کنکور آسان است

KONKURSARA

فصل سوم ؛ توان های گویا و عبارت های جبری :

درس اول ؛ ریشه و توان

در سال های گذشته با مفهوم ریشه و توان آشنا شدیم و می دانیم ریشه و توان رابطه ای دو طرف دارند ، یعنی : $۲^۳ = ۸ \Leftrightarrow \sqrt[۳]{۸} = ۲$

مربع یا توان دوم : اگر a یک عدد حقیقی باشد، a^2 را توان دوم یا مربع a می گوییم . به عنوان مثال ....

ریشه دوم : اگر a یک عدد حقیقی **مثبت** باشد، $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ را ریشه های دوم a می نامیم . به عنوان مثال ....

نکته : عدد های منفی ریشه دوم ندارند، ریشه دوم عدد صفر خود صفر است و هر عدد حقیقی مثبت دو ریشه دوم قرینه هم دارد.

مکعب یا توان سوم : اگر a یک عدد حقیقی باشد، a^3 را توان سوم یا مکعب a می گوییم . به عنوان مثال ....

ریشه دوم : اگر a یک عدد حقیقی باشد، $\sqrt[3]{a}$ را ریشه سوم a می نامیم . به عنوان مثال ....

نکته : همه ی اعداد حقیقی، دقیقا یک ریشه سوم هم علامت با خود دارند.

نکته : اگر a یک عدد حقیقی باشد : $\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$

مثال ۱ : مانند نمونه تساوی های زیر را تکمیل کنید .

$\sqrt{۸۱} = ۹ \Leftrightarrow ۹^۲ = ۸۱$ $(-۳)^۳ = -۲۷ \Leftrightarrow \sqrt[۳]{-۲۷} = -۳$

$\sqrt{۵۰} = ۵\sqrt{۲} \Leftrightarrow$ $۲^۴ = ۱۶ \Leftrightarrow$

$\sqrt[۳]{-۸} = -۲ \Leftrightarrow$ $(۰/۲۵)^۲ = ۰/۰۶۲۵ \Leftrightarrow$

گاهی اوقات با اعدادی برخورد می کنیم که مجذور و یا مکعب کامل نیستند و برای محاسبه ریشه آن ها باید به روش تقریبی عمل کنیم . به مثال زیر توجه کنید .

به عنوان مثال $\sqrt[3]{20}$ یک عدد صحیح نمی باشد ولی می دانیم $3^3=27$ و $2^3=8$ و $8 < 20 < 27$ پس :

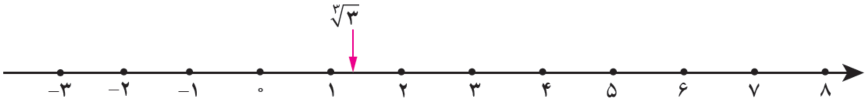
$$\sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{20} < \sqrt[3]{27} \longrightarrow 2 < \sqrt[3]{20} < 3$$

با توجه به اینکه باید عددی بین 2 و 3 را انتخاب کنیم ، یک عدد دلخواه مانند 2.5 را انتخاب می کنیم و توان سوم آن را حساب میکنیم ؛ $(2.5)^3=15.625$
مشاهده می شود از مقدار مد نظر ما یعنی 20 کمتر شد ، پس عدد بزرگتری مانند 2.7 را انتخاب می کنیم و مشاهده می کنیم $(2.7)^3=19.7$ که عدد قابل قبولی است .

بنابراین : $\sqrt[3]{20} \approx 2.7$

مثال ۲ : مقدار تقریبی یا دقیق ریشه هارا حساب کنید و مانند نمونه روی محور نمایش دهید .

$\sqrt[3]{-۸} =$ $\quad$ $\sqrt[2]{۲۵} =$ $\quad$ $\sqrt[3]{۴} \simeq$ $\quad$ $\sqrt[3]{۳} \simeq ۱/۴$ $\quad$ $\sqrt[3]{۱}$



مثال ۳ : در جای خالی عدد صحیح مناسب قرار دهید .

