کنکور آسان است

KONKURSARA

/konkursara

@konkursara_official

021-55756500
www.konkursara.com

فصل ۳ حد

بخش پذیری

فرض کنید $p(x)$, $g(x)$ دو چند جمله ای با شند در این صورت چند جمله ای های منحصر به فرد $r(x), q(x)$ وجود دارند به طوری که $p(x)=g(x)q(x)+r(x)$

$p(x)$ را مقسوم و $g(x)$ را مقسوم علیه و $q(x)$ را خارج قسمت و $r(x)$ را باقی مانده می نامند .

اگر $p(x)$ از درجه n و مقسوم علیه $g(x)$ از مرتبه m باشد آنگاه خارج قسمت $q(x)$ از درجه $(n-m)$ و باقی مانده $r(x)$ حداکثر از درجه ی $(m-1)$ است .

مثال

$p(x)$ مقسوم : درجه ۴

$g(x)$ مقسوم علیه : مرتبه ۱

$$\begin{array}{l|l} x^4-2x+1 & x-1 \\ \underline{-(x^4-x^3)} & x^3+x^2+x-1 \\ x^3-2x+1 & \\ \underline{-(x^3-x^2)} & \\ x^2-2x+1 & \\ \underline{-(x^2-x)} & \\ -x+1 & \\ \underline{-(-x+1)} & \\ 0 & \end{array}$$

$q(x)$ خارج قسمت : مرتبه ۳

$r(x)$ باقیمانده صفر شده یعنی بخش پذیراست

نکته

۱) اگر $p(x)$ یک چند جمله ای آنگاه باقی مانده تقسیم ، $p(x)$ بر $g(x)=x-a$ برابر است با : $p(a)$

۲) برای پیدا کردن باقیمانده تقسیم $p(x)$ بر $(ax+b)$ ابتدا مقسوم علیه را مساوی صفر قرار می دهیم و ریشه آن را بدست آورده و در مقسوم به جای x قرار می دهیم آنگاه داریم : $r=p\left(\dfrac{-b}{a}\right)$ بدیهی است که اگر $r=0$ باشد ، $p(x)$ بر $(ax+b)$ بخش پذیر است

۵۹) مقدار k را چنان بیابید که چند جمله ای $p(x)=2x^3-kx^2-x+3$ بر $x+1$ بخش پذیر باشد .

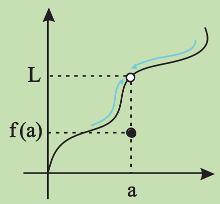
✍) $x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow p(-1)=0 \Rightarrow 2(-1)^3-k(-1)^2-(-1)+3=0 \Rightarrow k=2$

۶۰) مقدار k را طوری تعیین کنید که عبارت $8x^3+4x^2-kx-8$ بر $2x-1$ بخش پذیر با شد ؟

✍) $2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow p\left(\frac{1}{2}\right)=8\left(\frac{1}{2}\right)^3+4\left(\frac{1}{2}\right)^2-k\left(\frac{1}{2}\right)-8=0 \Rightarrow k=-12$

مفهوم حد

فرض کنید تابع $f(x)$ در یک همسایگی متقارن محذوف نقطه‌ی $x=a$ تعریف شده باشد، آن‌گاه می‌گوئیم تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ حد دارد و مقدار آن L است هر وقت با میل کردن x به سمت a مقادیر $f(x)$ هم به سمت عدد معین L میل کند. در واقع حد یعنی رفتار تابع در مجاورت نقطه a و اصلاً ربطی به مقدار تابع در نقطه a ندارد.



– **حد راست:** اگر x از طرف راست به سمت a میل کند و تابع $f(x)$ به عددی مانند $L_۱$ نزدیک شود، می‌گوئیم تابع f در نقطه‌ی a حد راست دارد و به صورت روبه‌رو نشان می‌دهیم:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=L_۱$$

– **حد چپ:** اگر x از طرف چپ به سمت a میل کند و تابع $f(x)$ به عددی مانند $L_۲$ نزدیک شود، می‌گوئیم تابع f در نقطه‌ی a حد چپ دارد و به صورت روبه‌رو نشان می‌دهیم:

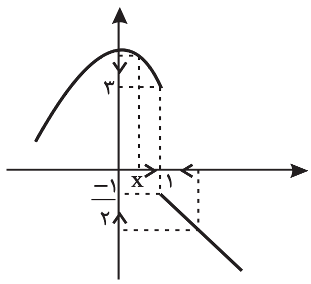
$$\lim_{x\to a^-} f(x)=L_۲$$

بررسی حد تابع از روی نمودار:

برای تعیین حد تابع از روی نمودار به شکل زیر عمل می‌کنیم:

ابتدا چند نقطه روی محور x ها در سمت راست نقطه a انتقاب می‌کنیم از این نقاط از راست به چپ خطوطی عمود بر محور xها خارج می‌کنیم و محل تقاطع آن‌ها را با نمودار تابع به دست آورده و از نقاط تقاطع به محور y ها عمود می‌کنیم. با این کار رفتار y تابع هنگامی که xها به a از سمت راست نزدیک می‌شوند را مشاهده می‌کنیم. همین کار را از سمت چپ نقطه a انجام می‌دهیم اگر شاخه‌هایی سمت چپ و راست نمودار f در x=a به عرض L روی محور y ها برسند آن‌گاه تابع در نقطه a حد دارد.

