲+\frac{x^۲+۳}{۶x+۲}$ کدام شرایط زیر را دارد؟

الف) دو جواب مثبت ب)دو جواب منفی ج) جواب ندارد د) دو جواب مختلف العلامت

سوال: به ازای چه مقداری از x تابع $\sqrt{\frac{x^۲-۱}{x^۲+۱}}$ قابل تعریف است؟

سوال: اگر $f(x)=x^۲-۲x$ و $g(x)=-۲$ آنگاه در چه بازه ای نمودار f بالاتر از نمودار g قرار می گیرد.

تست : نمودار تابع با ضابطه ی $f(x)=\frac{۳x^۲-۲x}{x^۲+۴}$ در بازه ی (a,b) پایین تر از خط به معادله ی $y=۲$ قرار دارد. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است ؟ (ر خ ۸۸)

الف) ۴ ب) ۶ ج) ۸ د) ∞

درس سوم : تعیین علامت

تســـت : به ازای کدام مقدار a، منحنی به معادله ی $y = (\frac{۱}{۲}x + a)(x^۲ - ۴)$ بر محور xها در یک نقطه مماس است ؟

الف) $\emptyset$ ب) ۱ ج) ۱ و ۱- د) ۲ و ۲-

نکته : هرگاه در معادله ی درجه ی دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ ، $\frac{c}{a} < ۰$ باشد همواره $\Delta > ۰$ و معادله دارای دو ریشه ی مختلف العلامه می باشد و نمودار از هر چهار ناحیه ی مختصات عبور می کند.

سوال: به ازای چه مقدار m سهمی $۳mx^۲ - ۱۰x + m - ۱ = ۰$ از چهار ناحیه ی مختصات میگذرد؟

تست : اگر عبارت $(a-۱)x^۲ - (a-۱)x + ۱$ به ازای جمیع مقادیر x منفی باشد حدود a کدام است ؟

الف) $۱ < a < ۵$ ب) $a < ۱$ ج) $\emptyset$ د) R

تست : نمودار تابع $y = (m-۲)x^۲ + ۴mx + ۱$ همواره بالای خط $y = -۱$ قرار دارد.حدود mکدام است ؟

الف) $m \in \mathbb{R}$ ب) $۲ < m < ۴$ ج) $۲ < m < ۷$ د) $-۱ < m < ۲$

درس سوم : تعیین علامت

تست : معادله ی $(x^{۲}-x)^{۲}-(x^{۲}-x)-۱۲=۰$ ، چند ریشه حقیقی دارد ؟

الف) صفر　　ب) ۴　　ج) ۲　　د) ۱

تست : مجموع ریشه های حقیقی معادله $(x^{۲}+x)^{۲}-۱۸(x^{۲}+x)+۷۲=۰$ کدام است ؟

الف) -۴　　ب) -۲　　ج) ۲　　د) ۴

تست : **معادله** $\left(x+\frac{۱}{x}\right)^{۲}+۳\left(x+\frac{۱}{x}\right)-۱=۰$ چند ریشه حقیقی دارد ؟

الف) صفر　　ب) ۴　　ج) ۱　　د) ۲

تست : معادله ی $x^{۲}-x-۴\sqrt{x^{۲}-x+۱۹}+۱۴=۰$ چند ریشه ی حقیقی دارد ؟

الف) ۱　　ب) ۲　　ج) ۳　　د) ۴

تست : معادله ی $x+\frac{۱}{x}+\frac{x}{x^{۲}+۱}=۲$ چند جواب دارد ؟

الف) ۱　　ب) ۰　　ج) ۲　　د) ۳

تمرین در منزل : معادله ی $\left(\frac{۲x-۱}{۲x}\right)^{۲}-۴\left(\frac{۲x-۱}{۲x}\right)+۳=۰$ چند ریشه ی حقیقی دارد ؟

درس سوم : تعیین علامت

تست : تعداد جواب های حقیقی معادله $\sqrt{۲x-۱}=x-۲$ کدام است ؟

الف) صفر ب) ۱ ج) ۲ د) ۳

تست: حاصلضرب ریشه های حقیقی معادله $\sqrt{x^۲+۴x+۵}=x^۲+۴x+۳$ کدام است ؟

الف) -۲ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳

تست : رضا و محسن باهم پروژه ای را در ۲۰ روز به اتمام میرسانند .

