کنکور آسان است

KONKURSARA

/konkursara

@konkursara_official

021-55756500

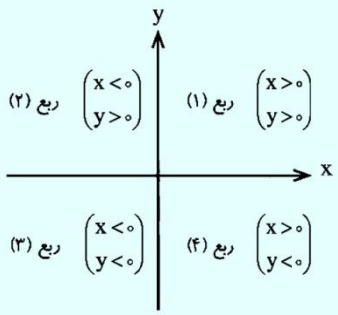
www.konkursara.com

برای دریافت نمونه سوالات و جزوات رایگان بیشتر کلیک کنید
کنکور آسان است
KONKURSARA

درسنامه ۱

دستگاه مختصات

دستگاه مختصات متشکل از دو محور عمود بر هم x ها و y ها است که در مبدأ مختصات متقاطع‌اند. این محورها صفحه را به ۴ ناحیه تقسیم می‌کنند که هر کدام از آن‌ها را یک ربع مختصاتی می‌نامیم. هر نقطه دلخواه مانند A از صفحه را با زوج مرتب (x,y) نمایش می‌دهیم. x (مؤلفه‌ی اول) را طول نقطه و y (مؤلفه‌ی دوم) را عرض نقطه می‌نامیم.



مثال با فرض آن‌که نقطه‌ی $A\left(m-2,\frac{m-1}{m-2}\right)$ در ربع سوم باشد، نقطه‌ی $B(m, m^2-5)$ در کدام ناحیه قرار دارد؟

۱) ناحیه‌ی ۱ ۲) ناحیه‌ی ۲ ۳) ناحیه‌ی ۳ ۴) ناحیه‌ی ۴

پاسخ گزینه‌ی ۴ چون A در ربع سوم قرار دارد پس $x_A<0$ و $y_A<0$، بنابراین:

$$\begin{cases}m-2<0\\\frac{m-1}{m-2}<0\end{cases}\xrightarrow{\text{(حل نامعادله)}}\begin{cases}m<2\\1<m<2\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}}1<m<2\xrightarrow{\text{توان دو}}1<m^2<4\xrightarrow{+(-5)}-4<m^2-5<-1$$

در نتیجه:

$$\begin{cases}1<m<2\Rightarrow x_B>0\\-4<m^2-5<-1\Rightarrow y_B<0\end{cases}\Rightarrow$$ نقطه B در ناحیه چهارم قرار دارد.

نکات

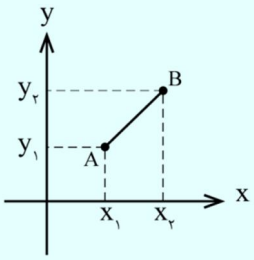
۱) اگر نقطه‌ی A روی محور x ها باشد، مؤلفه‌ی دوم یعنی y، صفر است، به بیان دیگر مختصات آن به صورت A(x , ۰) ظاهر می‌شود.

۲) اگر نقطه‌ی A روی محور y ها باشد، مؤلفه‌ی اول، یعنی x، صفر است. به بیان دیگر مختصات آن به صورت A(۰ , y) ظاهر می‌شود.

۳) اگر نقطه‌ی $A(x_A,y_A)$ بالای محور x ها باشد، عرض نقطه‌ی A مثبت بوده و اگر پایین محور x ها باشد، عرض نقطه‌ی A منفی می‌باشد.

۴) اگر نقطه‌ی $A(x_A,y_A)$ سمت راست محور y ها باشد، طول نقطه‌ی A مثبت بوده و اگر سمت چپ محور y ها باشد، طول نقطه‌ی A منفی می‌باشد.

فاصله دو نقطه (طول پاره‌خط)



فاصله‌ی دو نقطه‌ی $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ در صفحه مختصات به آن همان طول پاره‌خط AB می‌گوئیم از رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود.

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

مثال نقاط $A(6,-2)$ و $B(2,1)$ دو رأس مجاور یک مربع می‌باشند. مساحت این مربع کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۲۵

پاسخ چون دو نقطه A و B دو راس مجاور یک مربع هستند، با محاسبه طول پاره‌خط AB، اندازه‌ی ضلع مربع حاصل می‌شود، با داشتن ضلع مربع، مساحت مربع به دست می‌آید.

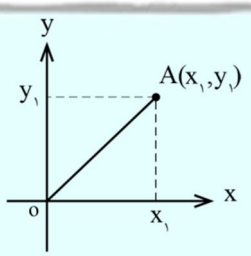
$$AB=\sqrt{(2-6)^2+(1+2)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5=\text{ضلع مربع}\Rightarrow S=(AB)^2=25$$

نکات

۱) فاصله‌ی نقطه‌ی دلخواه $A(x_1,y_1)$ از مبدا مختصات که همان طول پاره‌خط OA می‌باشد، از فرمول زیر محاسبه می‌شود.

کنکور آسان است
KONKURSARA
برای دانلود اپلیکیشن اینجا را کلیک کنید

برای دریافت نمونه سوالات و جزوات رایگان بیشتر کلیک کنید
کنکور آسان است konkursara



$$|OA|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$$

مثال به ازای کدام مقدار a فاصله نقطه‌ی $A(a-5,2a+1)$ از مبدأ مختصات برابر ۵ می‌باشد؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) -5 ۳) -1 ۴) ۲

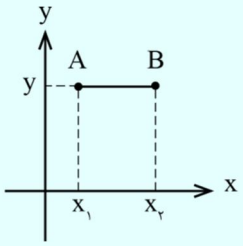
پاسخ گزینه‌ی ۱ $OA=5$ و $x_1=a-5$ و $y_1=2a+1$ بنابراین:

$$|OA|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}\Rightarrow 5=\sqrt{(a-5)^2+(2a+1)^2}\xrightarrow{\text{توان دو}}$$

$$25=a^2-10a+25+4a^2+4a+1\Rightarrow 5a^2-6a+26=25\Rightarrow$$

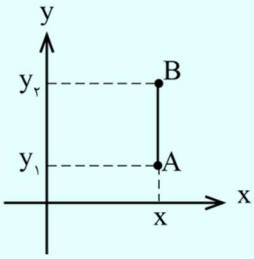
$$5a^2-6a+1=0\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است}}\begin{cases}a=1\\a=\frac{1}{5}\end{cases}$$

۲) اگر نقاط A و B هم‌عرض باشند، طول پاره‌خط AB به صورت $|AB|=|x_2-x_1|$ به دست می‌آید.



$$|AB|=|x_2-x_1|$$

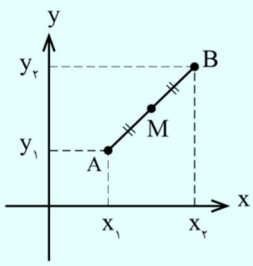
۳) اگر نقاط A و B هم‌طول باشند، طول پاره‌خط AB به صورت $|AB|=|y_2-y_1|$ حاصل می‌شود.



$$|AB|=|y_2-y_1|$$

مختصات وسط دو نقطه (وسط پاره‌خط)

مختصات نقطه‌ی M، وسط دو نقطه‌ی A و B (وسط پاره‌خط AB) که به مختصات $A=(x_1,y_1)$ و $B=(x_2,y_2)$ می‌باشند از فرمول زیر حاصل می‌شود.



$$\text{AB وسط } M=\frac{A+B}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_M=\frac{x_1+x_2}{2}\\y_M=\frac{y_1+y_2}{2}\end{cases}$$

مثال نقاط $A=(2a+3,b)$ ، $B=(-1,2)$ و $C(3,-4)$ مفروض‌اند. به ازای کدام مقدار a و b نقطه‌ی A وسط پاره‌خط BC است؟

کنکور آسان است konkursara
برای دانلود اپلیکیشن اینجا را کلیک کنید

برای دریافت نمونه سوالات و جزوات رایگان بیشتر کلیک کنید
کنکور آسان است
KONKURSARA

پاسخ

$$\text{BC وسط } A=\frac{B+C}{۲}\Rightarrow\begin{cases}x_A=\frac{x_B+x_C}{۲}\\ y_A=\frac{y_B+y_C}{۲}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲a+۳=\frac{-۱+۳}{۲}\\ b=\frac{۲-۴}{۲}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲a+۳=۱\\ b=-۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-۱\\ b=-۱\end{cases}$$

نکات

۱) **قرینه یک نقطه:** قرینه‌ی نقطه‌ی $A(x,\ y)$ نسبت به نقطه‌ی $M(\alpha,\beta)$ ، نقطه $A'(۲\alpha-x,۲\beta-y)$ می‌باشد. در حقیقت نقطه‌ی M وسط پاره‌خط می‌باشد.

مثال اگر نقاط $A(a+۱,۴b-۳)$ و $B(۶b-۱,a-۱)$ نسبت به نقطه‌ی $M(b,-a)$ قرینه یکدیگر باشند، مقادیر a و b را بیابید.

(مشابه تمرین کتاب)

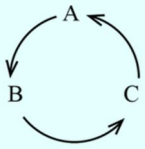
پاسخ

$$\text{AB وسط } M=\frac{A+B}{۲}\Rightarrow(b,-a)=\left(\frac{a+۱+۶b-۱}{۲},\frac{۴b-۳+a-۱}{۲}\right)\Rightarrow(b,-a)=\left(\frac{a+۶b}{۲},\frac{۴b+a-۴}{۲}\right)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{a+۶b}{۲}=b\\ \frac{۴b+a-۴}{۲}=-a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+۶b=۲b\\ ۴b+a-۴=-۲a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۴b+a=۰\\ ۴b+۳a=۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۲\\ b=-\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

۲) **تعیین مساحت مثلث**

اگر نقاط $A(x_A,y_A)$ ، $B(x_B,y_B)$ و $C(x_C,y_C)$ سه رأس مثلث باشند، مساحت مثلث ABC برابر است با:



$$S_{\Delta ABC}=\frac{۱}{۲}\left|x_A(y_B-y_c)+x_B(y_C-y_A)+x_C(y_A-y_B)\right|$$

مثال نقاط $A(-۵,-۲)$ ، $B(۴,۲)$ و $C(-۳,۴)$ رئوس مثلث ABC هستند، مساحت مثلث را بیابید.

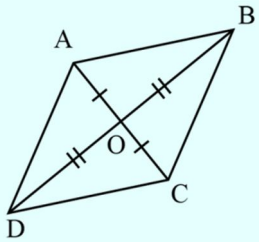
پاسخ

$$S_{\Delta ABC}=\frac{۱}{۲}\left|x_A(y_B-y_c)+x_B(y_C-y_A)+x_C(y_A-y_B)\right|\Rightarrow$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{۱}{۲}\left|-۵(۲-۴)+۴(۴+۲)-۳(-۲-۲)\right|=\frac{۱}{۲}\left|۱۰+۲۴+۱۲\right|=۲۳$$

۳) **رابطه‌ی بین مختصات رأس‌های متوازی الاضلاع**

رابطه‌ی زیر بین مختصات رئوس متوازی الاضلاع همواره برقرار است.



$$A+C=B+D\Rightarrow\begin{cases}x_A+x_C=x_B+x_D\\ y_A+y_C=y_B+y_D\end{cases}$$

تذکر مهم لوزی، مستطیل و مربع حالت‌های خاصی از متوازی‌الاضلاع هستند، بنابراین نکته بالا در مورد آن‌ها نیز صدق می‌کند.