ب) $\square < \sqrt{۱۷} < \square$ $\qquad$ پ) $\square < \sqrt{۳۰} < \square$

ت) $\square < \sqrt[3]{-۷} < \square$ $\qquad$ ث) $\square < \sqrt[3]{۷۲} < \square$

مثال ۴ : اگر $4 < \sqrt[3]{a} < 5$ باشد، به جای a چه اعداد طبیعی می توان قرار داد ؟

همانند ریشه دوم و سوم ، ریشه چهارم و پنجم نیز تعریف می شود ، به عنوان مثال :

....

....

....

نکته : هر عدد مثبت .... ریشه چهارم دارد که .... یکدیگراند . عدد های منفی ریشه چهارم ندارند .

نکته : ریشه پنجم نیز مانند ریشه سوم برای هر عدد یکتا است . اعداد منفی نیز ریشه پنجم دارند ، ریشه پنجم برای اعداد مثبت عددی مثبت و برای اعداد منفی عددی منفی است .

مثال ۵ : حاصل عبارت های زیر را حساب کنید .

$\sqrt[4]{625} =$ $\qquad$ $\sqrt[4]{81} =$ $\qquad$ $\sqrt[4]{16} =$ $\qquad$ $\sqrt[4]{1} =$

$\sqrt[5]{3125} =$ $\qquad$ $\sqrt[5]{243} =$ $\qquad$ $\sqrt[5]{32} =$ $\qquad$ $\sqrt[5]{1} =$

$\sqrt[5]{-3125} =$ $\qquad$ $\sqrt[5]{-243} =$ $\qquad$ $\sqrt[5]{-32} =$ $\qquad$ $\sqrt[5]{-1} =$

درس دوم ؛ ریشه nام :

همانند آنچه برای ریشه های دوم،سوم ، چهارم و پنجم تعریف شد ، می توان برای ریشه های دیگر نیز به همین صورت عمل کرد .

جدول مقابل را برای عدد ۶۴ کامل کنید .

ریشه‌های هشتم	ریشه هفتم	ریشه‌های ششم	ریشه پنجم	ریشه‌های چهارم	ریشه سوم	ریشه‌های دوم
			$\sqrt[5]{۶۴}$	$\sqrt[4]{۶۴}$ و $-\sqrt[4]{۶۴}$		$\sqrt{۶۴}=۸$ و $-\sqrt{۶۴}=-۸$

به طور کلی اعداد :
- اعداد مثبت
  - دو ریشه زوج قرینه هم دارند . مانند :
  - یک ریشه فرد دارند . مانند :
- اعداد منفی
  - ریشه زوج ندارند .
  - یک ریشه فرد دارند . مانند :

نکته : اگر $n \geq 2$ یک عدد طبیعی باشد، b را یک ریشه nام عدد a می نامیم، هرگاه : $b^n = a$

نکته : به طور کلی اگر n زوج باشد، $\sqrt[n]{a^n} =$ .... واگر n فرد باشد ، $\sqrt[n]{a^n} =$ ....

مثال ۶ : در هریک از تساوی های زیر مقدار x را به دست آورید.

3) $\sqrt[4]{x} = 5$ 2) $\sqrt[7]{x} = \frac{1}{2}$ 1) $\sqrt[3]{x} = -1.3$

مثال ۷ : عبارت $\sqrt[4]{\frac{x+1}{2} - \frac{x}{3}}$ به ازای کدام مقادیر حقیقی x تعریف شده است؟

همچنین تمامی روابطی که در پایه نهم برای ضرب و تقسیم ریشه دوم و سوم خواندیم ، برای ریشه nام نیز صدق می کنند .

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\begin{cases}\sqrt[n]{ab} & a,b>0 \text{ و } n \text{ زوج}\\ \sqrt[n]{ab} & a,b \text{ دلخواه و } n \text{ یک عدد طبیعی فرد}\end{cases}$$

مثال ۸ : حاصل عبارت های زیر را حساب کنید .