اگر محسن به تنهایی این پروژه را ۹ روز دیرتر از رضا انجام دهد رضا ظرف چند روز پروژه ی مذکور را به تنهایی انجام خواهد داد ؟

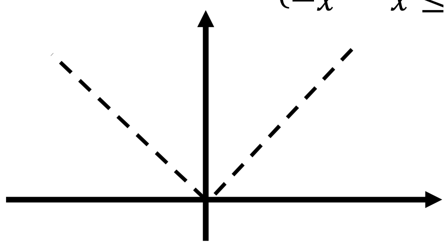
الف) ۴۵ ب) ۵۴ ج) ۳۶ د) ۴۰

تست : منحنی به معادله ی $y=(x-۱)(x^۲-ax+a)$ محور xها را فقط در یک نقطه قطع میکند، مجموعه مقادیر a به کدام صورت است ؟

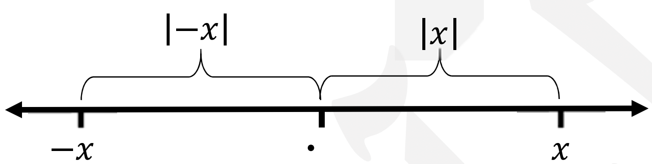
الف) $-۴<a<۰$ ب) $۰<a<۲$ ج) $۰<a<۴$ د) $a>۴$

۵ نامعادله های قدرمطلقی

تعریف : قدر مطلق عدد حقیقی x را با $|x|$ نمایش داده و به صـــورت $f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x \leq 0 \end{cases}$ نمایش می دهیم که نمودار آن به صورت مقابل است :



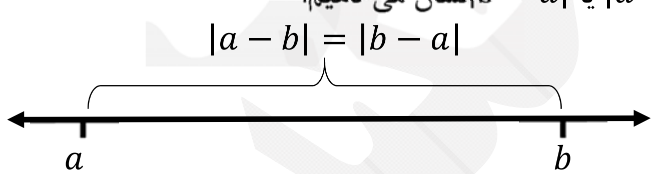
البته قبلا با مفهوم قدر مطلق به معنی فاصله ی نظیر یک عدد حقیقی چون x تا مبدا مختصات آشنا شده اید.



$$|x| = |-x|$$

نکته : اگر $n \in N$ برای هر عدد حقیقی a داریم : $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$.

تعریف : فاصله ی بین دو عدد حقیقی a و b را با $|a-b|$ یا $|b-a|$ نشان می دهیم.



فراموش نکنیم که: اگر درون تابع قدرمطلق را در عدد منفی ضرب کنیم، قدرمطلق تغییری نخواهد کرد.

سوال : عبارت های زیر را بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید.

$|-x^2 - 3| =$ $\qquad$ $|x^2 + 1| =$ $\qquad$ $|1 - \sqrt{3}| =$ $\qquad$ $|2 - \sqrt{2}| =$

در حالت کلی : با توجه به تعریف قدرمطلق، می توان قدر مطلق را حذف نمود به شـــرط آنکه علامت عبارت درون قدرمطلق را بدانیم،اگر علامت عبارت دورن قدرمطلق مثبت باشد می توانیم قدر مطلق را حذف کنیم، اما اگر علامت عبارت درون قدرمطلق منفی با شد پس از حذف قدرمطلق ، علامت منفی (قرینه) پشت کل عبارت قرار میدهیم. به عنوان مثال میخواهیم عبارت $|x^2 - 1|$ را بدون قدرمطلق بنویسیم :

سوال : عبارت $|sinx - ۱|$ را بدون قدر مطلق بنویسید.

سوال : حاصل $|۲ - x| + |۲x - ۱|$ را وقتی که $-۱ < x < ۰$ باشد ، بدست آورید.

نکته : برای تعیین علامت عبارت درون قدرمطلق در محدوده ی مورد نظر گاهی قرار دادن عدد در عبارت های قدرمطلق می تواند راهگشا باشد.