۶۱) نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{-۱}{۲}x & x\geq ۱\\ ۴-x^۲ & x<۱\end{cases}$ را رسم کنید و به کمک آن وجود حد تابع را در $x=۱$ بررسی کنید.



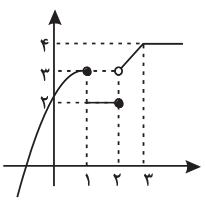
☑پاسخ:

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{-۱}{۲}x=\frac{-۱}{۲}$$

$$\lim_{x\to ۱^-} ۴-x^۲=۴-۱=۳$$

تابع در این نقطه حد ندارد زیرا:

۶۲) نمودار $f(x)$ شکل مقابل است. حاصل عبارت $۳\lim_{x\to ۲^+} f(x)-\lim_{x\to ۱^-} f(x)+۲f(۳)$ را به دست آورید.

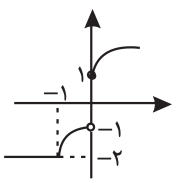


☑پاسخ:

$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=۳$ $\qquad \lim_{x\to ۱^-} f(x)=۳$ $\qquad f(۳)=۴$

$$۳\lim_{x\to ۲^+} f(x)-\lim_{x\to ۱^-} f(x)+۲f(۳)=۳(۳)-(۳)+۲(۴)=۱۴$$

۶۳) با توجه به نمودار تابع f حاصل حدهای زیر را به دست آورید.



☑پاسخ:

$\lim_{x\to -۱} f(x)=-۲$ $\qquad \lim_{x\to ۰^-} f(x)=-۱$

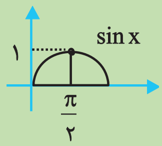
$\lim_{x\to ۰^-} [f(x)]=[-۱^-]=-۲$ $\qquad \lim_{x\to ۰^+} f(x)=۱$

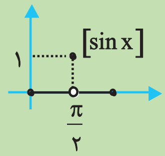
صفر مطلق

اساساً صفرمطلق یعنی تابع ای در تمامی یک بازه همواره صفر باشد یعنی به ازای x های یک بازه $f(x)=0$ می‌شود. مثلاً صفری که به وسیله براکت ساخته شود صفر مطلق است.

$$\begin{cases} 1^- \cong \quad 0 \le x < 1 \Rightarrow [1^-] = 0 & \text{صفر مطلق} \\ 0^+ \cong \quad 0 \le x < 1 \Rightarrow [0^+] = 0 & \text{صفر مطلق} \end{cases}$$

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}) \to [\sin x] = 0$$





$$\lim_{x\to 0^+}[\sin x] = [\sin 0^+] = [0^+] = 0$$

تو یه بازه این تابع صفره. بنابراین صفرش مطلقه .

حدود توابع کسری

برای محاسبه حد توابع کسری به نکات زیر توجه داریم:

اگر صورت و مخرج کسر صفر نشه که خیلی راحته. مقدار گذاری می‌کنیم. خلاص

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

اما اگه فقط مخرج صفر حدی بشه و صورت عدد ناصفر، جواب حد بی نهایت میشه.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L \ne 0}{0} = \infty$$

صفر حدی

اگه صورت و مخرج هر دو صفر بشن حالت‌های زیر رخ میده:

$$\lim_{x\to a} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}} = 0 \qquad \lim_{x\to a} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{صفر حدی}}{\text{صفر مطلق}} = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0 \ \text{صفر مطلق}}{0 \ \text{صفر مطلق}} = \text{وجود ندارد} \qquad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0 \ \text{صفر حدی}}{0 \ \text{صفر حدی}} = \text{ابهام}$$

اگر حد ابهام $\frac{0}{0}$ داشت، باید آن را رفع ابهام کنیم که روش‌های رفع ابهام را خواهیم گفت .

۶۴) حاصل حدود $1)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}}{2-\sqrt{x}}$ و $2)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2+1}{x^2-4x+4}$ را به دست آورید.

☑پاسخ:

$$1)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}}{2-\sqrt{x}} = \frac{4}{2-\sqrt{1}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$2)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2+1}{x^2-4x+4} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2+1}{(x-2)^2} = \frac{5}{(0^{\pm})^2} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

هر چند حد چپ و راست هر دو برابر $+\infty$ شده‌اند ولی به خاطر آن که عدد نیستند، تابع در این نقطه حد ندارد.