۱) $\sqrt[5]{۱۰۲۴}=$

۲) $\sqrt[6]{۶۴}=$

۳) $\sqrt[4]{۰/۰۶۲۵}=$

۴) $\sqrt{\frac{۱۲۱}{۱۰۰}}=$

۵) $\sqrt[3]{(۲\sqrt{۲})^۲}=$

۶) $\sqrt[3]{\frac{۱}{x^۳}}=$

۷) $\sqrt{۸\sqrt{۴\sqrt[3]{۶۴}}}=$

۸) $\sqrt[3]{۲\frac{۱۰}{۲۷}}=$

خلاصه ای از قوانین رادیکال ها :

۱) $\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}a & n \text{ فرد}\\ |a| & n \text{ زوج}\end{cases}$

۲) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ واضح است که باید b, a مثبت باشند.

۳) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

۴) $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m} \qquad m,n\in\mathbb{N}, \quad a\geq ۰$

۵) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a} \qquad m,n\in\mathbb{N}, \quad a\geq ۰$

۶) $a\sqrt[n]{b}=\begin{cases}\sqrt[n]{a^nb} & n>۱ \quad n \text{ فرد}\\ \sqrt[n]{a^nb} & b\geq ۰ \quad a\geq ۰ \quad n \text{ زوج}\\ -\sqrt[n]{a^nb} & b\geq ۰ \quad a\leq ۰ \quad n \text{ زوج}\end{cases}$

۷) $\sqrt[mn]{a^m}=\sqrt[n]{a} \qquad a>۰, \qquad m,n\in\mathbb{N}$

نکته :

۱) اگر $a>۱$ ، آن‌گاه با بزرگ شدن فرجه، عدد حاصل کوچک‌تر می‌شود. به‌عبارت دیگر داریم:
$$a>۱\Rightarrow\sqrt{a}>\sqrt[3]{a}>\sqrt[4]{a}>\cdots$$

۲) اگر $۰<a<۱$ ، آن‌گاه با بزرگ شدن فرجه، عدد حاصل بزرگ‌تر می‌شود. به‌عبارت دیگر داریم:
$$۰<a<۱\Rightarrow\sqrt{a}<\sqrt[3]{a}<\sqrt[4]{a}<\cdots$$

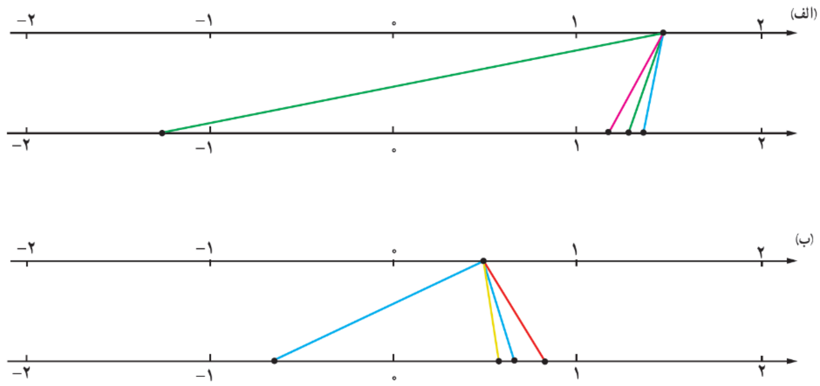
۳) اگر $-۱<a<۰$ ، آن‌گاه با بزرگ شدن فرجه، عدد حاصل کوچک‌تر می‌شود. به عبارت دیگر داریم:
$$-۱<a<۰\Rightarrow\sqrt[3]{a}>\sqrt[5]{a}>\sqrt[7]{a}>\cdots$$

۴) اگر $a<-۱$ ، آن‌گاه با بزرگ شدن فرجه، عدد حاصل بزرگ‌تر می‌شود. به‌عبارت دیگر داریم:
$$a<-۱\Rightarrow\sqrt[3]{a}<\sqrt[5]{a}<\sqrt[7]{a}<\cdots$$

توجه کنید که در موارد (۳) و (۴)، فرجهٔ زوج a تعریف نمی‌شود.