مثال اگر چهار نقطه‌ی $A(a-۱,b)$ ، $B(۲a+۳,b-۱)$ ، $C(b-۲,a)$ و $D(۳b+۱,۲a-۱)$ رأس‌های متوالی متوازی الاضلاع ABCD باشند، a+b کدام است؟

کنکور آسان است
KONKURSARA
برای دانلود اپلیکیشن اینجا را کلیک کنید

برای دریافت نمونه سوالات و جزوات رایگان بیشتر کلیک کنید
کنکور آسان است konkursara

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $-\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

پاسخ گزینه‌ی ۳

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-۱+b-۲ = ۲a+۳+۳b+۱ \\ b+a = b-۱+۲a-۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲b+a=-۷ \\ a=۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-\frac{۹}{۲} \\ a=۲ \end{cases} \Rightarrow a+b=-\frac{۵}{۲}$$

۱) اگر نقطه‌ی $A(۲m-۱, |m|-|m+۲|)$ پایین محور x ها باشد، حدود m کدام است؟

۱) $m>۱$ ۲) $m<-۱$ ۳) $m<۱$ ۴) $m>-۱$

۲) نقطه‌ی $A(۲m-۱, m^۲+۲)$ از دو محور مختصات به یک فاصله است، مقدار m کدام است؟

۱) $m=۰$ ۲) $m=۱$ ۳) $m=-۱$ ۴) $m=-۲$

۳) نقطه‌ای با عرض منفی روی محور y ها که فاصله‌اش از نقطه‌ی $A(۴,۱)$ برابر ۵ باشد، کدام است؟

۱) $(۰,-۱)$ ۲) $(۰,-۲)$ ۳) $(۰,-۳)$ ۴) $(۰,-۴)$

۴) نقاط $A(۶,-۲)$ و $B(۲,۱)$ دو راس مجاور یک لوزی می‌باشند، محیط لوزی کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۰ ۳) ۴۰ ۴) ۱۰۰

۵) اگر نقاط A ، B و C سه راس یک مثلث باشند و $A(\sqrt{۳},-\sqrt{۵})$ و $B(\sqrt{۵},\sqrt{۳})$ باشد و طول AC یک واحد بیش‌تر از طول AB و طول BC یک واحد بیش‌تر از طول AC باشد، محیط مثلث کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

۶) اگر $A(۱,-۲)$ یک راس و $O'(-۲,۲)$ مرکز مربع باشد، محیط مربع چه‌قدر است؟

۱) ۵۰ ۲) ۲۵ ۳) ۲۰ ۴) $۲۰\sqrt{۲}$

۷) دو نقطه‌ی $A(۳,-۱)$ و $B(۳,۲)$ دو انتهای قطر کوچک یک لوزی هستند که قطر بزرگ آن ۲ برابر قطر کوچک آن است. مساحت لوزی کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۸ ۳) ۴/۵ ۴) ۹

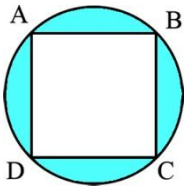
۸) نقاط A(۱ , ۲) و B(۱ , ۶) و C(۵ , ۴) سه رأس یک لوزی هستند. مساحت لوزی چقه قدر است؟

۱) ۳۲ ۲) ۱۶ ۳) ۸ ۴) ۲۴

۹) نقطه‌ای روی خط $y=۲x-۳$ که از دو نقطه‌ی A(۳ , ۱) و B(۱ , ۳) به یک فاصله باشد، کدام است؟

۱) (۲ , ۰) ۲) (۴ , ۵) ۳) (۳ , ۳) ۴) (۵ , ۷)

۱۰) در شکل مقابل در مربع ABCD اگر A(۲ , ۳) و C(۳ , ۵) باشد، مساحت قسمت هاشور خورده کدام است؟



۱) $\frac{۵\pi}{۴}-۱$ ۲) $\frac{۵(\pi-۲)}{۴}$ ۳) $\frac{۵\pi-۲}{۲}$ ۴) $\frac{\pi-۲}{۴}$

۱۱) m چه مقداری داشته باشد تا مثلث ABC به رئوس A(۳ , m+۱) ، B (۱ , ۱) و C (۵ , ۱) متساوی الاضلاع باشد؟

۱) $\pm۳\sqrt{۲}$ ۲) $\pm۲\sqrt{۳}$ ۳) $\pm\sqrt{۲}$ ۴) $\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۱۲) نقاط A (۱ , ۰) ، B(۴ , ۲) و $C(a,-a)$ مفروض‌اند. به ازای کدام مقدار a ، مثلث ABC در رأس A قائمه و متساوی‌الساقین است؟

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۳) دو نقطه روی خط $x-y+۱=۰$ یافت می‌شود که از مبدأ مختصات به فاصله‌ی ۱ می‌باشند. فاصله‌ی این دو نقطه از یکدیگر کدام است؟

کنکور آسان است konkursara
برای دانلود اپلیکیشن اینجا را کلیک کنید

برای دریافت نمونه سوالات و جزوات رایگان بیشتر کلیک کنید
کنکور آسان است
KONKURSARA

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$

۱۴) نقاط $A(۲\beta,\beta)$ و $B(\beta+۳,\beta-۴)$ دو رأس مثلث ABC و معادله میانه نظیر رأس C خط $y=۵$ ، مختصات وسط AB کدام است؟

۱) $(۵\ ,\ ۹)$ ۲) $(۵\ ,\ ۱۲)$ ۳) $(۹\ ,\ ۵)$ ۴) $(۱۲\ ,\ ۵)$

۱۵) اگر نقاط $M(۱\ ,\ ۲)$ ، $N(۴,-۵)$ و $P(۳\ ,\ ۰)$ به ترتیب وسط‌های اضلاع AB ، BC و AC از مثلث ABC باشند، رأس B کدام است؟

۱) $(۲,-۳)$ ۲) $(-۲,۳)$ ۳) $(۳,-۲)$ ۴) $(-۳,۲)$

۱۶) اگر $A(m-۲\ ,\ ۰)$ و $B(m\ ,\ ۲m)$ و فاصله‌ی نقطه‌ی وسط AB از مبدأ مختصات برابر $\sqrt{۵}$ باشد، مجموع مقادیر m کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۱۷) از نقطه‌ی $A(-۲\ ,\ ۱)$ سه واحد به سمت راست و دو واحد به سمت پایین حرکت می‌کنیم تا به نقطه‌ی B برسیم. فاصله‌ی وسط پاره‌خط AB تا مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۱۸) نقاط $A(۴\ ,\ ۲)$ ، $B(۱\ ,-۱)$ و $C(۶\ ,-۱)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر H و M به ترتیب پای ارتفاع AH و میانه AM باشند، طول MH چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۲}$

۱۹) نقطه‌ی $A(۷\ ,\ ۶)$ رأس یک متوازی الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $۲y-۳x=۱۱$ و $۳y+۴x=۸$ می‌باشند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۰)

۱) $(۱\ ,\ ۵)$ ۲) $(۳\ ,\ ۴)$ ۳) $(۳\ ,\ ۵)$ ۴) $(۴\ ,\ ۳)$

۲۰) چهار نقطه‌ی $A(۰\ ,\ ۶)$ ، $B(۴,-۴)$ ، $C(۳\ ,\ ۱)$ و $D(x_D,y_D)$ به گونه‌ای هستند که پاره‌خط‌های AB و CD یکدیگر را نصف می‌کنند، مختصات نقطه‌ی D کدام است؟

۱) $(۱\ ,\ ۱)$ ۲) $(-۱\ ,۰)$ ۳) $\left(\frac{۵}{۲}\ ,\ ۲\right)$ ۴) $(۲\ ,-۹)$

۲۱) نقاط $M(۴\ ,\ ۶)$ ، $N(۲\ ,-۴)$ و $P(-۴\ ,\ ۲)$ ، وسط‌های اضلاع مثلث ABC می‌باشند، مساحت مثلث ABC برابر کدام است؟

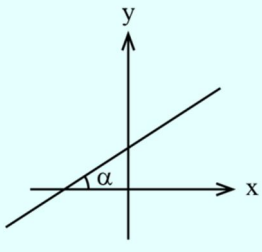
۱) ۱۸ ۲) ۳۶ ۳) ۷۲ ۴) ۱۴۴

درسنامه ۲

شیب خط (ضریب زاویه خط)

شیب خط: شیب خط، تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور x ها (یعنی سمت راست محور x ها) می‌سازد.

تذکر اگر شیب خطی مثبت باشد، می‌توان نتیجه گرفت که خط با جهت مثبت محور x ها، زاویه‌ی حاده می‌سازد و خط صعودی می‌باشد. دقت شود که اگر شیب خط مثبت باشد، نمودار خط از نواحی اول و سوم می‌گذرد.



خط صعودی $\Rightarrow m=\tan\alpha>۰$ = شیب خط

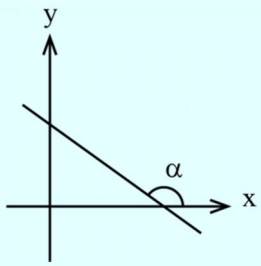
$۰<\alpha<۹۰^\circ$

تذکر اگر شیب خط منفی باشد، می‌توان نتیجه گرفت که خط با جهت مثبت محور x ها زاویه‌ی منفرجه می‌سازد و خط نزولی می‌باشد.

کنکور آسان است
KONKURSARA
برای دانلود اپلیکیشن اینجا را کلیک کنید

برای دریافت نمونه سوالات و جزوات رایگان بیشتر کلیک کنید
کنکور آسان است konkursara

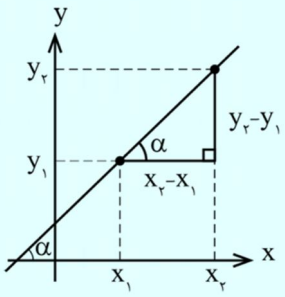
دقت شود که اگر شیب خط منفی باشد، نمودار خط از نواحی دوم و چهارم می‌گذرد.



خط نزولی $\Rightarrow m = \tan\alpha < 0$ = شیب خط

$$90 < \alpha < 180^\circ$$

تعیین شیب خط با داشتن دو نقطه از خط



شیب خطی که از دو نقطه متمایز $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ می‌گذرد. از رابطه‌ی $m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ به دست می‌آید. به شکل روبه‌رو دقت کنید:

$$m_{AB}=\tan\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

مثال شیب خطی که از دو نقطه‌ی $A(m\ ,\ 0)$ و $B(-m,3m)$ می‌گذرد کدام است؟ $(m\neq 0)$

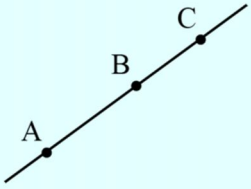
۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $-\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ گزینه‌ی ۳

$$m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-3m}{m-(-m)}=\frac{-3m}{2m}=-\frac{3}{2}$$

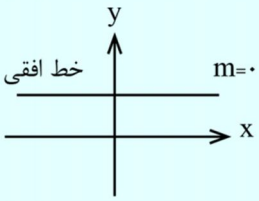
نکات

۱) اگر سه نقطه‌ی $A(x_A,y_A)$، $B(x_B,y_B)$ و $C(x_C,y_C)$ بر یک خط راست واقع باشند (یعنی بر یک استقامت یا بر یک راستا باشند) باید شیب دو پاره‌خط AB و BC یکسان باشند، یعنی:



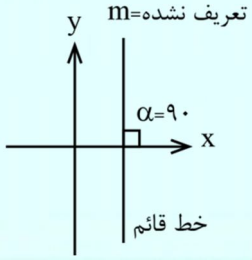
$$m_{AB}=m_{BC}\Rightarrow\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}$$

۲) شیب هر خط افقی برابر صفر است. چون تمام نقاط واقع بر این خط عرض‌های مساوی دارند، پس تغییرات عرض آن صفر می‌شود، بنابراین برای این نوع خطوط شیب صفر است.



$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\xrightarrow{y_2=y_1}m=\frac{0}{x_2-x_1}=0$$

۳) برای هر خط قائم، شیب تعریف نمی‌شود. چون تمام نقاط واقع بر این خط طول‌های مساوی دارند، پس تغییرات طول آن صفر می‌شود، بنابراین برای این نوع خطوط شیب تعریف نمی‌شود.



$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\xrightarrow{x_2=x_1}m=\frac{y_2-y_1}{0}=\text{تعریف نشده}$$

کنکور آسان است konkursara
برای دانلود اپلیکیشن اینجا را کلیک کنید

برای دریافت نمونه سوالات و جزوات رایگان بیشتر کلیک کنید
کنکور آسان است
konkursara

۲۲) به ازای کدام مقدار a ، خط به معادله‌ی $(2a-1)x+ay+3a-2=0$ با جهت مثبت محور x ها زاویه 45° می‌سازد؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

۲۳) اندازه‌ی زاویه‌ای که خط $x=2$ با خط $\sqrt{3}y+x-1=0$ می‌سازد، چند درجه است؟ $\left(\tan 15^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

۱) 30° ۲) 60° ۳) 45° ۴) 90°

۲۴) مثلثی با سه رأس A(۱ ,۱) ، B (۲ , ۱) و C(۵ , ۳) در نظر بگیرید. شیب خطی که وسط پاره‌خط AB را به وسط پاره‌خط BC وصل می‌کند، چند است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۲

۲۵) خطی از نقطه‌ی $A(4,4^\circ)$ عبور می‌کند. کدام گزینه در بازه‌ی این خط همواره درست است؟

۱) معادله خط، ثابت است. ۲) شیب خط، ثابت است.