۶۵) حاصل حدود روبه‌رو را محاسبه کنید:

$$1)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{[x]}{x} \qquad 2)\ \lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{[x]-1}$$

☑پاسخ:

$$1)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{[x]}{x} = \frac{0 \ \text{مطلق}}{0 \ \text{حدی}} = 0$$

$$2)\ \lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{[x]-1} = \frac{x-1}{[1^+]-1} = \frac{0 \ \text{حدی}}{0 \ \text{مطلق}}$$

وجود ندارد

رفع ابهام $\frac{\circ}{\circ}$

روش حل مسئله

سوالات ابهام‌دار

۱) در ابتدای کار ابهام $\frac{\circ}{\circ}$ را بیان کنید و بنویسید.

۲) عامل ابهام در $\mathbf{x=a}$ ، $\mathbf{(x-a)}$ می‌باشد. که باید آن را از صورت و مخرج فاکتور بگیریم و ساده کنیم. (به این کار می گن رفع ابهام)

۳) پس از ساده کردن ، مقدار $\mathbf{x=a}$ را جایگذاری کنید و حد را به دست آورید.

۴) در هر مرحله $\mathbf{lim}$ یادت نره.

هرگاه $\frac{\circ}{\circ} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ بشه اصطلاحاً می‌گویند حد ابهام صفر صفرم داره، معنیش این که عامل $(x-a)$ یعنی عامل صفر کننده هم در صورت و هم در مخرج وجود داره و باعث ابهام $\frac{\circ}{\circ}$ می شه. برای رفع ابهام یکی از روش‌های زیر را استفاده می‌کنیم.

از عامل $(x-a)$ هم در صورت و هم در مخرج فاکتور می‌گیریم و پس از ساده نمودن مقدارگذاری می‌کنیم. (در توابع چند جمله‌ای خطی بیشتر کاربرد داره)

۶۶) حدود زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{x^{۲}+x-۶}{x-۲}$ ۲) $\lim\limits_{t\to -۱}\frac{t+۱}{t^{۳}+۱}$ ۳) $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x^{۲}-x}{x^{۲}+x-۲}$

☑پاسخ:

وقتی $x\to ۲$ عامل صفر $(x-۲)$ میشه. در صورت و مخرج از اون فاکتور گرفتیم.

۱) $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{x^{۲}+x-۶}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x+۳)}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲}(x+۳)=۵$

اتحاد چاق و لاغر

۲) $\lim\limits_{t\to -۱}\frac{t+۱}{t^{۳}+۱}=\lim\limits_{x\to -۱}\frac{(t+۱)}{(t+۱)(t^{۲}-t+۱)}=\lim\limits_{x\to -۱}\frac{۱}{(t^{۲}-t+۱)}=\frac{۱}{۳}$

۳) $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x^{۲}-x}{x^{۲}+x-۲}=\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x\cancel{(x-۱)}}{(x+۲)\cancel{(x-۱)}}=\frac{۱}{۳}$

۶۷) حد توابع زیر را محاسبه کنید. (خرداد و شهریور ۹۰)

۱) $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{x^{۳}-۸}{۳x^{۲}-۱۲}$ ۲) $\lim\limits_{x\to ۳}\left(\frac{۲}{x-۳}-\frac{۱۲}{x^{۲}-۹}\right)$

☑پاسخ:

۱) $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{x^{۳}-۸}{۳x^{۲}-۱۲}=\lim\limits_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x^{۲}+۲x+۴)}{۳(x-۲)(x+۲)}=\lim\limits_{x\to ۲}\frac{x^{۲}+۲x+۴}{۳(x+۲)}=\frac{۱۲}{۱۲}=۱$

۲) $\lim\limits_{x\to ۳}\left(\frac{۲}{x-۳}-\frac{۱۲}{x^{۲}-۹}\right)=\lim\limits_{x\to ۳}\left(\frac{۲}{x-۳}-\frac{۱۲}{(x-۳)(x+۳)}\right)=\lim\limits_{x\to ۳}\frac{۲x-۶}{(x-۳)(x+۳)}=\lim\limits_{x\to ۳}\frac{۲\cancel{(x-۳)}}{\cancel{(x-۳)}(x+۳)}=\lim\limits_{x\to ۳}\frac{۲}{(x+۳)}=\frac{۱}{۳}$

نکته

نکته : اگر تجزیه صورت و مخرج برای یافتن عامل ابهام مشکل باشد می توانیم با تقسیم هر کدام بر $(x-a)$ آن را تجزیه کنیم.