۵) اگر $a=۰$ یا $a=۱$ باشد، آن‌گاه:
$$\sqrt{a}=\sqrt[3]{a}=\sqrt[4]{a}=\cdots=a$$

مثال ۹ :در هریک از شکل های زیر، نقطه ای از محور بالا به ریشه های سوم، چهارم و پنجم خود وصل شده است. مشخص کنید هر خط مربوط به کدام ریشه است ؟



نکته : اگر a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند و ریشه n ام آن ها تعریف شده باشد ، در این صورت :

$$a > b \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$$

ویژه دانش آموزان تلاشگر: آیا بدون استفاده از ماشین حساب امکان محاسبه رادیکال ها با دقت بالا وجود دارد ؟

بله به کمک فرمول زیر می توان با دقت نسبتا خوبی حساب کرد .

$$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a^n \pm b} \approx a \pm \frac{b}{na^{n-1}}$$

به مثال مقابل توجه کنید :

$$\sqrt[3]{65} = \sqrt[3]{4^3 + 1} \approx 4 + \frac{1}{3 \times 4^2} = 4 + 0/02 = 4/02$$

$$\sqrt[5]{30} = \sqrt[5]{2^5 - 2} \approx 2 - \frac{2}{5 \times 2^4} = 2 - 0/02 = 1/98$$

درس سوم ؛ توان های گویا :

برای هر عدد طبیعی $n\geq 2$ ، توان $\frac{1}{n}$ عدد مثبت a را اینگونه تعریف می کنیم ؛

$$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$$

باید به این نکته توجه کرد که اگر $a<0$ باشد ، توان $\frac{1}{n}$ آن تعریف نمی شود .به عنوان مثال عبارتی مانند $(-2)^{\frac{1}{3}}$ تعریف نمی شود.

برای اعداد طبیعی n و m ، توان کسری و غیر صحیح $\frac{m}{n}$ عدد مثبت a را اینگونه تعریف می کنیم ؛

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

مثال ۱۰ : اعداد توان دار زیر را در صورت امکان به شکل رادیکالی بنویسید .

$3^{\frac{2}{7}}=$ $\qquad$ $(-2)^{\frac{1}{5}}=$ $\qquad$ $16^{\frac{1}{2}}=$ $\qquad$ $5^{\frac{1}{7}}=$

$81^{\frac{1}{4}}=$ $\qquad$ $(-2)^{\frac{3}{-2}}=$ $\qquad$ $3^{\frac{-2}{7}}=$ $\qquad$ $((-2)^2)^{\frac{1}{2}}=$

نکته : اگر r و s دو عدد گویا باشند، و $a>0$ قواعد توان برای اعداد گویا مانند اعداد صحیح برقرار بوده و داریم :

۱) $a^r\times a^s=a^{r+s}$

۲) $(a^r)^s=a^{rs}$

۳) $(ab)^r=a^r\times b^r$

مثال ۱۱ : تساوی های زیر را به صورت رادیکالی بنویسید .

$۲^{\frac{۲}{۳}}\times ۲^{\frac{۳}{۲}}=$ $\qquad$ $۴^{\frac{۱}{۵}}=$

$(۱۶^{\frac{۱}{۳}})^{\frac{۳}{۴}}=$ $\qquad$ $۵^{\frac{۴}{۳}}=$

$(۴\times ۲)^{\frac{۱}{۳}}=$ $\qquad$ $۴^{\frac{۷}{۵}}=$

$۵^{\frac{۱}{۳}}\times ۵^{\frac{۲}{۳}}=$ $\qquad$ $۶^{\frac{۳}{۸}}=$

مثال ۱۲ : به کمک توان کسری ثابت کنید ؛ (به شرط اینکه $a > 0$ باشد)

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

مثال ۱۳ : اگر $a > 0$ باشد، عبارت $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[5]{\sqrt[4]{a}}}}$ را ساده کنید.