۳) عرض از مبدا خط، ثابت است. ۴) محل تلاقی با محور x ها، ثابت است.

۲۶) به ازای کدام مقادیر a، نقاط (a , ۳) و (۴a+۱ , ۶)و مبدأ مختصات در یک راستا قرار می‌گیرند؟ (سراسری تجربی خارج از کشور ۸۵)

۱) $-2,\frac{9}{4}$ ۲) $-2,\frac{3}{4}$ ۳) $2,-\frac{3}{4}$ ۴) $2,-\frac{9}{4}$

۲۷) اگر زاویه‌ای که خط $\sqrt{7-4\sqrt{3}}y+(m-2\sqrt{3})x-(m+\sqrt{3})=0$ با جهت مثبت محور x ها می‌سازد، 60° باشد. این خط محور عرض‌ها را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

۱) $-5\sqrt{3}-9$ ۲) $5\sqrt{3}+9$ ۳) $-5\sqrt{3}+9$ ۴) $5\sqrt{3}-9$

درسنامه ۳

معادله‌ی خط

معادله‌ی استاندارد خط راست: هر ضابطه به صورت $y=ax+b$ ، معادله‌ی استاندارد یک خط راست. که در آن ضریب x ، یعنی a را شیب خط و عدد ثابت معادله را یعنی b عرض از مبدأ خط می‌گویند.

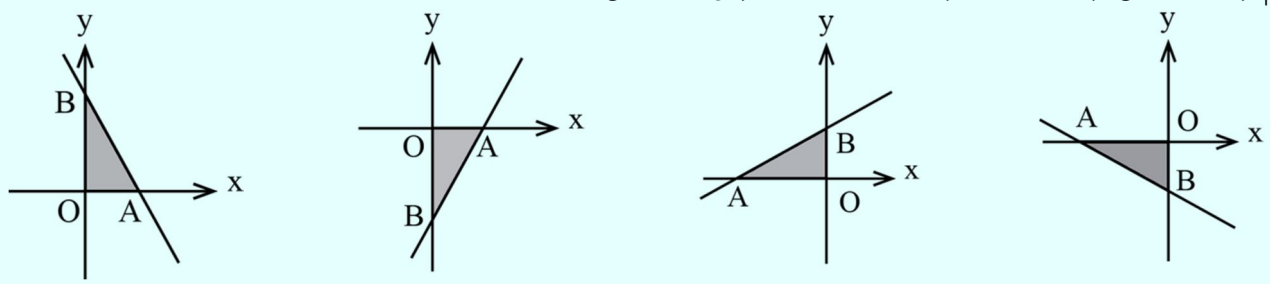
معادله‌ی غیر استاندارد خط راست: شکل دیگری از معادله ی خط به صورت $ax+by+c=0$ است که معادله‌ی غیراستاندارد یک خط راست است. برای به دست آوردن شیب خط معادله مذکور از فرمول زیر استفاده می‌کنیم. (جملات شامل x و y باید در یک طرف تساوی باشند.)

$$\text{شیب خط معادله‌ی غیر استاندارد}: m=\frac{-\text{ضریب x}}{\text{ضریب y}}$$

نکات

۱) اگر در معادله‌ی خطی، مقدار x را برابر صفر قرار دهیم، عدد به دست آمده عرض از مبدأ و اگر مقدار y را برابر صفر قرار دهیم، عدد به دست آمده طول از مبدأ خط می‌باشد.

۲) طبق شکل‌های زیر، اگر طول از مبدأ و عرض از مبدأ خطی مخالف صفر باشد، بین خط و محورهای مختصات ناحیه‌ای به شکل یک مثلث قائم‌الزاویه ایجاد می‌شود که OA را طول از مبدأ و OB را عرض از مبدأ می‌نامند.



۳) اندازه‌ی مساحت مثلثی که از برخورد یک خط با محورهای مختصات ایجاد می‌شود برابر است با:

کنکور آسان است
konkursara
برای دانلود اپلیکیشن اینجا را کلیک کنید

برای دریافت نمونه سوالات و جزوات رایگان بیشتر کلیک کنید
کنکور آسان است
KONKURSARA

$S = \frac{۱}{۲}|\text{طول از مبدأ} \times \text{عرض از مبدأ}|$

مثال مساحت مثلثی که اضلاع آن منطبق بر محور OX و محور OY و خط به معادله‌ی $۲x+۳y=۱۲$ می‌باشد را بیابید.

پاسخ کافی است طول از مبدأ و عرض از مبدأ خط را به دست آوریم. داریم:

عرض از مبدأ خط $x = ۰ \Rightarrow ۲(۰) + ۳y = ۱۲ \Rightarrow y = ۴$

$$\Rightarrow S = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۴ = ۱۲$$

طول از مبدأ خط $y = ۰ \Rightarrow ۲x + ۳(۰) = ۱۲ \Rightarrow x = ۶$

۲۸) چند نقطه روی خط $y=x$ وجود دارد که از نقطه‌ی $(۴ , ۱)$ به فاصله $\sqrt{۲}$ می‌باشد؟ (آزاد تجربی ۹۱)

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) ۴

۲۹) خطی به معادله‌ی $۲y - ۳x = ۶$ محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند، فاصله ی وسط AB از نقطه‌ی $\left(۰ , -\frac{۳}{۲}\right)$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{۱۰}$ ۴) ۴

۳۰) اگر خط Δ محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع کند، مساحت مثلث OBA برابر $|ab|$ باشد، معادله‌ی خط Δ کدام یک از خطوط زیر کمی‌تواند باشد؟

۱) $bx+۲ay=۲ab$ ۲) $ax+by=۱$ ۳) $۲ax+by=ab$ ۴) $ax+by=ab$

۳۱) دو خط $L_۱ : y = ۳x - ۲۱$ و $L_۲ : ۱۱y - ۳۰x + ۳۹ = ۰$ را در صفحه رسم کرده‌ایم. نقطه‌ی $A(۳۵ , ۹۱)$ نسبت به این دو خط چه موقعیتی دارد؟

۱) بالای هر دو خط
۲) بالای $L_۱$ و پایین $L_۲$
۳) پایین $L_۱$ و بالای $L_۲$
۴) پایین هر دو خط

۳۲) خط راست $۳x + ۲y + ۷ = ۰$ و نقاط $A(۳ , ۱)$، $B(-۱ , -۱)$ و $C(۰ , -۴)$ مفروضند. کدام نقطه‌ها در یک طرف این خط راست قرار گرفته‌اند؟

۱) B, A ۲) C, A ۳) C, B ۴) C و B, A

درسنامه ۴

تعیین معادله‌ی خط

روش نوشتن معادله یک خط

۱) معادله‌ی خطی که شیب آن m و از نقطه‌ی $A(x_۰ , y_۰)$ عبور کند، از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$y - y_۰ = m(x - x_۰)$$

۲) برای نوشتن معادله‌ی خطی که دو نقطه‌ی آن معلوم باشد، یعنی اگر دو نقطه $A(x_۱ , y_۱)$ و $A(x_۲ , y_۲)$ دو نقطه‌ی دلخواه از خطی باشند، آن‌گاه معادله‌ی این خط را می‌توان از رابطه‌ی $y - y_۱ = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}(x - x_۱)$ به دست آورد و یا می‌توان به صورت $\frac{y - y_۱}{x - x_۱} = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}$ نوشت.

مثال معادله‌ی خطی از نقطه‌ی $A(-۲ , ۱)$ گذشته و عرض از مبدأ آن ۳ باشد را بیابید.

پاسخ عرض از مبدأ خط برابر ۳ است یعنی $B(۰ , ۳)$ روی خط قرار دارد. برای نوشتن معادله‌ی خطی که از نقاط $A(-۲ , ۱)$ و

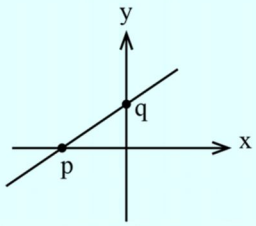
کنکور آسان است
KONKURSARA
برای دانلود اپلیکیشن اینجا را کلیک کنید

برای دریافت نمونه سوالات و جزوات رایگان بیشتر کلیک کنید
کنکور آسان است
KONKURsara

$B(۰,۳)$ بگذرد، به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$y-y_۱=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}(x-x_۱) \xrightarrow[x_۲=۰,\ y_۲=۳]{x_۱=-۲,\ y_۱=۱} y-۱=\frac{۳-۱}{۰+۲}(x+۲) \Rightarrow y=x+۳$$

نکته معادله‌ی خطی که طول از مبدا آن p و عرض از مبدأ آن q باشد، به صورت $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=۱$ می‌باشد.



۳۳) خطی محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند. اگر $M(-۳,۲)$ وسط AB باشد، معادله‌ی این خط کدام است؟

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) $۲x-۳y=-۱۲$
۲) $۲x-۳y=۱۲$
۳) $۳x+۲y=۱۲$
۴) $۳x-۲y=-۱۲$

۳۴) نقطه‌ای بر محور عرض‌ها که از $A(۲,۳)$ و $B(-۴,۱)$ به یک فاصله باشد، کدام است؟

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) $p\left(۰,\frac{۵}{۳}\right)$
۲) $p(۰,-۲)$
۳) $p(۰,۱)$
۴) $p(۰,-۱)$

۳۵) اگر سه نقطه‌ی $A(۱,۰)$ ، $B(۱,۳)$ و $C(۵,۰)$ سه رأس یک مثلث باشند، معادله ی نیمساز رأس A کدام است؟

۱) $y=x-۱$
۲) $y=-x+۱$
۳) $y=۲x-۲$
۴) $y=-۲x+۲$

۳۶) اگر قطعه خطی که یک طرف آن روی محور x ها و طرف دیگر آن روی محور y ها باشد، در نظر گرفته شده و فرض کنیم نقطه‌ی $(۳,۲)$ وسط این قطعه خط قرار داشته باشد، معادله‌ی چنین خطی کدام است؟

۱) $۳x+۲y-۱۲=۰$
۲) $۳x-۲y-۱۲=۰$
۳) $۲x-۳y-۱۲=۰$
۴) $۲x+۳y-۱۲=۰$

۳۷) مختصات نقطه‌ای از خط $۳x+۲y=۵$ که از دو سر پاره‌خط AB با مختصات $A(۳,۱)$ و $B(۱,۳)$ به یک فاصله باشد، کدام است؟

۱) $(۳,-۲)$
۲) $(۱,۱)$
۳) $(-۳,۲)$
۴) $\left(۰,\frac{۵}{۲}\right)$

۳۸) معادله‌ی سه ضلع یک مثلث $x+y=۱$، $y=۲x$ و $x=۱$ است. معادله‌ی خطی که کوچک‌ترین ارتفاع این مثلث بر آن قرار دارد، کدام است؟

(سراسری تجربی ۸۴)

۱) $y=\frac{۲}{۳}$
۲) $x=\frac{۲}{۳}$
۳) $y+x=\frac{۲}{۳}$
۴) $y+x=\frac{۱}{۳}$

۳۹) فاصله مبدأ مختصات از نقطه ثابت دسته خطوط $(۲m-۳)x+(۷-۲m)y+۴=۰$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$
۲) ۲
۳) $۲\sqrt{۲}$
۴) ۴

کنکور آسان است
KONKURsara
برای دانلود اپلیکیشن اینجا را کلیک کنید

برای دریافت نمونه سوالات و جزوات رایگان بیشتر کلیک کنید
کنکور آسان است
KONKURSARA

درسنامه ۵

خط‌های موازی و عمود بر هم

خط‌های موازی: هرگاه شیب‌های دو خط مساوی باشند، آن دو خط موازی می‌باشند.