۶۸) حدود توابع زیر را تعیین کنید.

$$۱)\ \lim_{x\to -۱}\frac{x^۳-۲x-۱}{x^۲-۱}\qquad ۲)\ \lim_{x\to ۲}\frac{x^۳-x^۲-x-۲}{x^۴-۲x^۳-x^۲+۲x}\qquad ۳)\ \lim_{x\to ۱}\frac{x^۴-۲x+۱}{۲x^۲-۳x+۱}$$

☑پاسخ:

$$۱)\ \lim_{x\to -۱}\frac{x^۳-۲x-۱}{x^۲-۱}=\lim_{x\to -۱}\frac{\cancel{(x+۱)}\left(x^۲-x-۱\right)}{\cancel{(x+۱)}(x-۱)}=\lim_{x\to -۱}\frac{x^۲-x-۱}{x-۱}=\frac{۱}{-۲}$$

$$۲)\ \lim_{x\to ۲}\frac{x^۳-x^۲-x-۲}{x^۴-۲x^۳-x^۲+۲x}=\lim_{x\to ۲}\frac{\cancel{(x-۲)}(x^۲+x+۱)}{\cancel{(x-۲)}(x^۳-x)}=\frac{۴+۲+۱}{۸-۲}=\frac{۷}{۶}$$

$$۳)\ \lim_{x\to ۱}\frac{x^۴-۲x+۱}{۲x^۲-۳x+۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\cancel{(x-۱)}(x^۳+x^۲+x-۱)}{\cancel{(x-۱)}(۲x-۱)}=\frac{۲}{۱}=۲$$

$$\begin{array}{l|l}
x^۴-۲x+۱ & x-۱ \\ \hline
-(x^۴-x^۳) & x^۳+x^۲+x-۱ \\
x^۳-۲x+۱ & \\
-(x^۳-x^۲) & \\
x^۲-۲x+۱ & \\
-(x^۲-x) & \\
-x+۱ & \\
-(-x+۱) & \\
۰ &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l|l}
۲x^۲-۳x+۱ & x-۱ \\ \hline
-(۲x^۲-۲x) & ۲x-۱ \\
-x+۱ & \\
-(-x+۱) & \\
۰ &
\end{array}$$

روش حل مسئله

۲) هرگاه صورت یا مخرج عامل ابهام رادیکالی داشته باشد (مثلا: $\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)$) صورت و مخرج را در مزدوج عامل رادیکالی ضرب می کنیم پس از گویا و ساده کردن رفع ابهام نموده، حد را به دست می‌آوریم.

مزدوج‌های مهم:

$$(x-a)(x+a)=x^۲-a^۲\qquad \left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)=x-a$$

$$(x\pm a)\left(x^۲\mp ax+a^۲\right)=x^۳\pm a^۳\qquad \left(\sqrt[۳]{x}\pm\sqrt[۳]{a}\right)\left(\sqrt[۳]{x^۲}\mp\sqrt[۳]{x}\sqrt[۳]{a}+\sqrt[۳]{a^۲}\right)=x\pm a$$

۶۹) حد زیر را محاسبه کنید. (خرداد ۹۳)

۱) $\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{\sqrt{x}-۲}{x^{۲}-۱۶}$ ۲) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sqrt{x}-۱}{۲x-۲}$

☑پاسخ:

۱) $\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{\sqrt{x}-۲}{x^{۲}-۱۶}=\dfrac{۰}{۰}\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{\sqrt{x}-۲}{x^{۲}-۱۶}\times\dfrac{\sqrt{x}+۲}{\sqrt{x}+۲}=\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{\cancel{(x-۴)}}{\cancel{(x-۴)}(x+۴)(\sqrt{x}+۲)}=\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{۱}{(x+۴)(\sqrt{x}+۲)}=\dfrac{۱}{۳۲}$

۲) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sqrt{x}-۱}{۲x-۲}=\dfrac{۰}{۰}\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sqrt{x}-۱}{۲(x-۱)}\times\dfrac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱}=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\cancel{(x-۱)}}{۲\cancel{(x-۱)}(\sqrt{x}+۱)}=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{۱}{۲(\sqrt{x}+۱)}=\dfrac{۱}{۴}$

۷۰) حدود روبه رو را محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{x-۲}{\sqrt{۲x}-۲}$ ۲) $\lim\limits_{x\to ۸}\dfrac{x^{۲}-۶۴}{\sqrt[۳]{x}-۲}$ ۳) $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{\sqrt{۳x+۷}-۴}{۹-x^{۲}}$

☑پاسخ:

۱) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{x-۲}{\sqrt{۲x}-۲}\times\dfrac{\sqrt{۲x}+۲}{\sqrt{۲x}+۲}=\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{(x-۲)\left(\sqrt{۲x}+۲\right)}{۲x-۴}=\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{\cancel{(x-۲)}\left(\sqrt{۲x}+۲\right)}{۲\cancel{(x-۲)}}=\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{\sqrt{۲x}+۲}{۲}=۲$