مثال ۱۴ : حاصل عبارت های زیر را بیابید .

$\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} =$

$\sqrt{1+\sqrt{2}} \times \sqrt[4]{3-2\sqrt{2}} =$

$\sqrt[3]{81} - 2\sqrt[3]{24} =$

مثال ۱۵ : حاصل $\sqrt[6]{(-2)^6}$ را پیدا کنید .

درس چهارم ، عبارت های جبری

اتحاد : هنگامی یک تساوی اتحاد است که :

- به ازای هر مقدار دلخواه برای متغیر های آن، عبارت مورد نظر به یک تساوی عددی تبدیل شود .

- اگر دو طرف تساوی را ساده کنیم، ضریب های جمله های متشابه در دو طرف تساوی برابر باشد.

به عنوان مثال عبارت $x(x+1)=x^2+x$ یک اتحاد است ، زیرا به ازای هر مقدار دلخواه برای x به یک تساوی عددی تبدیل می شود . مثلا اگر $x=2$ باشد ،

$2(2+1)=22+2$ ⟵ $6=6$ که یک تساوی عددی است .

مثال ۱۶ : a ، b و c را چنان به دست بیاورید که تساوی مقابل یک اتحاد باشد. $a(x+1)^2-b(3x-1)+c=x^2-4x+1$

سوال : تفاوت معادله و اتحاد چیست ؟

....

....

....

در پایه نهم با تعدادی از اتحاد ها آشنا شدیم که به مرور آن ها می پردازیم ؛

۱- **اتحاد مربع دو جمله ای :** $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

۲- **اتحاد مزدوج :** $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

۳- **اتحاد مربع سه جمله ای :** $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ca+2bc$

٤- **اتحاد جمله مشترک :** $(a+x)(a+y)=a^2+(x+y)a+xy$

مثال ۱۷ : اگر $x + \frac{1}{x} = 2$ باشد، حاصل $21x^{10} + \frac{15}{x^{10}}$ را به دست آورید.

در این فصل نیز با تعدادی اتحاد جدید آشنا می شویم .

۵- **اتحاد مکعب مجموع:** $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

اتحاد فوق را اثبات کنید .

....

....

....

۵-۲ – اتحاد مکعب تفاضل : $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

نکته : اگر ابتدا طرف دوم هر یک از اتحاد های گفته شده را بنویسیم و سپس آن را به حاصل ضرب دو یا چند عبارت تبدیل کنیم ، هریک از عبارت های به دست آمده در حاصل ضرب را یک عامل یا شمارنده تجزیه می نامیم .

۶- **اتحاد مجموع و تفاضل مکعبات دو جمله :**

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$
$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

مثال ۱۸ : حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$(2z + x)^3 =$

$(\sqrt{2} - \sqrt{3})^3 =$

$101^3 =$

$(\sqrt[3]{x}+2)(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4)=$

$(a^2-1)(a^4+a^2+1)=$

مثال ۱۹ : عبارت های زیر را تجزیه کنید .

$a^3-2ab+a^2b-2b^2=$

$x^3+27=$

$x^3-a^3=$

$x^3-125=$

$x^6-1=$

مضرب و شمارنده عبارت های جبری :

با مفهوم مضرب و شمارنده در رابطه با اعداد آشنا هستیم . به عنوان مثال ۳و۴ شمارنده ۱۲ هستند و ۱۲ نیز مضرب این دو عدد است . همچنین ۱۲ شمارنده های دیگری نیز مانند ۱۲ ، ۶ ، ۲ و ۱ دارد . ۳ و۴ نیز هرکدام مضرب های دیگری دارند مثلا مضرب های ۳ عبارتند از : ۳ ، ۶ ، ۹ ، ۱۲ و ...

مفهوم های مضرب وشمارنده در در عبارت های جبری نیز به همین شکل تعریف می شوند .عبارت $(x-1)(x+1)=x^2-1$ را درنظر بگیرید ، هر یک از عبارت های $(x-1)$ و $(x+1)$ یک شمارنده x^2-1 محسوب می شوند . همچنین x^2-1 یک مضرب این دو عبارت محسوب می شود .