تست : اگر $۵x - x^۲ \geq ۰$ باشد آنگاه حاصل $|x - ۷| + |۳x + ۴|$ کدام عدد نمی تواند باشد؟

الف) ۱۱ ب) ۱۳ ج)۲۱ د) ۲۲

تست : اگر $x \geq ۰$ باشد آنگاه حاصل $\sqrt{x^۲ + ۱ + ۲\sqrt{x^۲}}$ کدام است؟

الف) $x + ۱$ ب) $x - ۱$ ج)$-x + ۱$ د) $-x - ۱$

۱.۱.۵ ویژگی تابع قدر مطلق

۱) $|x| \geq ۰$

۲) $|x| = |-x|$

۳) $-|x| \leq x \leq |x|$

۴) $|xy| = |x||y|$, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

۵) $|x^n| = |x|^n$

۶) $|x| = a \overset{a\geq ۰}{\Longrightarrow} x = a$ یا $x = -a$ و $|x| = |y| \Rightarrow x = \pm y$

مثال :

$$|x-۱|=۷$$

$$|۲x+۳|=|۵x-۱|$$

$$۷)\ |u|\le a \ \overset{a\ge ۰}{\Longrightarrow}\ -a\le u\le a$$

سوال : آیا می توانید تعبیر هندسی این نامساوی را رسم کنید؟

مثال :

$$|x-۳|\le ۷$$

نمایش روی محور مختصات :

$$۸)\ |u|\ge a \ \overset{a\ge ۰}{\Longrightarrow}\ u\ge a \quad \text{یا} \quad u\le -a$$

سوال : آیا می توانید تعبیر هندسی این نامساوی را رسم کنید؟

مثال:

$$|۲x-۱|>۵$$

$$۹)\ |x+y|\le |x|+|y|$$

$$۱۰)\ |x|-|y|\le |x-y|$$

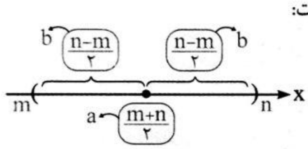
$$۱۱)\ \big||x|-|y|\big|\le |x-y|$$

۲.۱.۵ تبدیل نامساوی به قدرمطلق :

$$۱۲)\ a<x<b \ \Rightarrow\ \left|x-\frac{a+b}{۲}\right|<\frac{b-a}{۲}$$

اگر قرار باشد نامساوی $m<x<n$ را به‌صورت $|x-a|<b$ نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a=\dfrac{m+n}{۲} \\ b=\dfrac{n-m}{۲} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \boxed{m<x<n \Rightarrow \left|x-\frac{m+n}{۲}\right|<\frac{n-m}{۲}}$$

مثال $-۱<x<۳ \Rightarrow \left|x-\frac{-۱+۳}{۲}\right|<\frac{۳-(-۱)}{۲} \Rightarrow |x-۱|<۲$

درس سوم : تعیین علامت

تست : اگر نامساوی های $|x-۱|<۰/۱$ و $A<۲x-۳<B$ معادل هم باشندآنگاه $A+B$ کدام است؟

الف) $-۲/۱$ ب) -۲ ج) $-۱/۱$ د) -۱

۱۳) $|x+y|=|x|+|y| \quad \Leftrightarrow \quad xy\geq ۰$

مثال : فرض کنیم $f(x)=x-۲$ و $g(x)=۶-۲x$ و داریم $|f(x)|+|g(x)|=|f(x)+g(x)|$ در این صورت حدود x را بیابید.

۱۴) $|x+y|<|x|+|y| \quad \Leftrightarrow \quad xy<۰$

مجموعه جواب نامعادله ی $|x+۲|+|x-۵|<|۲x-۳|$ را بیابید.

برای حل نامعادلات قدر مطلقی از ویژگی های قدرمطلق استفاده می کنیم .

حالت اول : $|f|<g \overset{g<۰}{\Longrightarrow}$ نا معادله جواب ندارد

مثال: $|x-۲|<-۱$

حالت دوم : $|f|>g \overset{g<۰}{\Longrightarrow} D_f$ مجموعه جواب

مثال :

$\left|\sqrt{۲x}-۲\right|>-۱$

حالت سوم :

$|f|\leq g \quad \overset{g\geq ۰}{\Longrightarrow} \quad -g\leq f\leq g \Longrightarrow \begin{cases} f\leq g \\ -g\leq f \end{cases}$ اشتراک جواب ها

مثال : $|۳x-۱|\leq ۱$