۲) $\lim\limits_{x\to ۸}\dfrac{x^{۲}-۶۴}{\sqrt[۳]{x}-۲}=\lim\limits_{x\to ۸}\dfrac{(x-۸)(x+۸)}{\left(\sqrt[۳]{x}-۲\right)}\times\dfrac{\sqrt[۳]{x^{۲}}+۲\sqrt[۳]{x}+۴}{\sqrt[۳]{x^{۲}}+۲\sqrt[۳]{x}+۴}=\lim\limits_{x\to ۸}\dfrac{\cancel{(x-۸)}(x+۸)\left(\sqrt[۳]{x^{۲}}+۲\sqrt[۳]{x}+۴\right)}{\cancel{(x-۸)}}=۱۹۲$

۳) $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{\sqrt{۳x+۷}-۴}{۹-x^{۲}}=\dfrac{۰}{۰}=\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{\sqrt{۳x+۷}-۴}{(۳-x)(۳+x)}\times\dfrac{\sqrt{۳x+۷}+۴}{\sqrt{۳x+۷}+۴}=\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{۳x-۹}{(۳-x)(۳+x)(۸)}=\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{۳\cancel{(x-۳)}}{-\cancel{(x-۳)}(x+۳)(۸)}=\dfrac{-۱}{۱۶}$

۷۱) حدود توابع زیر را محاسبه کنید. (خرداد وشهریور ۹۴- خارج کشور)

۱) $\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{x-۴}{\sqrt{x}-۲}$ ۲) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x-۱}{\sqrt{x}-۱}$

☑پاسخ:

۱) $\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{x-۴}{\sqrt{x}-۲}=\dfrac{۰}{۰}\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{x-۴}{\sqrt{x}-۲}\times\dfrac{\sqrt{x}+۲}{\sqrt{x}+۲}=\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{\cancel{(x-۴)}(\sqrt{x}+۲)}{\cancel{(x-۴)}}=\sqrt{۴}+۲=۴$

۲) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x-۱}{\sqrt{x}-۱}=\dfrac{۰}{۰}\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x-۱}{\sqrt{x}-۱}\times\dfrac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱}=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\cancel{(x-۱)}(\sqrt{x}+۱)}{\cancel{(x-۱)}}=\lim\limits_{x\to ۱}\sqrt{x}+۱=۲$

۷۲) حد تابع زیر را تعیین کنید.

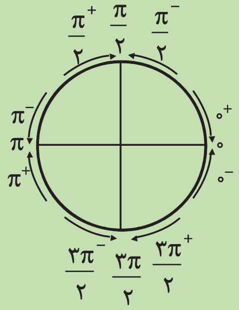
$\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x^{۲}-۱}{۱-\sqrt{x}}$

☑پاسخ:

$\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x^{۲}-۱}{۱-\sqrt{x}}=\dfrac{۰}{۰}=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{(x-۱)(x+۱)}{۱-\sqrt{x}}\times\dfrac{۱+\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\cancel{(x-۱)}(x+۱)\left(۱+\sqrt{x}\right)}{۱-x=-\cancel{(x-۱)}}=-۴$

حدود توابع مثلثاتی در نقاط مرزی

در محاسبه حدهای یک طرفه در توابع مثلثاتی دونستن این که زاویه در کدوم ناحیه مثلثاتیه خیلی مهمه. مثلا وقتی $x \to 0^-$ یعنی x در ربع چهارمه و به صفر نزدیک میشه، یا وقتی $x \to 0^+$ یعنی x در ربع اوله و به صفر نزدیک میشه. این مطالب را در شکل زیر بررسی می‌کنیم.



تعریف نشده $\tan\frac{\pi}{2}$ ناحیه دوم $\tan\frac{\pi^+}{2} = -\infty$ ناحیه اول $\tan\frac{\pi^-}{2} = +\infty$

تعریف نشده $\tan\frac{3\pi}{2}$ ناحیه چهارم $\tan\frac{3\pi^+}{2} = -\infty$ ناحیه سوم $\tan\frac{3\pi^-}{2} = +\infty$

۷۳) حاصل حدود زیر را بیابید.

۱) $\lim\limits_{x \to \frac{5\pi}{2}^+} \tan x$ ۲) $\lim\limits_{x \to \frac{-\pi}{3}^+} \frac{\cos(x+\frac{\pi}{3})}{\sin(x+\frac{\pi}{3})}$ ۳) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos x}$ ۴) $\lim\limits_{x \to \pi^+} \frac{1}{\sin x}$ ۵) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos x}{1-\sin x}$

☑پاسخ:

۱) $\lim\limits_{x \to \frac{5\pi}{2}^+} \tan x = \lim\limits_{x \to \frac{5\pi}{2}^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

۲) $\lim\limits_{x \to \frac{-\pi}{3}^+} \frac{\cos(x+\frac{\pi}{3})}{\sin(x+\frac{\pi}{3})} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

۳) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

۴) $\lim\limits_{x \to \pi^+} \frac{1}{\sin x} = \lim\limits_{x \to \pi^+} \frac{1}{\sin \pi^+} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

۵) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos x}{1-\sin x} = \frac{1+0}{1-1^-} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

روش حل مسئله

در حالت ابهام $\frac{0}{0}$ اگر عامل ابهام در صورت یا مخرج داخل قدر مطلق باشه، باید تکلیف قدر مطلق را با تعیین علامت مشخص کنیم و حد چپ و راست را جداگانه بررسی کنیم.