اگر دو خط $y=ax+b$ و $y=a'x+b'$ با هم موازی باشند باید $a=a'$

مثال به ازای کدام مقدار a، خط گذرنده از نقاط $A(2,-1)$ و $B(-4,3)$ با خط $ay=-3x-1$ موازی است؟

پاسخ ابتدا شیب خط گذرنده از نقاط $A(2,-1)$ و $B(-4,3)$ را به دست می‌آوریم.

$$m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\xrightarrow[x_2=-4\ ,\ y_2=3]{x_1=2\ ,\ y_1=-1} m_{AB}=\frac{3-(-1)}{-4-2}=-\frac{2}{3}$$

برای موازی بودن دو خط فوق، باید شیب‌های آن‌ها با هم برابر باشند.

$$ay=-3x-1\Rightarrow ay+3x=-1\Rightarrow m_1=\frac{-3}{a}$$

$$m_1=m_{AB}\Rightarrow -\frac{3}{a}=-\frac{2}{3}\Rightarrow a=\frac{9}{2}=4/5$$

خط‌های عمود بر هم: دو خط را عمود بر هم گوییم هرگاه شیب‌های دو خط عکس و قرینه هم باشند. به عبارت دیگر شرط آن‌که دو خط $y=ax+b$ و $y=a'x+b'$ برهم عمود باشند آن است که:

$$a=\frac{-1}{a'}\Rightarrow aa'=-1$$

مثال اگر خط L به معادله‌ی $(k+1)y+2kx-k+1=0$ بر خط گذرنده از دو نقطه‌ی $(2,-1)$ و $(3\ ,\ 8)$ عمود باشد، معادله‌ی خط L را بیابید.

پاسخ ابتدا شیب خط داده شده را می‌یابیم:

$$(k+1)y+2kx-k+1=0\Rightarrow m=\frac{-2k}{k+1}$$

از طرفی شیب خط گذرنده از دو نقطه‌ی $A(2,-1)$ و $B(8\ ,\ 3)$ برابر است با:

$$m'=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{3-(-1)}{8-2}=\frac{2}{3}$$

چون دو خط بر هم عمود می‌باشند، پس حاصل ضرب شیب‌های آنها برابر منفی یک است، لذا:

$$mm'=-1\Rightarrow\left(\frac{-2k}{k+1}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=-1\Rightarrow k=3$$

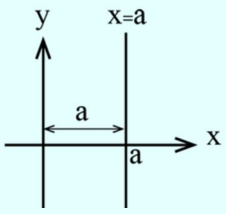
حال k در معادله L قرار می‌دهیم. داریم:

$$(k+1)y+2kx-k+1=0\xrightarrow{k=3}4y+6x-2=0$$

معادله‌ی برخی خطوط خاص

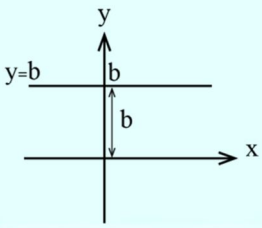
۱) **خطوط عمودی:** معادله‌ی خطی که از دو نقطه‌ی $A(a\ ,\ y_A)$ و $B(a\ ,\ y_B)$ عبور می‌کند، به صورت $x=a$ است.

چنین خطی را خط عمودی گویند و طول همه‌ی نقاط روی آن؛ عدد ثابت a است.



۲) **خطوط افقی:** معادله‌ی خطی که از دو نقطه $A(x_A,b)$ و $B(x_B,b)$ عبور می‌کند، به صورت $y=b$ است.

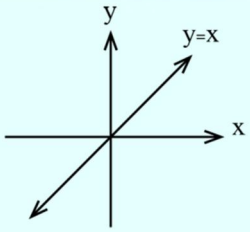
چنین خطی را خط افقی گویند و عرض همه‌ی نقاط روی آن، عدد ثابت b است.



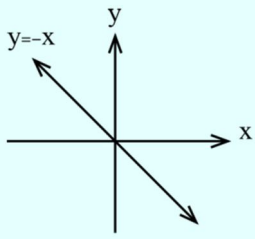
کنکور آسان است
KONKURSARA
برای دانلود اپلیکیشن اینجا را کلیک کنید

برای دریافت نمونه سوالات و جزوات رایگان بیشتر کلیک کنید
کنکور آسان است
KONKURSARA

۳) **خط نیمساز ربع اول و سوم**: خطی که معادله‌ی آن به صورت $y=x$ باشد، نیمساز ربع اول و سوم نامیده می‌شود. این خط از مبدأ مختصات می‌گذرد و نقاطی را شامل می‌شود که مختصات طول و عرض آنها با هم برابرند.



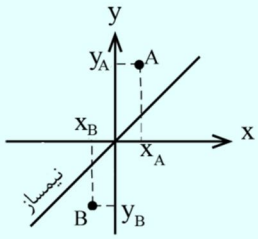
۴) **خط نیمساز ربع دوم و چهارم**: خطی که معادله‌ی آن به صورت $y=-x$ باشد، نیمساز ربع دوم و چهارم نامیده می‌شود. این خط مبدأ مختصات می‌گذرد و نقاطی را شامل می‌شود که مختصات طول و عرض آنها قرینه یکدیگرند.



نکته اگر نقطه‌ی $A(x_A, Y_a)$ در ربع اول بالای نیمساز واقع باشد باید:

$$\begin{cases} x_A > 0 \\ y_A > 0 \\ y_A > x_A \end{cases}$$

حال اگر نقطه‌ی $B(x_B, y_B)$ در ربع سوم زیر نیمساز واقع باشد باید:



$$\begin{cases} x_B < 0 \\ y_B < 0 \\ x_B > y_B \end{cases}$$

مثال نقطه‌ی $A(-2m-1, m-2)$ در ربع سوم زیر نیمساز قرار دارد. حدود m را بیابید.

پاسخ باید شرایط زیر برقرار باشد.

$$\begin{cases} x_A < 0 \\ y_A < 0 \\ x_A > y_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2m-1 < 0 \\ m-2 < 0 \\ -2m-1 > m-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{2} \\ m < 2 \\ m < \frac{1}{3} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -\frac{1}{2} < m < \frac{1}{3}$$

اوضاع نسبی دو خط

اگر خط D به معادله‌ی $ax+by+c=0$ و خط D' به معادله‌ی $a'x+b'y+c'=0$ باشد:

الف) اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \Rightarrow$ دو خط D و D' متقاطعند

ب) اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \Rightarrow$ دو خط D و D' موازیند

ج) اگر $aa'-bb'=0 \Rightarrow$ دو خط D و D' بر هم عمودند

د) اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow$ دو خط D و D' بر هم منطبقند

مثال اگر دو خط به معادلات $2x+5my+2m=0$ و $mx+2(m^2+1)y=3m+2$ منطبق برهم باشند، از نقطه‌ای با کدام مختصات می‌گذرند؟

۱) $(2, 6)$ ۲) $(3, 6)$ ۳) $(2, 12)$ ۴) $(5, 12)$

کنکور آسان است
KONKURSARA
برای دانلود اپلیکیشن اینجا را کلیک کنید

برای دریافت نمونه سوالات و جزوات رایگان بیشتر کلیک کنید
کنکور آسان است
KONKURSARA

پاسخ

گزینه‌ی ۳

$$\begin{cases} mx+۲(m^۲+۱)y=۳m+۲ \\ ۲x+۵my=-۲m \end{cases} \Rightarrow \frac{m}{۲}=\frac{۲(m^۲+۱)}{۵m}=\frac{۳m+۲}{-۲m} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{m}{۲}=\frac{۲(m^۲+۱)}{۵m} \Rightarrow ۵m^۲=۴m^۲+۴ \Rightarrow m^۲=۴ \Rightarrow m=\pm ۲ \\ \frac{m}{۲}=\frac{۳m+۲}{-۲m} \Rightarrow -۲m^۲=۶m+۴ \Rightarrow m^۲+۳m+۲=۰ \Rightarrow m=-۱ \text{ یا } m=-۲ \end{cases}$$

جواب مشترک دو معادله‌ی حاصل مورد قبول است یعنی $m=-۲$ و معادله‌ی خط به صورت $-۲x+۱۰y=-۴$ یا $-x+۵y=-۲$ است. این خط از نقطه‌ی (۲ , ۱۲) می‌گذرد. چون فقط همین نقطه در معادله خط صدق می‌کند.

۴۰) اگر دو خط $y=۳x+۱$ و $y=۳x+m^۲-۳$ دو ضلع مقابل یک متوازی الاضلاع باشند:

۱) m هر عددی می‌تواند باشد.
۲) m هر عددی می‌تواند باشد به جز ۲
۳) m هر عددی می‌تواند باشد به جز صفر.
۴) m هر عددی می‌تواند باشد، به جز ۲ و -۲

۴۱) طول نقطه‌ی M واقع بر محور طول‌ها که از دو نقطه‌ی $(-۲,۳)$ و $(۴,-۱)$ به یک فاصله باشد، کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $-\frac{۲}{۳}$

۴۲) مختصات نقطه‌ای از خط $۳x+۲y=۵$ را که از دو سر پاره‌خط AB که در آن A(۳ , ۱) و B(۱ , ۳) به یک فاصله است، کدام است؟

۱) $(۳,-۲)$ ۲) $(۱,۱)$ ۳) $(-۱,-۱)$ ۴) $\left(۰,\frac{۵}{۲}\right)$

۴۳) نقاط A(۳ , m) و $B(۷,-۱)$ مفروض‌اند. از وسط پاره‌خط AB، خط d را موازی خط به معادله‌ی $۲x=y-۴$ رسم می‌کنیم. اگر عرض از مبدأ خط d، -۵ باشد آن‌گاه مقدار m چقدر است؟

۱) ۲۱ ۲) ۱۹ ۳) ۹ ۴) ۱۱

۴۴) اگر A(۱ , ۱) و $C(-۳,-۳)$ دو راس مقابل در لوزی ABCD باشند، معادله‌ی خطی که دو رأس B و D روی آن قرار می‌گیرند، کدام است؟

۱) $y=-x-۲$ ۲) $y=۲x-۳$
۳) $y=-x-۲\ ;\ (x\neq -۱)$ ۴) $y=۲x-۳\ ;\ (x\neq -۱)$

۴۵) مربع ABCD را در نظر بگیرید. پاره‌خط AB در نقطه‌ی A به طول -۴ بر نیمساز ربع دوم عمود است و رأس B روی محور عرض‌ها قرار دارد، محیط مربع کدام است؟

۱) $۸\sqrt{۲}$ ۲) $۱۶\sqrt{۲}$ ۳) $۱۲\sqrt{۲}$ ۴) $۲۰\sqrt{۲}$

۴۶) سه ضلع مثلثی به معادلات $AB: ۲y-x=۳$ ، $AC: y-۲x=۵$ و $BC: ۲y+۳x=۶$ هستند. معادله‌ی ارتفاع AH از مثلث مفروض، کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور ۸۹)

۱) $۶y-۴x=۱۵$ ۲) $۹y-۶x=۱۷$ ۳) $۳y-۲x=۷$ ۴) $۳y+۲x=۹$

۴۷) دو خط به معادلات $y=(m^۲-۴)x+۱$ و $y=(m^۲+m-۶)x+۲$ با هم موازی‌اند. آن‌گاه این دو خط با خط $y=x+۱$ چه زاویه‌ای می‌سازند؟

۱) ۳۰° ۲) ۴۵° ۳) ۶۰° ۴) ۲۵°

۴۸) اگر نقطه‌ی $A(۲m-۱, m+۱)$ در ربع سوم بالای نیمساز باشد، حدود m کدام است؟

۱) $m<\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}<m<۲$ ۳) $m<-۱$ ۴) $m<-۲$

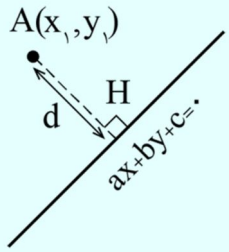
کنکور آسان است
KONKURSARA
برای دانلود اپلیکیشن اینجا را کلیک کنید

برای دریافت نمونه سوالات و جزوات رایگان بیشتر کلیک کنید
کنکور آسان است
konkursara

درسنامه ۶

فاصله‌ی یک نقطه از خط

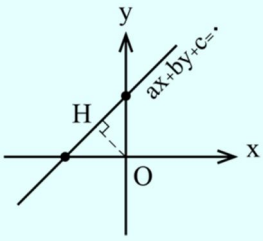
اگر خط L به معادله‌ی $ax+by+c=0$ و نقطه $A(x_1,y_1)$ خارج این خط مطابق شکل مفروض باشند، آن‌گاه منظور از فاصله‌ی نقطه‌ی A از خط L، طول پاره‌خطی است که از نقطه‌ی A به خط L عمود می‌شود که از نظر اندازه، کوتاه‌ترین پاره‌خطی است که می‌توان از نقطه‌ی A به خط L رسم نمود و مقدار آن را می‌توان از فرمول زیر محاسبه نمود.



$$d=|AH|=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

تذکر مهم در استفاده از فرمول فوق باید دقت شود که معادله خط داده شده حتماً به صورت $ax+by+c=0$ باشد.

