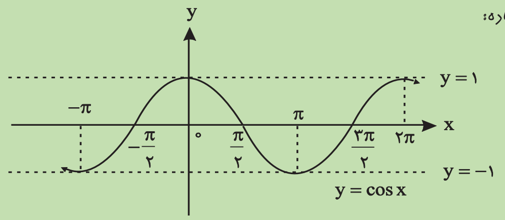
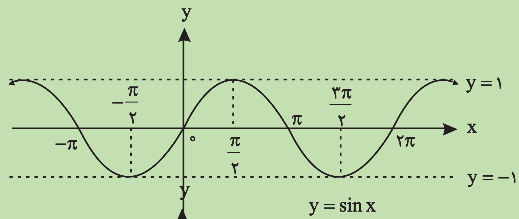
کنکور آسان است

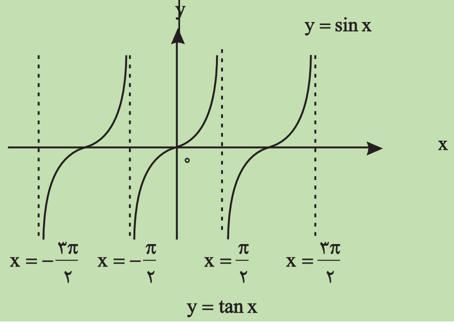
KONKURSARA

فصل ۲ مثلثات

نمودار توابع مثلثاتی ساده:





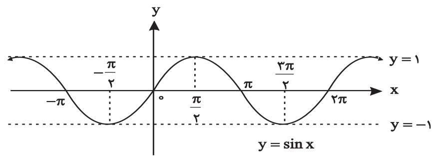


دوره تناوب

تابع با ضابطه ی $y=f(x)$ با دامنه D_f را در دامنه اش متناوب می گویند ، هرگاه عدد حقیقی و ناصفر T وجود داشته باشد به طوری که در دو شرط زیر صدق کند .

$$1)\ \forall x\in D_f \quad (x\pm T)\in D_f \quad , \quad 2)\ \forall x\in D_f \quad f(x\pm T)=f(x)$$

این یعنی اینکه شکل تابع در فاصله های T واحدی تکراریه مثل تابع سینوس که در فاصله های 2π واحدی تکرار میشه



۳۸) تابع $y=x-\lfloor x-2\rfloor$ مفروض است.

۱) نمودار تابع را رسم کنید.	۲) حدود y را بیابید.	۳) نشان دهید تابع متناوب است.

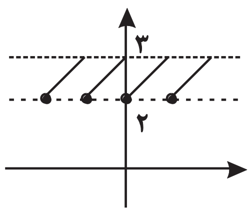
☑پاسخ:

وقتی این تابع را ساده کنیم به فرم تابع فارشکی که دو واحد به سمت بالا در امتداد محور y ها رفته می‌شود.

$$1)\ y=x-[x-2]=x-[x]+2$$

$$2)\ 0\le x-[x]<1 \Rightarrow 2\le x-[x]+2<3 \Rightarrow 2\le y<3 \text{ حدود تابع}$$

$$3)\ f(x)=x-[x]+2 \Rightarrow T=\frac{1}{|1|}=1 \text{ دوره تناوب تابع}$$



دوره تناوب اصلی تابع : اگر T دوره تناوب تابع f باشد آن گاه $\forall n\in Z-\{0\}$ ، nT نیز دوره تناوب تابع ا ست یعنی دوره تناوب تابع مجموعه ای بی شمار ا ست ، حال اگر این مجموعه دارای کوچک ترین عضو مثبت باشد آن را دوره ی تناوب اصلی می نامند .