۷۴) حدود زیر را محاسبه کنید.

$$۱)\ \lim_{x\to ۳^+}\frac{|۹-x^۲|}{x-۳}\qquad ۲)\ \lim_{x\to ۳^-}\frac{x^۲-۷}{|۳-x|}\qquad ۳)\ \lim_{x\to ۱}\frac{|x^۲-۱|}{x-۱}$$

☑ پاسخ:

$$۱)\ \lim_{x\to ۳^+}\frac{|۹-x^۲|}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^+}\frac{-(۳-x)(۳+x)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^+}\frac{\cancel{(x-۳)}(x+۳)}{\cancel{(x-۳)}}=\lim_{x\to ۳^+}(۳+x)=۶$$

$$۲)\ \lim_{x\to ۳^-}\frac{x^۲-۷}{|۳-x|}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{x^۲-۷}{۳-x}=\frac{۲}{۰^+}=+\infty$$

$$۳)\ \lim_{x\to ۱}\frac{|x^۲-۱|}{x-۱}=\frac{۰}{۰}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{(x-۱)(x+۱)}{x-۱}=۲\\[2mm]\lim\limits_{x\to ۱^-}\dfrac{-(x-۱)(x+۱)}{x-۱}=-۲\end{cases}$$

۷۵) حاصل حدود زیر را به دست آورید.

$$۱)\ \lim_{x\to ۳^-}\frac{|x-۳|+|x^۲-۹|}{|x-۳|}\qquad ۲)\ \lim_{x\to ۳^-}\frac{x^۲-۴}{|x^۲-۵x+۶|}$$

☑ پاسخ:

$$۱)\ \lim_{x\to ۳^-}\frac{|x-۳|+|x^۲-۹|}{|x-۳|}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{|x-۳|+|x-۳||x+۳|}{|x-۳|}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{\cancel{|x-۳|}(۱+|x+۳|)}{\cancel{|x-۳|}}=\lim_{x\to ۳^-}(۱+|x+۳|)=۱+|۳+۳|=۷$$

$$۲)\ \lim_{x\to ۳^-}\frac{x^۲-۴}{|x^۲-۵x+۶|}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{(x-۲)(x+۲)}{|(x-۲)(x-۳)|}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{\cancel{(x-۲)}(x+۲)}{\cancel{(x-۲)}(x-۳)}=\frac{۴}{-۱}=-۴$$

روش حل مسئله

برای محاسبه‌ی حدودی که شامل عبارت براکتی است، اول تکلیف قسمت براکتی را تعیین می‌کنیم و به جای آن عدد صحیح مناسب را قرار می‌دهیم، سپس به ادامه حد می‌پردازیم.

۷۶) حدود توابع زیر را محاسبه کنید.

$$۱)\ \lim_{x\to ۳^+}\frac{[x]-۳}{x-۳}\qquad ۲)\ \lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۳-[x^۳]}{x-[x]}$$

☑ پاسخ:

$$۱)\ x\to ۳^+\Rightarrow ۳\le x<۴\Rightarrow [x]=۳\Rightarrow [۳^+]=۳\Rightarrow \lim_{x\to ۳^+}\frac{[x]-۳}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^+}\frac{[۳^+]-۳}{x-۳}=\frac{۰\ \text{مطلق}}{۰\ \text{حدی}}=۰$$

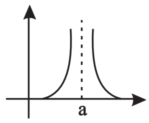
$$\boxed{[(۱^+)^۳]=۱}$$

$$۲)\ \lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۳-[x^۳]}{x-[x]}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۳-۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{\cancel{(x-۱)}(x^۲+x+۱)}{\cancel{(x-۱)}}=۳$$

$$\boxed{[(۱^+)]=۱}$$

حدود نامتناهی :

اگر تابع f در همسایگی محذوف نقطه $x=a$ تعریف شده باشد و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ شود ،معنایش این است که مقادیر y تابع یعنی عرض آن از هر عدد مثبت بسیار بزرگی ، بزرگتر است به شرط آن که x به اندازه کافی به a نزدیک شود (در مجاورت $x=a$ عرض تابع بیکران یا همان بی نهایت می شود)



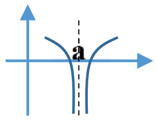
$\left|\begin{array}{l} x\to a \text{ عدد} \\ y\to +\infty \end{array}\right.$

۷۷) حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+1}{x^2-4x+4}$ را به دست آورید .

✍)
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+1}{x^2-4x+4}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+1}{(x-2)^2}=\frac{5}{(0^\pm)^2}=\frac{5}{0^+}=+\infty$$

هر چند ، حد چپ و راست هر دو برابر $+\infty$ شده اند ولی به خاطر آن که عدد نیستند ، تابع در این نقطه حد ندارد .