نکته فاصله‌ی مبدأ مختصات از خط به معادله‌ی $ax+by+c=0$ برابر است با:



$$|OH|=\frac{|C|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

مثال فاصله‌ی نقطه‌ی $A(-3,1)$ را از خط $4x+3y=10$ به دست آورید.

پاسخ

$$4x+3y=10\Rightarrow 4x+3y-10=0\xrightarrow{A(-3,1)}$$

$$|AH|=\frac{|4x_A+3y_A-10|}{\sqrt{4^2+3^2}}\overset{\substack{x_A=-4\\y_A=1}}{=}\frac{|4(-3)+3(1)-10|}{\sqrt{25}}=\frac{19}{5}$$

۴۹) کدام خط به مبدأ مختصات نزدیک‌تر است؟

۱) $2x+3=0$ ۲) $3y+2=0$ ۳) $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$ ۴) $y=x+1$

۵۰) به ازای کدام مقدار از m، فاصله‌ی نقطه‌ی $A(m,-m)$ از خط $y=x$ برابر $\sqrt{2}$ است؟

۱) ۲ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) -1

۵۱) فاصله‌ی نقطه‌ی $A(1,1)$ از خط $y=-m^2x+2m$ برابر $\frac{4}{\sqrt{1+m^4}}$ است. مجموع مقادیر صحیح m کدام است؟

۱) $\{2,-4\}$ ۲) $\{-1,3\}$ ۳) $\{4,-5\}$ ۴) $\{2,-5\}$

۵۲) خطی محور طول‌ها را در نقطه‌ای با طول ۳ و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۴ قطع می‌کند، فاصله‌ی این خط تا مبدأ مختصات کدام است؟

۱) ۱٫۲ ۲) ۲٫۴ ۳) ۳٫۶ ۴) ۴٫۸

۵۳) فاصله‌ی مبدأ مختصات از خط به معادله $2y+m=mx+4$ برابر ۲ است. این خط محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

کنکور آسان است
konkursara
برای دانلود اپلیکیشن اینجا را کلیک کنید

برای دریافت نمونه سوالات و جزوات رایگان بیشتر کلیک کنید
کنکور آسان است
konkursara

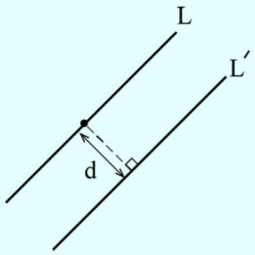
۶۷) دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات $x+2y=6$ و $y-2x=7$ می‌باشند و یک رأس مستطیل نقطه‌ی $A(5,8)$ است. مساحت این مستطیل کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور ۹۰)

۱) $7/2$ ۲) $9/6$ ۳) $11/4$ ۴) $12/8$

درسنامه ۷

فاصله‌ی دو خط موازی

دو خط موازی L و L' به معادلات $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ مطابق شکل مفروض‌اند. برای محاسبه‌ی فاصله‌ی این دو خط موازی از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:



$$d=\frac{|c'-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

نکته مهم

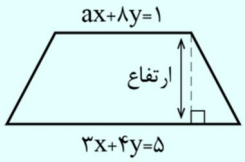
برای استفاده از فرمول فاصله‌ی دو خط موازی، باید ضرایب x و y حتماً یکسان باشند.

مثال

اگر خطوط به معادلات $3x+4y=5$ و $6x+8y=1$ قاعده‌های یک ذوزنقه باشند، طول ارتفاع آن را بیابید.

پاسخ

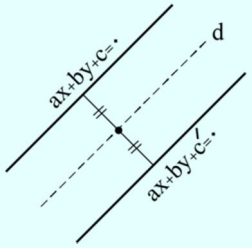
ذوزنقه را مطابق شکل روبرو در نظر بگیرید. می‌دانیم در هر ذوزنقه دو قاعده با هم موازی هستند و فاصله‌ی بین آنها برابر طول ارتفاع ذوزنقه است. بنابراین:



$$\begin{cases}6x+8y=1 \xrightarrow{\div 2} 3x+4y-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow c=-\frac{1}{2}\\ 3x+4y=5 \Rightarrow 3x+4y-5=0 \Rightarrow c'=-5\end{cases} \Rightarrow \text{طول ارتفاع}=\frac{\left|-5\left(-\frac{1}{2}\right)\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{9}{10}$$

خط وسط دو خط موازی

معادله‌ی خطی که با خط‌های $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ موازی و فاصله‌اش از این خط‌ها برابر باشد عبارت است از:



$$d=ax+by+\frac{c+c'}{2}=0$$

نکته مهم

برای استفاده از رابطه‌ی فوق، باید ضرایب x و y یکسان باشند، در صورتی که یکسان نبودند، خودمان ضرایب را یکسان می‌کنیم.

۶۸) فاصله‌ی بین دو خط به معادلات $y=x\sqrt{3}+2$ و $\sqrt{3}y-3x+6=0$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور ۸۸)

۱) $2-\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{3}-1$ ۳) $\sqrt{3}+1$ ۴) $2+\sqrt{3}$

۶۹) معادله‌ی خطی که با خط $4x+3y=1$ موازی و به فاصله‌ی ۳ از آن باشد، کدام است؟

۱) $4x+3y-15=0$ ۲) $4x+3y+14=0$
۳) $3x+4y-16=0$ ۴) $3x+4y+14=0$

۷۰) دو ضلع مربعی روی خط $\pi x+\pi y-1=0$ و $\pi x+\pi y-5=0$ قرار دارد. مساحت دایره‌ی محاطی مربع کدام است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) 2π ۲) $\frac{2}{\pi}$ ۳) $\frac{1}{\pi}$ ۴) π

۷۱) اگر $y=-\frac{3}{4}x+1$ و $3x+4y+a=0$ دو ضلع یک مربع با محیط ۲۰ باشند، مقدار a کدام عدد می‌تواند باشد؟

کنکور آسان است
konkursara
برای دانلود اپلیکیشن اینجا را کلیک کنید

برای دریافت نمونه سوالات و جزوات رایگان بیشتر کلیک کنید
کنکور آسان است konkursara

۱) -۲۹ ۲) ۲۹ ۳) -۲۱ ۴) -۲۵

۷۲) اگر $۳y=-۴x+۲a+۱$ و $y+\frac{۴}{۳}x+۲=۰$ دو ضلع مربعی با مساحت ۹ باشند، مقدار صحیح مثبت a کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۴ ۳) ۲۲ ۴) ۸

۷۳) مقدار a در معادلات خطوط $d_۱:(a-۲)x+y=۲$ و $d_۲:(a-۲)x+y=-۱$ چه مقدار باید باشد تا فاصله‌ی این دو خط بیش‌ترین مقدار ممکن را داشته باشند؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۱

۷۴) مساحت ذوزنقه‌ای که رأس‌های آن روی محورهای مختصات است و معادله‌ی خطوط گذرنده از قاعده‌هایش به صورت y=x+۲ و y=x+۴ است چقدر می‌باشد؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۴)

۷۵) خطوط x+y=۱۲ و x+y=۸ دو ضلع مقابل یک مربع می‌باشند معادله خطی که از وسط‌های دو ضلع دیگر مربع می‌گذرد کدام است؟

۱) x+y=۲ ۲) x+y=۸ ۳) x+y=۱۰ ۴) x+y=۶

معادله درجه دوم

معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ را با شرط $a\neq ۰$ معادله درجه دوم می‌نامند. برای به دست آوردن ریشه‌های آن دلتای (Δ) معادله را تشکیل داده داریم:

$$\Delta=b^۲-۴ac$$

۱) اگر $\Delta>۰$ باشد، آن‌گاه ریشه‌های معادله $(x_۱ , x_۲)$ از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\Delta>۰ \xrightarrow{\text{دو ریشه ی حقیقی دارد}} x_۱ , x_۲=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

۲) اگر $\Delta=۰$ باشد، معادله یک ریشه حقیقی مضاعف دارد آن ریشه $x=-\frac{b}{۲a}$ است. (معادله مربع کامل است.)

۳) اگر $\Delta<۰$ معادله ریشه حقیقی ندارد.

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^۲-۴x+۳=۰$ ب) $x^۲-۶x+۹=۰$ ج) $-x+x^۲+۵=۰$

پاسخ:

الف) $x^۲-۴x+۳=۰$, $a=۱$, $b=-۴$, $c=۳$

$$\Delta=b^۲-۴ac=۱۶-۴\times۳=۱۶-۱۲=۴>۰ \xrightarrow{\text{دو ریشه حقیقی}} x_۱ , x_۲=\frac{۴\pm۲}{۲}\Rightarrow x_۱=۱ , x_۲=۳$$

ب) $x^۲-۶x+۹=۰$, $a=۱$, $b=-۶$, $c=۹$

$$\Delta=b^۲-۴ac=۳۶-۳۶=۰$$

ج) $-x+x^۲+۵=۰$, $a=۱$, $b=-۱$, $c=۵ \xrightarrow{\text{یک ریشه حقیقی}} x=\frac{۶}{۲}=۳$

$\Delta=b^۲-۴ac=۱-۲۰=-۱۹<۰$ ریشه حقیقی ندارد

روابط بین جواب‌های معادله‌ی درجه دوم

معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ با شرط $\Delta>۰$ دو جواب متمایز دارد. اگر $x_۱$ و $x_۲$ دو جواب معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ باشد، روابط زیر بین جواب‌های معادله برقرار است:

کنکور آسان است konkursara
برای دانلود اپلیکیشن اینجا را کلیک کنید

برای دریافت نمونه سوالات و جزوات رایگان بیشتر کلیک کنید
کنکور آسان است
KONKURSARA

الف) $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ب) $p = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ ج) $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \sqrt{s^2 - 4p}$

تذکر حالات دیگر را می‌توان به رابطه‌ی دیگر بین S و P تبدیل کرد، به عنوان مثال داریم:

۱) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = s^2 - 2p$

۲) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 3ps$

۳) $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{(x_1 + x_2) + 2\sqrt{x_1x_2}} = \sqrt{S + 2\sqrt{p}}$

۴) $\left|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right| = \sqrt{(x_1 + x_2) - 2\sqrt{x_1x_2}} = \sqrt{S - 2\sqrt{p}}$

۵) $\alpha x_1^n + \beta x_2^n = \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\left(x_1^n + x_2^n\right) + \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\left(x_1^n x_2^n\right)$

۶) $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}} + \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}} = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1x_2}} = \frac{S}{\sqrt{p}}$

مثال اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشند، حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $x_1 + x_2 S = -\left(\frac{-3}{1}\right) = 3 = S$

ب) $x_1x_2 = p = \frac{1}{1}$

ج) $x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2p = 3^2 - 2 \times 1 = 7$

د) $x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3pS = 3^3 - 3 \times 3 \times 1 = 18$

هـ) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{S}{P} = \frac{3}{1} = 3$

و) $x_1x_2^2 + x_2x_1^2 = x_1x_2(x_1 + x_2) = SP = 3$

ط) $A = \left|\frac{x_1}{\sqrt{x_2}} - \frac{x_2}{\sqrt{x_1}}\right|$ طرفین را به توان دو می رسانیم. $\longrightarrow$ $A^2 = \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} - \frac{2x_1x_2}{\sqrt{x_1x_2}}$

$\Rightarrow A^2 = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1x_2} - \frac{2x_1x_2}{\sqrt{x_1x_2}} = \frac{s^3 - 3sp}{p} - \frac{2p}{\sqrt{p}} = 16 \Rightarrow A^2 = 16 \xrightarrow{A > 0} A = 4$

نکته گاهی اوقات عبارت مورد سؤال تشابه زیادی به خود معادله دارد.