دوره تناوب های مهم :

$$\begin{cases} f(x)=\sin^{2n-1}(ax+b) \\ f(x)=\cos^{2n-1}(ax+b) \end{cases} \Rightarrow T=\frac{2\pi}{|a|}$$

$$\begin{cases} f(x)=\sin^{2n}(ax+b) \\ f(x)=\cos^{2n}(ax+b) \end{cases} \Rightarrow T=\frac{\pi}{|a|}$$

۳۹) دوره تناوب کدام تابع بیشتر است ؟

۱) $y=\sin ۴x$ ۲) $y=\cos \pi x$ ۳) $y=\cos \frac{x}{۲}$ ۴) $y=\sin(۳x+۴)$

گزینه ۳ درست است زیرا

$$\sin ۴x \Rightarrow T=\frac{۲\pi}{۴}=\frac{\pi}{۲}$$

$$\cos \pi x \Rightarrow T=\frac{۲\pi}{\pi}=۲$$

$$\cos\frac{x}{۲} \Rightarrow T=\frac{۲\pi}{\frac{۱}{۲}}=۴\pi$$

$$\sin(۳x+۴) \Rightarrow T=\frac{۲\pi}{۳}$$

نکته

۱) هرگاه تابعی به صورت مجموع یا تفاضل چند تابع مثلثاتی ساده بود برای تعیین دوره تناوب اصلی تابع، ابتدا تناوب هر یک از توابع را حساب کرده سپس کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌ها را به دست می‌آوریم.

۲) هرگاه تابع به صورت حاصل ضرب دو یا چند تابع مثلثاتی ساده باشد. ابتدا آن را به مجموع تبدیل کرده سپس دوره تناوب آن‌ها را تعیین می‌کنیم.

۴۰) دوره تناوب تابع $y=\sin^۲\left(\frac{۳x}{۴}\right)+\cos^۳\left(\frac{۲x}{۳}\right)$ را تعیین کنید.

☑پاسخ:

$$y=\sin^۲\frac{۳x}{۴} \Rightarrow T_۱=\frac{\pi}{\frac{۳}{۴}}=\frac{۴\pi}{۳} \quad , \quad y=\cos^۳\frac{۲x}{۳} \Rightarrow T_۲=\frac{۲\pi}{\frac{۲}{۳}}=۳\pi \xrightarrow{\text{ک م م}} T=۱۲\pi$$

نکته

اگر مجموع دو کمان برابر $\frac{\pi}{۲}$ باشد آن‌گاه دو کمان متمم و اگر مجموع‌شان π باشد مکمل یکدیگرند.

$$a+b=\frac{\pi}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \sin a=\cos b \\ \cos a=\sin b \\ \tan a=\cot b \\ \cot a=\tan b \end{cases} \qquad a+b=\pi \Rightarrow \begin{cases} \sin a-\sin b=0 \\ \cos a+\cos b=0 \\ \tan a+\tan b=0 \\ \cot a+\cot b=0 \end{cases}$$

در صورت وجود

➢ چند مثال:

$\sin ۱۵^\circ=\cos ۷۵^\circ$ $\cot ۵۰^\circ=\tan ۴۰^\circ$ $\sin ۸۰^\circ=\cos ۱۰^\circ$

نسبت های مثلثاتی زوایای دو برابر کمان

$$۱)\ \sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha \Rightarrow \sin\alpha = ۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}$$

$$۲)\begin{cases} \cos ۲\alpha = \cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha = (\cos\alpha - \sin\alpha)(\cos\alpha + \sin\alpha) \\ \cos ۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha - ۱ \Rightarrow ۱ + \cos ۲\alpha \Rightarrow ۲\cos^۲\alpha \Rightarrow ۱ + \cos\alpha = ۲\cos^۲\frac{\alpha}{۲} \\ \cos ۲\alpha = ۱ - ۲\sin^۲\alpha \Rightarrow ۱ - \cos ۲\alpha = ۲\sin^۲\alpha \Rightarrow ۱ - \cos\alpha = ۲\sin^۲\frac{\alpha}{۲} \end{cases}$$

$$۳)\ (\sin\alpha \pm \cos\alpha)^۲ = ۱ \pm ۲\sin\alpha\cos\alpha = ۱ \pm \sin ۲\alpha$$