اگر تابع f در همسایگی محذوف نقطه $x=a$ تعریف شده باشد و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ شود ،معنایش این است که مقادیر y تابع یعنی عرض آن از هر عدد منفی کوچکتر است به شرط آن که x به اندازه کافی به a نزدیک شود .



$\left|\begin{array}{l} x\to a \text{ عدد} \\ y\to -\infty \end{array}\right.$

مثلاً
$$\lim_{x\to -3}\frac{x-4}{x^2+6x+9}=\lim_{x\to -3}\frac{x-4}{(x+3)^2}=\frac{-7}{(0^\pm)^2}=\frac{-7}{0^+}=-\infty$$

بعضی وقت ها حاصل حد در یک نقطه ۲ تا بی نهایت با علامت های متفاوت میشه

مثلاً)
$$\lim_{x\to 2}\frac{2x+1}{x-2}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2x+1}{x-2}=\dfrac{5}{0^+}=+\infty\\[2mm] \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2x+1}{x-2}=\dfrac{5}{0^-}=-\infty\end{cases}$$

در توابع کسری ریشه هایی از مخرج کسر ، به شرط آن که در این نقاط بتوان حد گرفت و حد ∞ شود . (یعنی باید در همسایگی چپ یا راست ریشه مخرج تابع تعریف شده باشد) حدود بی نهایتی ایجاد می کنند .

۷۸) حاصل حدود زیر را محاسبه کنید:

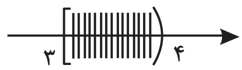
۱) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{[x]}{x}$ ۲) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{[x]-3}$ ۳) $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

☑ پاسخ:

۱) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3}{x^2}=\dfrac{3}{0^+}=+\infty$

می‌دانیم:

$$۲)\ D_f = R - \{x \mid [x] - ۳ = ۰\} = R - [۳,۴)$$



$\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)$ این حد وجود ندارد، چون در همسایگی راست این نقطه تابع تعریف نشده

$$\lim_{x\to ۳^-} f(x) = \lim_{x\to ۳^-} \frac{۱}{[۳^-] - ۳} = \frac{۱}{۲-۳} = -۱$$

$$۳)\ \lim_{x\to -۱} \sqrt{\frac{۱-x}{۱+x}} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -۱^+} \sqrt{\frac{۱-x}{۱+x}} = \sqrt{\frac{۲}{۰^+}} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -۱^-} \sqrt{\frac{۱-x}{۱+x}} = \sqrt{\frac{۲}{۰^-}} = \end{cases}$$

با توجه به دامنه اساساً این حد وجود ندارد
چون در سمت چپ نقطه $x = -۱$ تابع
تعریف نشده .

x		-۱		۱	
$\frac{۱-x}{۱+x}$	$-$	۰	$+$	ت ن	$-$

۷۹) حدود زیر را محاسبه کنید .

$$\lim_{x\to ۰} \frac{۱}{|x|} + \frac{x^۲+۱}{\sin^۲ x} = \frac{۱}{|۰^\pm|} + \frac{(۰^\pm)^۲+۱}{(۰^\pm)^۲} = \frac{۱}{۰^+} + \frac{۱}{۰^+} = (+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to ۰^+} \frac{۱}{x^۲ - ۳x} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{۱}{x(x-۳)} = \frac{۱}{۰^+(۰^+ - ۳)} = \frac{۱}{۰^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to \frac{۱}{۲}} \frac{[x]-۳}{|۲x-۱|} = \lim_{x\to \frac{۱}{۲}} \frac{۰-۳}{|۰^\pm|} = \frac{-۳}{۰^+} = -\infty$$

حد در بینهایت : اگه متغییر ما بره به سمت بینهایت یعنی $x \to \infty$ و عرض تابع یعنی y آن به یک عدد نزدیک شود می گوییم تابع ما در بینهایت حد دارد و می نویسیم : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$

به عبارت دیگر

$x \to \infty$
$y \to$ عدد بشه

در کتاب درسی تاکید به محاسبه حد در بینهایت توابع کسری که صورت و مخرج آنها چند جمله ای باشند داره . برای محاسبه حد توابع کسری وقتی $x \to +\infty$ یا $x \to -\infty$ میل می کند در صورت و مخرج از بزرگترین توان x فاکتور بگیر، ساده کن و حاصل حد رو پیدا کن .

یادت باشه : در توابع کسری وقتی $x \to \pm\infty$ میل می کند و صورت و مخرج کسر ∞ می شود و ابهام $\frac{\infty}{\infty}$ رخ می دهد می توان از قاعده پرتوان استفاده کرد یعنی در صورت و مخرج جمله ای که بزرگترین توان از x را دارد در نظر می گیریم و حد عبارت حاصل را محاسبه می کنیم .