ر) $\left(x_1^2 + 1\right)\left(x_2^2 + 1\right)$

چون x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 3x_1 + 1 = 0$ هستند بنابراین در خود معادله صدق می‌کنند داریم:

$x_1^2 - 3x_1 + 1 = 0 \Rightarrow x_1^2 + 1 = 3x_1 \; (1) \quad x_2^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x_2^2 + 1 = 3x_2 \; (2)$

در نتیجه:

کنکور آسان است
KONKURSARA
برای دانلود اپلیکیشن اینجا را کلیک کنید

برای دریافت نمونه سوالات و جزوات رایگان بیشتر کلیک کنید
کنکور آسان است
konkursara

$$(x_1^2+1)(x_2^2+1)\overset{(1)}{\underset{(2)}{=}}(3x_1)(3x_2)=9p=9\times 1=9$$

ز) $$x_1\left(\underbrace{2x_2^3-6x_2^2}_{\text{فاکتور از }2x_2^2}\right)+x_2\left(\underbrace{2x_1^3-6x_1^3}_{\text{فاکتور از }2x_1}\right)=2x_1x_2(x_2^2-3x_2)+2x_1x_2(2x_1^2-3x_1) \qquad (*)$$

چون x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2-3x+1=0$ هستند لذا در خود معادله صدق می‌کنند. داریم:

$$x_1^2-3x_1+1=0\Rightarrow x_1^2-3x_1=-1$$

$$x_2^2-3x_2+1=0\Rightarrow x_2^2-3x_2=-1$$

در نتیجه:

$$(*):\ 2x_1x_2\left(\overbrace{x_2^2-3x_2}^{(-1)}\right)+2x_1x_2\left(\overbrace{2x_1^2-3x_1}^{(-1)}\right)=-4x_1x_2=-4p=-4$$

ویژگی معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$ (در حالت $\Delta>0$)

۱) اگر $c=0\Leftrightarrow$ معادله یک ریشه برابر صفر دارد $\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=-\frac{b}{a}\end{cases}$

۲) اگر $b=0\Leftrightarrow$ معادله دو ریشه قرینه دارد

۳) اگر $a=0, b\neq 0\Leftrightarrow x=-\frac{c}{b}$

۴) اگر $a=c\Leftrightarrow$ دو ریشه معادله عکس یکدیگرند.

۵) اگر $a=-c\Leftrightarrow$ دو ریشه معادله قرینه عکس یکدیگرند.

۶) اگر $a+b+c=0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=1\\x_2=\frac{c}{a}\end{cases}$

۷) اگر $a+c=b\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-1\\x_2=-\frac{c}{a}\end{cases}$

مثال اگر معادله $ax^2+2bx+c=0$ دارای دو ریشه عکس یکدیگر باشد کدام درست است؟

۱) $a=-c$ ۲) $b=c$ ۳) $|b|>|a|$ ۴) $|b|<|a|$

پاسخ گزینه‌ی ۳ معادله دارای دو ریشه حقیقی است. بنابراین:

$$\Delta=b^2-4ac=(2b)^2-4ac>0\Rightarrow 4b^2-4ac>0\Rightarrow b^2-ac>0$$

از طرفی دیگر ریشه‌های معادله عکس یکدیگرند بنابراین باید a=c باشد. داریم:

$$b^2-ac>0\xrightarrow{a=c}b^2-a^2>0\Rightarrow b^2>a^2\xrightarrow{\text{جذر}}|b|>|a|$$

مثال مقدار a را طوری بیابید که معادله‌ی $x^2-(a-1)x+a-7=0$ دارای دو جواب قرینه و معکوس هم باشند.

پاسخ باید $a=-c$ بنابراین:

$$1=-(a-7)\Rightarrow a=6$$

به ازای a=۶، $\Delta>0$ است. بنابراین قابل قبول است.

نکاتی درباره جواب‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+2bx+c=0$

۱) اگر $\Delta>0\Leftrightarrow$ معادله دو ریشه‌ی متمایز دارد

کنکور آسان است
konkursara
برای دانلود اپلیکیشن اینجا را کلیک کنید

برای دریافت نمونه سوالات و جزوات رایگان بیشتر کلیک کنید
کنکور آسان است konkursara

الف) $\frac{c}{a}<0 \Leftrightarrow$ دو ریشه ی مختلف علامت دارد $(x_1<0<x_2) \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a}<0 & , \ |x_1|>|x_2| \\ -\frac{b}{a}=0 & \text{دو ریشه قرینه‌ی یکدیگرند} \\ -\frac{b}{a}>0 & , \ |x_2|>|x_1| \end{cases}$

ب) $\frac{c}{a}=0 \Leftrightarrow$ یک ریشه صفر و دیگری $\frac{-b}{a}$ است

ج) $\frac{c}{a}>0 \Leftrightarrow$ دو ریشه هم، علامت اند $\Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a}<0 & \text{هر دو ریشه‌اند منفی} \\ -\frac{b}{a}=0 & \text{غیر ممکن است} \\ -\frac{b}{a}>0 & \text{هر دو ریشه مثبت است} \end{cases}$

۲) اگر $\Delta=0 \Rightarrow$ معادله دارای ریشه‌ی مضاعف است.

$$\Leftrightarrow x_1=x_2=\frac{-b}{2a} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a}>0 \Rightarrow x_1=x_2>0 \\ -\frac{b}{a}<0 \Rightarrow x_1=x_2<0 \end{cases}$$

۳) اگر $\Delta<0 \Rightarrow$ معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

مثال اگر معادله $mx^2+2(m-1)x+m-3=0$ دارای دو ریشه مثبت باشد، حدود m کدام است؟

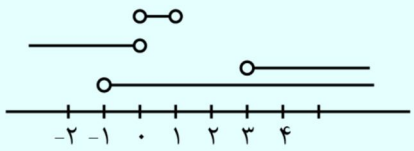
۱) $(-3,1)$ ۲) $(0,1)$ ۳) $(-1,0)$ ۴) ϕ

پاسخ گزینه‌ی ۴ باید $\Delta>0$ ، $\frac{c}{a}>0$ و $-\frac{b}{a}>0$ با هم برقرار باشند.

$$\Delta=b^2-4ac=4(m-1)^2-4m(m-3)=4(m+1)>0 \Rightarrow m>-1$$

$$\frac{c}{a}=\frac{m-3}{m}>0 \xrightarrow{\text{حل نامعادله}} m<0 \text{ یا } m>3 \quad \text{و} \quad -\frac{b}{a}=\frac{-2(m-1)}{m}>0 \xrightarrow{\text{حل نامعادله}} 0<m<1$$

از محدوده‌هایی که برای m حاصل شده است، اشتراک می‌گیریم. داریم:



در نتیجه $m=\phi$ یعنی مقداری برای m وجود ندارد.

مثال اگر $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ باشد، معادله‌ی $x^2-(\sin^3\alpha+\cos^3\alpha)x+\sin\alpha-\sqrt{\sin\alpha}=0$ به ازای کلیه مقادیر α :

۱) دو ریشه مثبت دارد. ۲) دو ریشه منفی دارد.

۳) دو ریشه‌ی مختلف العلامت دارد. ۴) دو ریشه مساوی دارد.

پاسخ گزینه‌ی ۳

نکته اگر $0<x<\frac{\pi}{2} \Rightarrow 0<\sin x<1 \Rightarrow \ldots<\sin^3 x<\sin^2 x<\sin x<\sqrt{\sin x}<\sqrt[3]{\sin x}<\ldots$

بنابراین طبق نکته ذکر شده داریم:

$$\sin\alpha<\sqrt{\sin\alpha} \Rightarrow \underbrace{\sin\alpha-\sqrt{\sin\alpha}}_{\frac{c}{a}}<0 \Rightarrow \frac{c}{a}<0 \Rightarrow \text{معادله دو ریشه مختلف العلامت دارد}$$

مثال به ازای کدام مقادیر m معادله $mx^2-2x-4m-1=0$ دو ریشه متمایز منفی دارد؟ (مشابه سراسری تجربی ۹۵)

کنکور آسان است konkursara
برای دانلود اپلیکیشن اینجا را کلیک کنید

برای دریافت نمونه سوالات و جزوات رایگان بیشتر کلیک کنید
کنکور آسان است
KONKURSARA

۱) $-\frac{۱}{۴} < m < ۰$ ۲) $m > ۲$ ۳) $۰ < m < \frac{۱}{۴}$ ۴) $-۱ < m < -\frac{۱}{۴}$

پاسخ گزینه‌ی ۱ برای این‌که معادله درجه دوم دارای دو ریشه متمایز منفی باشد باید:

$$\begin{cases} \frac{c}{a} > ۰ \Rightarrow \frac{-۴m-۱}{m} > ۰ \xrightarrow{\text{حل نامعادله}} -\frac{۱}{۴} < m < ۰ \\ -\frac{b}{a} < ۰ \Rightarrow \frac{۲}{m} < ۰ \Rightarrow m < ۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -\frac{۱}{۴} < m < ۰$$

مسائل پارامتری

در این مسأله‌ها یکی از دو رابطه بین مجموع یا حاصلضرب دو ریشه را به رابطه داده شده اضافه نموده و از دستگاه دو معادله تشکیل شده یکی از ریشه‌ها را به دست می‌آوریم. (شاید برحسب پارامتر) و از قرار دادن آن در معادله پارامتر به دست می‌آید.

مثال اگر x' و x'' ریشه‌های معادله $x^۲ - ۱۵x + a = ۰$ باشد، a را چنان بیابید که $۲x' - ۳x'' = ۰$.

پاسخ

$$\begin{cases} ۲x' - ۳x'' = ۰ \\ x' + x'' = ۱۵ \end{cases} \Rightarrow x' = ۹ \xrightarrow{\text{در معادله}} ۸۱ - ۱۳۵ + a = ۰ \Rightarrow a = ۵۴$$

۷۶) اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $x^۲ - ۴x + ۱ = ۰$ باشند، مقدار $\alpha^{\beta} \times \beta^{\alpha}$ برابر کدام است؟

۱) $(۲ - \sqrt{۳})^۳$ ۲) $(۲ + \sqrt{۳})^۳$ ۳) $(۷ + ۴\sqrt{۳})^۳$ ۴) $(۷ - ۴\sqrt{۳})^۳$

۷۶) در مثلث قائم‌الزاویه‌ای به طول اضلاع a ، a+۲ و a+۴ ، مساحت کدام است؟ (آزاد غیرپزشکی ۹۰)

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۴۸ ۴) ۶

۷۸) اگر به اعداد ۱۲ و ۱۸، a واحد اضافه گردد، به حاصل ضرب آن دو عدد $۲a^۲$ واحد اضافه می‌شود. مقدار $\sqrt{a^۲ + ۴a + ۴}$ کدام است؟

۱) ۳۱ ۲) ۳۲ ۳) ۳۳ ۴) ۳۶

۷۹) اگر سه عدد غیر صفر a، b و c به ترتیب سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، در این صورت معادله‌ی درجه‌ی دوم $۹ax^۲ + ۶bx + c = ۰$ دارای ..... .

۱) ریشه مضاعف است. ۲) دو ریشه متمایز مثبت است.
۳) دو ریشه متمایز منفی است. ۴) ریشه نمی‌باشد.

۸۰) ریشه‌های معادله درجه دوم $mnx^۲ - (m^۲ + n^۲)x + mn = ۰$ با شرط $m^۴ + n^۴ > ۲m^۲$ عبارتند از:

۱) $x'' = m^۲ \ , \ x' = n^۲$ ۲) $x'' = \frac{n}{m} \ , \ x' = \frac{m}{n}$
۳) $x'' = \frac{۱}{m^۲} \ , \ x' = \frac{۱}{n^۲}$ ۴) $x'' = \frac{۱}{mn} \ , \ x' = mn$

۸۱) اگر معادله‌ی $x^۲ + ax + b = ۰$ دارای دو جواب به صورت عدد صحیح باشد، کدام گزینه همواره درست است؟

۱) اگر هر دو جواب فرد باشند آن‌گاه a و b اعدادی فرد هستند.
۲) اگر هر دو جواب فرد باشند آن‌گاه a فرد و b زوج است.
۳) اگر یک جواب زوج و دیگری فرد باشد آن‌گاه a زوج و b فرد است.
۴) اگر یک جواب زوج و دیگری فرد باشد آن‌گاه a فرد و b زوج است.