۴۱) نشان دهید برای هر زاویه α داریم: $\cos^۲\alpha = \frac{۱+\cos ۲\alpha}{۲}$ (شهریور ۹۴)

☑پاسخ:

$$\cos ۲\alpha = \cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha = \cos^۲\alpha - (۱ - \cos^۲\alpha) = ۲\cos^۲\alpha - ۱ \Rightarrow \cos ۲\alpha + ۱ = ۲\cos^۲\alpha \Rightarrow \cos^۲\alpha = \frac{۱+\cos ۲\alpha}{۲}$$

۴۲) در صورتی که $\sin\alpha = \frac{۳}{۵}$ و زاویه α حاده باشد مقدار عددی $\cos ۲\alpha$ را محاسبه کنید. (خرداد ۹۴ - خارج کشور)

☑پاسخ:

$$\cos ۲\alpha = ۱ - ۲\sin^۲\alpha \Rightarrow \cos ۲\alpha = ۱ - ۲\left(\frac{۳}{۵}\right)^۲ = \frac{۷}{۲۵}$$

۴۳) خلاصه شده‌ی عبارت $\tan ۲۰(۱+\cos ۴۰)$ را به دست آورید.

☑پاسخ:

$$\tan ۲۰(۱+\cos ۴۰) = \frac{\sin ۲۰}{\cos ۲۰}(۲\cos^۲ ۲۰) = ۲\sin ۲۰\cos ۲۰ = \sin ۴۰ = \cos ۵۰$$

۴۴) خلاصه شده‌ی عبارت $\sin(\frac{\pi}{۲}+a)\sin(\pi+a) - \sin(\pi-a)\cos a$ را بنویسید.

☑پاسخ:

$$\sin(\frac{\pi}{۲}+a)\sin(\pi+a) - \sin(\pi-a)\cos a = \cos a(-\sin a) - \sin a\cos a = -۲\sin a\cos a = -\sin ۲a$$

۴۵) نشان دهید برای هر زاویه‌ی α داریم: $\cos ۲\alpha = ۱ - ۲\sin^۲\alpha$ (دی ماه ۹۲)

☑پاسخ:

$$\cos ۲\alpha = \cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha = ۱ - \sin^۲\alpha - \sin^۲\alpha = ۱ - ۲\sin^۲\alpha$$

۴۶) سینوس زاویه‌ی $۲۲/۵^\circ$ را حساب کنید. (خرداد ۹۱)

☑پاسخ: زاویه $۲۲/۵^\circ$ درجه نسبت‌های مثلثاتیش رایج نیست ولی به کمک زاویه ۴۵° می تونیم اونا رو به دست بیاریم

$$۱ - \cos ۲x = ۲\sin^۲ x \to \sin x = \sqrt{\frac{۱-\cos ۲x}{۲}} \Rightarrow \sin ۲۲/۵ = \sqrt{\frac{۱-\cos ۴۵}{۲}} = \sqrt{\frac{۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲}}$$

۴۷) با توجه به این‌که $\sin ۷۵^\circ = \frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$ ، حاصل $\sin ۷/۵^\circ$ را بیابید.

☑پاسخ: خب یه خورده سخته ولی

$$\cos ۱۵^\circ = \sin ۷۵^\circ = \frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴} \Rightarrow \sin^۲ ۷/۵^\circ = \frac{۱-\cos ۱۵^\circ}{۲} = \frac{۱-\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}}{۲} \Rightarrow \sin ۷/۵^\circ = \sqrt{\frac{۴-\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۸}}$$

رسم نمودار های مثلثاتی

روش حل مسئله

۱) در توابع : $f(x)=a\sin bx+c$, $f(x)=a\cos bx+c$ مقدار ماکزیمم تابع $|a|+c$ و مقدار مینیمم آن $-|a|+c$

و دوره تناوب $\frac{۲\pi}{|b|}$ خواهد بود . و یادت باشه : $c=\frac{y_{max}+y_{min}}{۲}$, $|a|=\frac{y_{max}-y_{min}}{۲}$

۲) یعنی با داشتن ضابطه ی توابع فوق ماکسیمم و مینیمم و دوره تناوب تابع تعیین می شود وبا داشتن مقادیر ماکسیمم و مینیمم و دوره تناوب می توان ضابطه ی تابع را تعیین کرد .