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^n+bx^{n-۲}+\ldots\ldots}{a'x^m+b'x^{m-۱}+\ldots\ldots}=\xrightarrow{\text{قاعده پرتوان}}\lim_{x\to\infty}\frac{ax^n}{a'x^m}=\begin{cases}\frac{a}{a'} & n=m\\ ۰ & n<m\\ \infty & n>m\end{cases}$$

یعنی

۱) وقتی جواب حد عدد ناصفر بشه معنیش اینکه توان صورت و مخرج برابره

۲) اگه جواب حد صفر بشه توان مخرج بیشتر از توان صورته .

۳) اگه بی نهایت شد یعنی توان و مرتبه ی صورت بزرگتراز توان و مرتبه ی مخرجه .

۸۰) حاصل $\lim_{x\to-\infty}\left(۹+\frac{۷}{x^۳}\right)$ چند برابر $\lim_{x\to-\infty}\frac{-۶x^۳+۷x-۹}{۲x^۳-۴x^۲+x}$ است ؟

$$\lim_{x\to-\infty}\left(۹+\frac{۷}{x^۳}\right)=\lim_{x\to-\infty}۹+\frac{۷}{(-\infty)^۳}=۹+۰=۹$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-۶x^۳+۷x-۹}{۲x^۳-۴x^۲+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-۶\cancel{x^۳}}{۲\cancel{x^۳}}=\frac{-۶}{۲}=-۳$$

هر دو تابع ، هنگامی که x شان بینهایت می شود ، عرض شان عدد شده، پس هر دو در بینهایت حد دارند و اولی -۳ برابر دومی است .

۸۱) حدود زیر را محاسبه کنید

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۲\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}+۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^۳-۲x+۴}{x^۲+۳x-۲x^۳}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^۳}{-۲x^۳}=\frac{-۱}{۲}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^۲+۳x-۵}{x^۳-x+۱}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^۲}{x^۳}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۱}{x}=\frac{۱}{-\infty}=۰$$

۸۲) حاصل حد $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^۲+۲x+۳}-x}{۳x-۱}$ را به دست آورید .

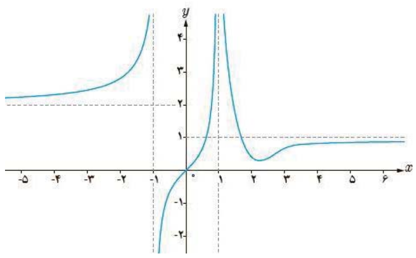
رادیکال میره به سمت ۱

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^۲+۲x+۳}-x}{۳x-۱}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^۲\left(۱+\frac{۲}{x}+\frac{۳}{x^۲}\right)}-x}{۳x-۱}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{۱+\frac{۲}{x}+\frac{۳}{x^۲}}-x}{۳x-۱}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\left(\sqrt{۱+\frac{۲}{x}+\frac{۳}{x^۲}}+۱\right)}{۳x}=\frac{-۲x}{۳x}=\frac{-۲}{۳}$$

۸۳) حاصل حد $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{۵x^{۲}+\sqrt{x^{۲}+x}}{۲x^{۲}-۳x-۱}$ را حساب کنید .

$$\lim_{x\to\infty}\frac{۵x^{۲}+\sqrt{x^{۲}+x}}{۲x^{۲}-۳x-۱}=\lim_{x\to\infty}\frac{۵x^{۲}}{۲x^{۲}}=\frac{۵}{۲}$$

۸۴) حاصل تمامی حدود زیر را محاسبه کنید .



$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=۲$$

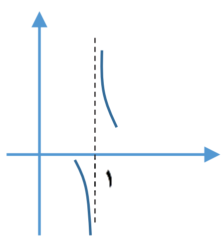
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=۱$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)]+\lim_{x\to+\infty}[f(x)]=[۲^{+}]+[۱^{-}]=۲+۰=۲$$

$$\lim_{x\to۱}f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-۱}f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to-۱^{+}}f(x)=-\infty\\[2ex]\lim\limits_{x\to-۱^{-}}f(x)=+\infty\end{cases}$$

۸۵) حد کدام تابع شبیه شکل مقابل است ؟



۱) $\lim\limits_{x\to۱}\dfrac{-x}{x-۱}$

۲) $\lim\limits_{x\to۱}\dfrac{۱}{(x-۱)^{۲}}$

۳) $\lim\limits_{x\to۱}\dfrac{۱}{\sqrt{۱-x}}$

۴) $\lim\limits_{x\to۱}\dfrac{-۱}{۱-x}$

$$\lim_{x\to۱}\frac{-۱}{۱-x}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to۱^{+}}\dfrac{-۱}{۱-x}=\dfrac{-۱}{۰^{-}}=+\infty\\[2ex]\lim\limits_{x\to۱^{-}}\dfrac{-۱}{۱-x}=\dfrac{-۱}{۰^{+}}=-\infty\end{cases}$$