۸۲) به ازای کدام مقادیر a ، معادله‌ی درجه دوم $۲x^۲ + ax + a - \frac{۳}{۲} = ۰$ ، دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز است؟ (سراسری تجربی ۸۱)

۱) $a < ۲$ یا $a > ۶$ ۲) $a < ۳$ یا $a > ۴$ ۳) $۲ < a < ۶$ ۴) $۳ < a < ۴$

۸۳) به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله‌ی درجه دوم $۲x^۲ + (m+۱)x + \frac{۱}{۲}m + ۲ = ۰$ ، فاقد ریشه‌ی حقیقی است؟

(سراسری تجربی خارج از کشور ۸۹)

۱) $-۳ < m < ۵$ ۲) $-۳ < m < ۴$

کنکور آسان است
KONKURSARA
برای دانلود اپلیکیشن اینجا را کلیک کنید

برای دریافت نمونه سوالات و جزوات رایگان بیشتر کلیک کنید
کنکور آسان است konkursara

۱) -۲ ۲) ۳ ۳) -۳ ۴) -۱

۱۱۳) اگر نمودار تابع $f(x)=۲x^۳-۵x^۲-x+m$ ، محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کند، طول‌های دو نقطه ی تلاقی دیگر آن با محور x ها کدام‌اند؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۹)

۱) $-۱ , \frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲} , ۱$ ۳) $-۱ , \frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲} , ۳$

۱۱۴) اگر α و β دو ریشه‌ی معادله‌ی $x^۲+۳x-۱=۰$ باشند، حاصل $\beta^۳-۲\alpha^۲+\beta^۲+\alpha$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) -۱۸ ۴) -۲۵

۱۱۵) اگر رابطه‌ی $\frac{x_۱^۲+mx_۱}{x_۱^۲+x_۲^۲}=\frac{۱}{۲}$ بین ریشه‌های حقیقی معادله $x^۲+mx-m^۳+۱=۰$ برقرار باشد، چند مقدار قابل قبول برای m وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

درسنامه ۹

معادله‌ی درجه دوم

۱) معادله‌ی درجه دومی که جواب‌های آن اعداد حقیقی $x_۱$ و $x_۲$ باشد، به صورت $x^۲-(x_۱+x_۲)x+x_۱x_۲=۰$ است. به عبارت دیگر، اگر مجموع دو عدد S و حاصل ضربشان P باشد آن دو عدد از حل معادله‌ی $x^۲-Sx+p=۰$ حاصل می‌شود:

مثال کدام معادله درجه دو ریشه‌هایش $\frac{\sqrt{۵}-۲}{\sqrt{۵}+۲}$ و $\frac{\sqrt{۵}+۲}{\sqrt{۵}-۲}$ می‌باشد؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) $x^۲-\sqrt{۵}x+۱=۰$ ۲) $x^۲-۱۸x+۱=۰$
۳) $x^۲-۹x+۱=۰$ ۴) $x^۲-۲\sqrt{۵}x+۱=۰$

پاسخ گزینه‌ی ۲ مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله را می‌یابیم:

$$\begin{cases} p=x_۱x_۲=\frac{\sqrt{۵}-۲}{\sqrt{۵}+۲}\times\frac{\sqrt{۵}+۲}{\sqrt{۵}-۲}=۱ \\ S=x_۱+x_۲=\frac{\sqrt{۵}-۲}{\sqrt{۵}+۲}+\frac{\sqrt{۵}+۲}{\sqrt{۵}-۲}=\frac{(\sqrt{۵}-۲)^۲+(\sqrt{۵}+۲)^۲}{(\sqrt{۵}+۲)(\sqrt{۵}-۲)}=\frac{۵+۴-۴\sqrt{۵}+۵+۴+۴\sqrt{۵}}{۵-۴}=۱۸ \end{cases}$$

در نتیجه:

$$x^۲-Sx+p=۰ \xrightarrow[S=۱۸]{P=۱} x^۲-۱۸x+۱=۰$$

۲) اگر معادله‌ی درجه دومی با ضرایب گویا دارای ریشه‌ی غیر گویا $p+\sqrt{q}\ (p,q\in Q)$ باشد، ریشه‌ی دیگر آن به صورت $p-\sqrt{q}$ خواهد بود.

مثال اگر یکی از ریشه‌های معادله درجه‌ی دوم با ضرائب گویا $x_۱=\sqrt{۷-\sqrt{۴۸}}$ باشد، آن معادله کدام است؟

۱) $x^۲-۴x+۱=۰$ ۲) $x^۲-۴x-۱=۰$ ۳) $x^۲+۴x+۱=۰$ ۴) $x^۲-۷x+۱=۰$

پاسخ گزینه‌ی ۱

$$x_۱=\sqrt{۷-\sqrt{۴۸}}=\sqrt{۷-\sqrt{۱۶\times۳}}=\sqrt{۷-۴\sqrt{۳}}=\sqrt{(۲-\sqrt{۳})^۲}=۲-\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow x_۱=۲-\sqrt{۳}\Rightarrow x_۲=۲+\sqrt{۳}\Rightarrow\begin{cases} x_۱+x_۲=۴ \\ x_۱x_۲=۱ \end{cases}\Rightarrow x^۲-۴x+۱=۰$$

۳) برای یافتن معادله‌ی درجه دوم جدید که ریشه‌های آن رابطه‌ای با ریشه‌های معادله‌ی قبلی داشته باشد، P' و S' را برای معادله‌ی جدید به دست آورده و آن‌گاه معادله‌ی $x^۲-S'x+P'=۰$ را تشکیل می‌دهیم.

کنکور آسان است konkursara
برای دانلود اپلیکیشن اینجا را کلیک کنید

برای دریافت نمونه سوالات و جزوات رایگان بیشتر کلیک کنید
کنکور آسان است
konkursara

مثال اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $x^۲-۲x-۱=۰$ باشد. معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{۱}{\alpha+۱}$ و $\frac{۱}{\beta+۱}$ باشد.

(هماهنگ کشوری خرداد ۹۵)

پاسخ

$$S=۲\Rightarrow \alpha+\beta=۲(*), P=-۱\Rightarrow \alpha\beta=-۱ \ (**)$$

با فرض $x_۱=\frac{۱}{\alpha+۱}$ و $x_۲=\frac{۱}{\beta+۱}$ داریم:

$$x_۱+x_۲=\frac{۱}{\alpha+۱}+\frac{۱}{\beta+۱}=\frac{\alpha+\beta+۲}{\alpha\beta+\alpha+\beta+۱}\underset{(**)}{\overset{(*)}{=}}\frac{۲+۲}{-۱+۲+۱}=۲=S' \qquad (۱)$$

$$x_۱x_۲=\left(\frac{۱}{\alpha+۱}\right)\left(\frac{۱}{\beta+۱}\right)=\frac{۱}{\alpha\beta+\alpha+\beta+۱}\underset{(**)}{\overset{(*)}{=}}\frac{۱}{۲}=P' \qquad (۲)$$

معادله‌ی جدید: $x^۲-۲x+\frac{۱}{۲}=۰$: معادله‌ی جدید $x^۲-S'x+p'=۰\underset{(۲)}{\overset{(۱)}{=}}$

نکاتی از تشکیل معادله‌ی جدید

معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲+bx+c=۰$ را در نظر بگیرید. معادله‌ای که:

۱) ریشه‌هایش قرینه‌ی هر یک از ریشه‌های معادله‌ی فوق باشد، کافی است در معادله فوق علامت b را قرینه کنیم. یعنی:

$$ax^۲-bx+c=۰$$

۲) ریشه‌هایش عکس هر یک از ریشه‌های معادله فوق باشند، کافی است در معادله فوق جای a و c را عوض کنیم.

$$cx^۲+bx+a=۰$$

۳) ریشه‌هایش k برابر هر یک از ریشه‌های معادله فوق باشند، کافی است ضریب x را در k و مقدار ثابت c را در $k^۲$ ضرب کنیم.

$$ax^۲+bkx+ck^۲=۰$$

۴) ریشه‌هایش k واحد بیشتر از هر یک از ریشه‌های معادله فوق باشد، کافی است در معادله‌ی فوق، x را به $x-k$ تبدیل کنیم:

$$a(x-k)^۲+b(x-k)+c=۰$$

۵) ریشه‌هایش k واحد کم‌تر از هر یک از ریشه‌های معادله‌ی فوق باشد، کافی است در معادله‌ی فوق x را به x+k تبدیل کنیم:

$$a(x+k)^۲+b(x+k)+c=۰$$

۶) ریشه‌هایش عکس و قرینه‌ی ریشه‌های معادله‌ی فوق باشد، کافی است جای a و c را عوض کنیم و b را نیز در یک منفی ضرب کنیم:

$$cx^۲-bx+a=۰$$

معادله دو مجذوری

بعضی معادله‌ها، اغلب نسبت به متغیر خاصی، از درجه دوم نیستند، اما نسبت به یک عبارتی شامل آن متغیر از درجه دوم هستند. برای مثال معادله $x^۴-۱۰x^۲+۹=۰$ یک معادله درجه دوم نسبت به متغیر x نیست اما اگر به جای $x^۲$ ، در معادله‌ی u قرار دهیم معادله برحسب u به صورت $u^۲-۱۰u+۹=۰$ در می‌آید که یک معادله درجه دوم نسبت به متغیر u می‌باشد. معادله اصلی یعنی معادله $x^۴-۱۰x^۲+۹=۰$ را یک معادله دو مجذوری می‌گویند، یعنی درجه دو نسبت به عبارت $x^۲$. به طور مشابه $(y^۲+۴y)^۲-(y^۲+۴y)-۲۰=۰$ یک معادله درجه دوم نسبت به عبارت $y^۲+۴y$ می‌باشد زیرا می‌توان آن را با جانشینی $u=y^۲+۴y$ به صورت $u^۲-u-۲=۰$ نوشت که یک معادله درجه دوم نسبت به متغیر u است.

مثال معادله‌ی $x^۴-۱۰x^۲+۹=۰$ را حل کنید. (مشابه تمرین کتاب درسی)

پاسخ اگر $x^۲=u$ در نظر بگیریم در نتیجه $x^۴=u^۲$ و معادله داده شده برحسب u به صورت زیر درمی‌آید:

کنکور آسان است
konkursara
برای دانلود اپلیکیشن اینجا را کلیک کنید

برای دریافت نمونه سوالات و جزوات رایگان بیشتر کلیک کنید
کنکور آسان است
KONKURsara

$$u^{۲}-۱۰u+۹=۰\Rightarrow(u-۱)(u-۹)=۰\Rightarrow\begin{cases}u=۱\\u=۹\end{cases}\Rightarrow$$
$$\begin{cases}x^{۲}=۱\Rightarrow x=\pm۱\\x^{۲}=۹\Rightarrow x=\pm۳\end{cases}$$

۱۱۶) معادله درجه‌ی دوم که ریشه‌های آن $\frac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{a-b}}$ و $\frac{a}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}$ می‌باشد برابر است با: (مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) $x^{۲}-\frac{۲a\sqrt{a}}{b^{۲}}x+\frac{a^{۲}}{bc}=۰$
۲) $bx^{۲}-۲\sqrt{a}x+a^{۲}=۰$
۳) $bx^{۲}-۲a\sqrt{a}x+a^{۲}=۰$
۴) $x^{۲}-۲a\sqrt{a}x+\frac{a^{۲}}{b}=۰$

۱۱۷) اگر در معادله درجه دوم $ax^{۲}+bx+c=۰$، a، b و c اعداد گویا و $x=\sqrt{۵}-۳$ یکی از ریشه‌های معادله باشد، مجموع مربعات ریشه‌ها کدام است؟

۱) $۱۴-۲\sqrt{۵}$
۲) $۱۴+۲\sqrt{۵}$
۳) ۱۴
۴) ۲۸

۱۱۸) ریشه‌های معادله‌ی $x^{۲}+ax+b=۰$، از ریشه‌های معادله‌ی $۳x^{۲}-۴x-۱=۰$ یک واحد بیشتر است. b کدام است؟ (سراسری خارج از کشور ۸۶)

۱) -۵
۲) ۲
۳) ۴
۴) ۶

۱۱۹) ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $ax^{۲}+ax+b=۰$، یک واحد از ریشه‌های معادله‌ی $۳x^{۲}+۷x+۱=۰$ بیشتر است. b کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۷)

۱) -۲
۲) -۱
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۴}{۳}$

۱۲۰) اگر هر یک از ریشه‌های معادله‌ی $x^{۲}+(b+۱)x-b=۰$ نصف ریشه‌های معادله‌ی $x^{۲}-۲ax+a+۱=۰$ باشند؛ $۲b-a$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۲۱) اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $۲x^{۲}-۳x-۴=۰$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله، به صورت $\left\{\frac{۱}{\alpha}+۱\ ,\ \frac{۱}{\beta}+۱\right\}$ است؟ (سراسری ریاضی ۹۲)

۱) $۴x^{۲}-۵x+۱=۰$
۲) $۴x^{۲}-۳x+۱=۰$
۳) $۴x^{۲}-۵x-۱=۰$
۴) $۴x^{۲}-۳x-۱=۰$

۱۲۲) اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x(۵x+۳)=۲$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادله‌ی $۴x^{۲}-kx+۲۵=۰$ به صورت $\left\{\frac{۱}{\alpha^{۲}},\frac{۱}{\beta^{۲}}\right\}$ است؟ (سراسری ریاضی ۹۰)

۱) ۲۷
۲) ۲۹
۳) ۲۸
۴) ۳۱

۱۲۳) اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $۲x^{۲}-۳x=۱$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادله‌ی $۸x^{۲}+kx-۱=۰$ به صورت $\{\alpha^{۲}\beta\ ,\ \alpha\beta^{۲}\}$ است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۰)

۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۹

۱۲۴) اگر $x=\sqrt{۲}-\sqrt{۳}$ ریشه‌ی معادله‌ی $x^{۴}+ax^{۲}+b=۰$ (a و b صحیح) باشند، آن‌گاه حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) -۱۹
۲) ۸
۳) -۹
۴) ۱۱

کنکور آسان است
KONKURsara
برای دانلود اپلیکیشن اینجا را کلیک کنید

برای دریافت نمونه سوالات و جزوات رایگان بیشتر کلیک کنید
کنکور آسان است
konkursara

۱۲۵) به ازای چه مقدار a معادله $x^۲+\left(۲a\sqrt{a^۲-۳}\right)x+۴=۰$ دارای ریشه‌های مساوی است؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) صفر

۱۲۶) معادله $\left(x^۲+x+۱\right)^۲-۳\left(x^۲+x+۱\right)+۲=۰$ دارای ..... : (مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) چهار ریشه ساده حقیقی است. ۲) دو ریشه‌ی ساده حقیقی است.
۳) دو ریشه مضاعف است. ۴) معادله ریشه حقیقی ندارد.