یادت باشه :

۱) در تابع $y=a\sin x$ خواهیم داشت . $y_{Max}=|a|$, $y_{Min}=-|a|$ که در مبداء مختصات صعودی است اگر $a>۰$ باشد و اگر $a<۰$ تابع نزولی عبور می کند.

۲) اما تابع $y=a\sin bx$ دارای دوره تناوب $T=\frac{۲\pi}{|b|}$ است و $y_{Max}=|a|$, $y_{Min}=-|a|$

۳) در تابع $y=\sin(bx+c)$ همان نمودار $y=\sin bx$ را داریم که به اندازه $\frac{c}{b}$ به سمت چپ یا راست انتقال دارد .

۴۸)ضابطه تابع به فرم $y=a\sin bx+c$ را بنویسید که دوره تناوب آن π ، مقدار ماکزیمم آن ۴ و مقدار مینیمم آن -۲ باشد .

$$c=\frac{y_{max}+y_{min}}{۲}=\frac{۴-۲}{۲}=۲ \qquad |a|=\frac{y_{max}-y_{min}}{۲}=\frac{۴-(-۲)}{۲}=۳ \qquad T=\pi=\frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow |b|=۲$$

$$y=۳\sin ۲x+۲$$

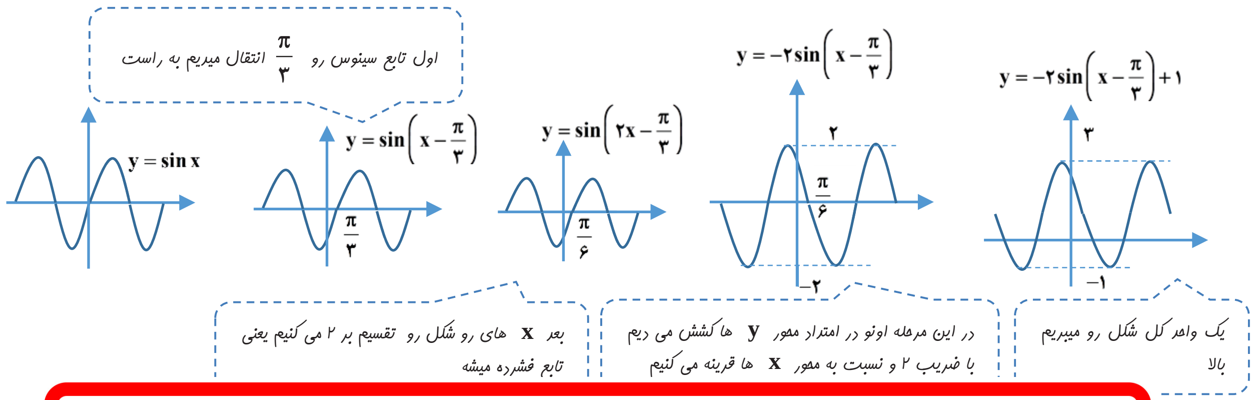
۴۹) ولتاژ یک دستگاه لوازم خانگی بر حسب کسینوس نسبت به زمان دارای فرکانس با دوره تناوب $\frac{۱}{۸۰}$ است و تغییرات ولتاژ در بازه $[-۱۲۰ , ۱۲۰]$ است معادله ولتاژ این دستگاه را بنویسید .