مضرب های هر عبارت جبری و یا یک چند جمله ای ، از ضرب آن عبارت در عددهای صحیح و یا عبارت های جبری دیگر (ویا همزمان هردو) به دست می آیند ؛

$a+b^2$ و $2(a+b^2)$ و $(a+b^2)(a+b^2)^2$ و $-4(a+b^2)$ و $(a+b^2)(a-b)$ و.........

هریک از عبارت های فوق و عبارت های مشابه آن ها یک مضرب $(a+b^2)$ محسوب می شوند .

سوال : آیا $(a+b^2)\sqrt{7}$ نیز یک مضرب عبارت فوق محسوب می شود ؟

نکته : یک عبارت گویا به ازای مقادیری از متغیر که مخرج آن را صفر می کند ، تعریف نمی شود . به عنوان مثال عبارت $\frac{x^2+3x}{x-2}$ به ازای x=2 تعریف نمی شود چون مخرج آن صفر می شود .

مثال ۲۰ : عبارت گویای $\frac{\sqrt{x}}{x-4}+\frac{x^2}{x+3}-\frac{1}{x^2+1}$ به ازای چه مقادیری از x تعریف نمی شود ؟

حاصل جمع چند عبارت گویا :

- ✓ هرکدام از عبارت های گویا را ساده می کنیم.
- ✓ مخرج کسرها را تجزیه می کنیم.
- ✓ کوچک ترین مضرب مشترک بین مخرج ها را به عنوان مخرج مشترک درنظر می گیریم.
- ✓ کسرها را هم مخرج می کنیم و در نهایت باهم جمع می کنیم.

محاسبه ک.م.م چند عبارت جبری:

ابتدا عبارت ها را تجزیه می کنیم. سپس عوامل مشترک با توان بزرگتر و عوامل غیرمشترک با همان توان را انتخاب می کنیم و در هم ضرب می کنیم .

مثال ۲۱ : حاصل عبارت های گویای زیر را به دست آورید .

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1}+\frac{2}{\sqrt{x}+1}+\frac{3}{x-1}$$

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{x^2+1}$$

گویا کردن مخرج های گنگ :

برای گویا کردن مخرج های گنگ با توجه به صورت سوال ، سه حالت در نظر می گیریم :

۱) برای گویا کردن کسرهایی که مخرج آن ها به صورت $\sqrt[n]{x^m}\ (m<n)$ است، صورت و مخرج کسر را در $\sqrt[n]{x^{n-m}}$ ضرب می کنیم.

۲) برای گویا کردن کسرهایی که مخرج آن ها به صورت $\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$ است، صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب می کنیم.

۳) برای گویا کردن کسرهایی که مخرج آن ها به صورت $\sqrt[3]{x}\pm\sqrt[3]{y}$ است، صورت و مخرج کسر را در قسمت دوم اتحاد چاق و لاغر ضرب می کنیم.

مثال ۲۲ : مخرج عبارت های زیررا گویا کنید .

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}+۱}=\frac{(\sqrt[۳]{x^۲})^۲-\sqrt[۳]{x^۲}+۱}{(\sqrt[۳]{x^۲}+۱)((\sqrt[۳]{x^۲})^۲-\sqrt[۳]{x^۲}+۱)}=\frac{\sqrt[۳]{x^۴}-\sqrt[۳]{x^۲}+۱}{x^۲+۱}$$

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}-۱}=$$

$$\frac{۱}{\sqrt{x}-۱}=$$

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}-\sqrt[۳]{y}}=$$

$$\frac{۱}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=$$

$$\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=$$

مثال ۲۳ : حاصل عبارت های زیر را به کمک اتحاد ها حساب کنید .

1) $107^2 =$

2) $304^2=$

3) $999 \times 1001 =$

4) $499 \times 500 =$

پایان فصل سوم