$$v(t)=a\cos(bt)+c$$

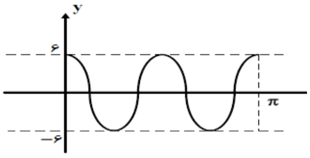
پاسخ:

$$\frac{۲\pi}{b}=\frac{۱}{۸۰} \Rightarrow b=۱۶۰\pi \quad , \quad a=\frac{۱۲۰-(-۱۲۰)}{۲}=۱۲۰ \quad , \quad c=\frac{۱۲۰-۱۲۰}{۲}=۰ \Rightarrow v(t)=۱۲۰\cos ۱۶۰\pi t$$

۵۰)نمودار تابع $y=-۲\sin\left(۲x-\frac{\pi}{۳}\right)+۱$ را رسم کنید .



۵۱) شکل مقابل نمودار $y = a\cos bx$ است. مقادیر b,a را تعیین کنید و مقدار تابع در $x = \frac{۷\pi}{۱۲}$ به دست آورید.



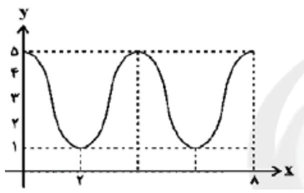
☑پاسخ: در بازه $[۰,\pi]$ شکل منحنی دو بار تکرار شده است پس دوره تناوب $T = \frac{\pi}{۲} = \frac{۲\pi}{|b|}$ است در نتیجه $b = ۴$

وتغییرات تابع در بازه $[-۶,۶]$ است و چون روند تابع در مبداء نزولی است پس $a = ۶$ است و معادله منحنی به صورت $y = ۶\cos ۴x$ خواهد بود .

در نتیجه :

$$f\left(\frac{۷\pi}{۱۲}\right) = ۶\cos\left(۴ \times \frac{۷\pi}{۱۲}\right) = ۶\cos\frac{۷\pi}{۳} = ۶\cos\frac{\pi}{۳} = ۶\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۳$$

۵۲) نمودار تابع $y = a\cos b\pi x + ۳$ مطابق شکل روبروست است.حاصل $a+b$ کدام است؟



☑پاسخ: در نقطه‌ی $x = ۰$ داریم ؛ $f(۰) = a\cos b\pi(۰) + ۳ = a + ۳ = ۵ \Rightarrow a = ۲$

طبق نمودار فاصله‌ی $x = ۰$ تا $x = ۲$ ، برابر نصف دوره‌ی تناوب تابع موردنظر است:

$$۲ - ۰ = \frac{T}{۲} \Rightarrow T = ۴ \Rightarrow \frac{۲\pi}{|b\pi|} = ۴ \Rightarrow b = \pm\frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} a + b = ۲ - \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۲} \\ a + b = ۲ + \frac{۱}{۲} = \frac{۵}{۲} \end{cases}$$

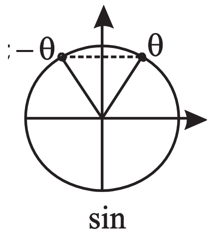
معادلات مثلثاتی

منظور از حل معادله‌ی مثلثاتی یافتن تمام کمان‌هایی است که در معادله صدق می‌کنند، هر معادله‌ی مثلثاتی در صورت داشتن جواب به یکی از معادلات زیر تبدیل می‌شود. به حل و بسط هر یک می‌پردازیم.

$۱)\ \sin x = m = \sin\theta$ $\qquad$ $۲)\cos x = m = \cos\theta$

معادلات سینوسی

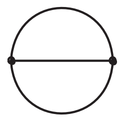
ا)



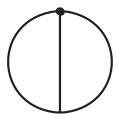
$\sin x = m = \sin\theta \qquad (-۱\le m\le ۱)$

$$x=\begin{cases}۲k\pi+\theta\\ ۲k\pi+\pi-\theta\end{cases}$$ جواب‌های عمومی $k\in\mathbb{Z}$

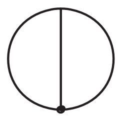
➢ حالت‌های خاص



$\sin x = ۰ \Rightarrow x = k\pi$



$\sin x = ۱ \Rightarrow x = ۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$ ریشه‌های مضاعف



$\sin x = -۱ \Rightarrow x = ۲k\pi-\frac{\pi}{۲}$ ریشه‌های مضاعف

۵۳) معادله ی $\text{Sin}۲x=\text{Sin}x$ را حل کنید.

☑پاسخ:

$$\begin{cases}۲x=۲k\pi+x \Rightarrow x=۲k\pi\\ ۲x=۲k\pi+\pi-x \Rightarrow ۳x=(۲k+۱)\pi \Rightarrow x=\frac{(۲k+۱)\pi}{۳}\end{cases}$$

۵۴) معادله $۲\sin^۲ x-\sin x=۰$ را حل کرده جواب‌هایی که در بازه $[۰,۲\pi]$ هستند را تعیین کنید. (دی ماه ۹۳)

☑پاسخ:

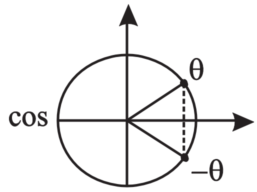
$\sin x(۲\sin x-۱)=۰$

$$\begin{cases}\sin x=۰ \Rightarrow x=k\pi\\ ۲\sin x-۱=۰ \Rightarrow \sin x=\frac{۱}{۲}=\sin\frac{\pi}{۶} \Rightarrow \begin{cases}x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\\ x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}\end{cases}\end{cases}$$

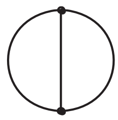
معادلات کسینوسی

$\cos x = m = \cos\theta \qquad -۱ \le m \le ۱$

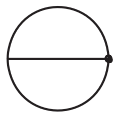
$x = \begin{cases} ۲k\pi - \theta \\ ۲k\pi + \theta \end{cases}$ جواب‌های عمومی



➢ حالت‌های خاص



$\cos x = ۰ \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۲}$



$\cos x = ۱ \Rightarrow x = ۲k\pi$

۵۵) معادله $\cos ۳x - \cos x = ۰$ را حل کنید .

$$\cos ۳x - \cos x = ۰ \Rightarrow \cos ۳x = \cos x \Rightarrow ۳x = ۲k\pi \pm x \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{k\pi}{۲} \end{cases}$$

۵۶) معادله‌ی $\cos ۲x - ۳\cos x + ۲ = ۰$ را حل کنید.

☑پاسخ:

۲ شده دو تا ۱

$$۱ + \cos ۲x - ۳\cos x + ۱ = ۰ \Rightarrow ۲\cos^۲ x - ۳\cos x + ۱ = ۰ \Rightarrow \cos x = \frac{۳ \pm \sqrt{۹ - ۸}}{۴} = \begin{vmatrix} \cos x = ۱ \\ \cos x = \frac{۱}{۲} \end{vmatrix}$$

$$\cos x = ۱ = \cos ۲k\pi \Rightarrow x = ۲k\pi \quad , \quad \cos x = \frac{۱}{۲} = \cos\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$$

۵۷) معادله $\sin ۲x - \sqrt{۳}\cos x = ۰$ را حل کنید. (شهریور ۹۳)

☑پاسخ:

$$۲\sin x\cos x - \sqrt{۳}\cos x = ۰ \Rightarrow \cos x(۲\sin x - \sqrt{۳}) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \cos x = ۰ \\ ۲\sin x - \sqrt{۳} = ۰ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = ۰ & \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ \sin x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sin\frac{\pi}{۳} & \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳} \\ x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۳} \end{cases} \end{cases}$$

۵۸) معادله $\sin^۲ x = \cos^۲ x + ۱$ را حل کنید. (شهریور ۹۴)

☑پاسخ:

$$۱ - \cos^۲ x = \cos^۲ x + ۱ \Rightarrow ۲\cos^۲ x = ۰ \Rightarrow \cos x = ۰ \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$$