۱۲۷) معادله‌ی $\left(x^۲+۱\right)^۲-۷\left(x^۲+۱\right)+۱۲=۰$ چند ریشه دارد؟ (آزاد پزشکی ۹۰)

۱) ۴ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۱

۱۲۸) مجموع ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $\left(x^۲+x\right)^۲-۱۸(x^۲+x)+۷۲=۰$، کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۰)

۱) -۴ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۲۹) در یک دنباله‌ی هندسی با جملات مثبت جمله‌ی دوم، دو برابر جمله‌ی پنجم و جمله‌ی هشتم، تشکیل سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی حسابی را می‌دهند، بزرگ‌ترین این سه عدد چند برابر کوچک‌ترین آن‌ها است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور ۹۲)

۱) $۲+\sqrt{۳}$ ۲) $۵+۴\sqrt{۳}$ ۳) $۵+۴\sqrt{۳}$ ۴) $۷+۴\sqrt{۳}$

۱۳۰) به ازای مقداری از a چند جمله‌ای $f(x)=x^۴+ax^۳-۸x$ بر $x+۲$ بخش‌پذیر است. کوچک‌ترین ریشه‌ی معادله‌ی $f(x)=۰$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۴)

۱) $۱-\sqrt{۳}$ ۲) $۱-\sqrt{۵}$ ۳) $-۱-\sqrt{۳}$ ۴) $-۱-\sqrt{۵}$

۱۳۱) به ازای کدام مقادیر m در معادله‌ی $x-۲\sqrt{x}+m-۱=۰$ ، دو جواب متمایز برای x حاصل می‌شود؟
(سراسری تجربی خارج از کشور ۸۸)

۱) $m\geq ۱$ ۲) $m<۲$ ۳) $۱\leq m<۲$ ۴) هیچ مقدار m

۱۳۲) به ازای کدام مقادیر m معادله $x^۳+۳x^۲+(m-۶)x-m+۲=۰$ دارای دو ریشه منفی و یک ریشه مثبت است؟

۱) $m>۲$ ۲) $-۲<m<۶$ ۳) $۲<m<۶$ ۴) $۱<m<۲$

۱۳۳) به ازای کدام مقادیر a، معادله‌ی $x^۳+(a-۱)x^۲+(۴-a)x=۴$ دارای سه ریشه‌ی حقیقی متمایز مثبت است؟
(سراسری تجربی خارج از کشور ۹۴)

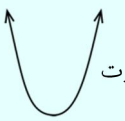
۱) $a<-۴$ ۲) $a>-۴$ ۳) $a<۴$ ۴) $a>۴$

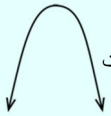
۱۳۴) اگر معادله‌ی $x^۴-(m+۲)x^۲+m+۵=۰$ دارای ۴ ریشه‌ی حقیقی متمایز باشد، مجموع مقادیر m به کدام صورت است؟
(سراسری تجربی ۸۵)

۱) $m<-۴$ ۲) $m>۴$ ۳) $-۴<m<۴$ ۴) $۴<m<۹$

درسنامه ۱۰

نمودار تابع درجه‌ی دوم (سهمی)

۱) اگر $a>۰$ باشد، دهانه‌ی سهمی به سمت بالا و به صورت  است. (تابع مینیمم دارد).

۲) اگر $a<۰$ باشد، دهانه‌ی سهمی به سمت پایین و به صورت  است. (تابع ماکزیمم دارد.)

۳) مختصات رأس سهمی از فرمول $S\left(-\frac{b}{۲a},\frac{-\Delta}{۴a}\right)$ به دست می‌آید که به آن نقطه‌ی مینیمم (هرگاه $a>۰$) یا نقطه‌ی ماکزیمم (هرگاه $a<۰$) نیز می‌گویند. و خط $x=\frac{-b}{۲a}$ محور تقارن سهمی است.

مثال: شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=(a-۲)^۳x^۲-۴bx+c$ می‌باشد. اگر a عددی طبیعی باشد در این صورت مقدار b

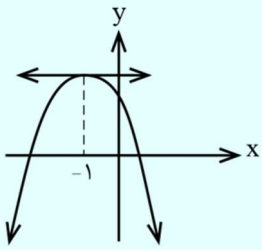
کنکور آسان است
konkursara
برای دانلود اپلیکیشن اینجا را کلیک کنید

برای دریافت نمونه سوالات و جزوات رایگان بیشتر کلیک کنید
کنکور آسان است
konkursara

کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴

۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$



پاسخ گزینه‌ی ۴ با توجه به این‌که نمودار تابع یک سهمی رو به پایین است، بنابراین باید ضریب $x^۲$ منفی باشد، پس:

$$(a-۲)^۳ < ۰ \Rightarrow a < ۲ \xrightarrow{a \in N} a = ۱ \Rightarrow f(x) = -x^۲ - ۴bx + c$$

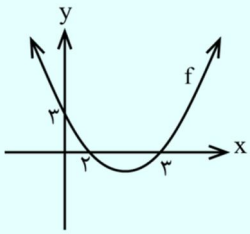
از طرفی می‌دانیم در تابع درجه دوم $S\left(-\frac{b}{۲a}, \frac{-\Delta}{۴a}\right)$ مختصات رأس سهمی یعنی همان ماکسیمم یا مینیمم است چون طبق شکل $x_{max} = -۱$ بنابراین:

$$\frac{۴b}{-۲} = -۱ \Rightarrow b = \frac{۱}{۲}$$

۴) هر تابع درجه دوم $y = ax^۲ + bx + c$ را می‌توان به صورت $y = a(x-\alpha)^۲ + \beta$ $(a \neq ۰)$ نیز نوشت که در آن $S(\alpha\ ,\ \beta)$ رأس سهمی است.

۵) اگر تابع درجه‌ی دوم $y = ax^۲ + bx + c$ محور x ها را در نقاطی به طول‌های $x_۱$ و $x_۲$ قطع کند، آن‌گاه معادله را به صورت $y = a(x-x_۱)(x-x_۲)$ نیز می‌توان نوشت.

مثال مطابق شکل اگر عبارت درجه‌ی دوم $y = ax^۲ + bx + c$ متناظر تابع $f(x)$ باشد، در این صورت $f(۴)$ را بیابید.



(مشابه تمرین کتاب درسی)

پاسخ چون نمودار تابع درجه دوم محور x ها را در نقاطی به طول‌های $x_۱ = ۲$ و $x_۲ = ۳$ قطع کرده است آن‌گاه معادله را به صورت $f(x) = a(x-۲)(x-۳)$ ظاهر می‌شود، از طرفی دیگر $(۰\ ,\ ۳) \in f$ است لذا:

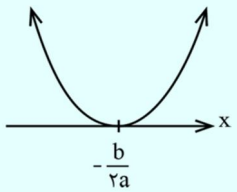
$$f(۰) = ۳ \Rightarrow f(۰) = a(۰-۲)(۰-۳) = ۳ \Rightarrow ۶a = ۳ \Rightarrow a = \frac{۱}{۲}$$

در نتیجه:

$$f(x) = \frac{۱}{۲}(x-۲)(x-۳) \Rightarrow f(۴) = \frac{۱}{۲}(۴-۲)(۴-۳) = ۱$$

۶) اگر تابع درجه دوم $y = ax^۲ + bx + c$ محور x ها را فقط در یک نقطه مانند $x_۱$ قطع کند، آن‌گاه معادله را به صورت $y = a(x-x_۱)^۲$ نیز می‌توان نوشت.

۷) در سهمی $y = ax^۲ + bx + c$ اگر $\begin{cases} \Delta = ۰ \\ a > ۰ \end{cases}$ سهمی بالای محور x و بر آن مماس است.



مثال به ازای کدام مقدار m، نمودار سه جمله‌ای درجه دوم $f(x) = (۲m+۲)x^۲ - ۲(m+۱)x + ۱$، بالای محور x ها قرار دارد و بر آن مماس است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۲}{۵}$

۳) ۲ ۴) $-\frac{۲}{۵}$

کنکور آسان است
konkursara
برای دانلود اپلیکیشن اینجا را کلیک کنید

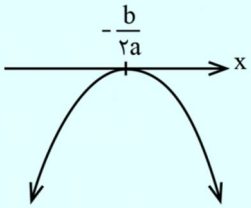
برای دریافت نمونه سوالات و جزوات رایگان بیشتر کلیک کنید
کنکور آسان است konkursara

پاسخ گزینه‌ی ۱

$$\begin{cases}\Delta=0\\ a>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4(m+1)^2-4(2m+2)=0\\ 2m+2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m^2-1=0\\ m>-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=\pm1\\ m>-1\end{cases}$$

چون $m>-1$ لذا $m=-1$ غیرقابل قبول است، پس $m=1$ جواب است.

۸) در سهمی $y=ax^2+bx+c$ اگر $\begin{cases}\Delta=0\\ a<0\end{cases}$ سهمی پایین محور x ها و بر آن مماس است.



مثال به ازای کدام مقدار m نمودار سه جمله‌ای $f(x)=(2m-1)x^2-2mx+(2m-1)$ پایین محور x ها بر آن مماس باشد؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{9}$

پاسخ گزینه‌ی ۳

$$\begin{cases}\Delta=0\\ a<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4m^2-4(2m-1)^2=0\\ 2m-1<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overbrace{(m^2-(2m-1)^2)}^{\text{اتحاد مزدوج}}=0\\ m<\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(m+2m-1)(m-2m+1)=0\\ m<\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(3m-1)(1-m)=0\Rightarrow m=\frac{1}{3}\ \text{یا}\ m=1\\ m<\frac{1}{2}\end{cases}$$

با توجه به این‌که $m<\frac{1}{2}$ غیرقابل قبول است، پس $m=\frac{1}{3}$ جواب است.

۹) نمودار تابع درجه‌ی دوم $y=ax^2+bx+c$ همواره بالای محور x ها است، (به عبارت دیگر چند جمله‌ای ax^2+bx+c همواره مثبت است) اگر و تنها اگر $a>0$ و $\Delta<0$ باشد.

۱۰) نمودار تابع درجه‌ی دوم $y=ax^2+bx+c$ همواره پایین محور x ها است (به عبارت دیگر چندجمله‌ای ax^2+bx+c همواره منفی است) اگر و تنها اگر $a<0$ و $\Delta<0$ باشد.

مثال به ازای چه مقادیری از k نمودار تابع درجه‌ی دوم $f(x)=kx^2-4x+2k$ به ازای هر x حقیقی بالای محور x ها قرار می‌گیرد؟

پاسخ

$$\begin{cases}\Delta<0\\ a>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}16-4(k)(2k)=16-8k^2<0\\ k>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k^2>2\\ k<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}k>\sqrt{2}\ \text{یا}\ k<-\sqrt{2}\\ k>0\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک جوابهای به دست آمده}}k>\sqrt{2}$$

۱۱) نمودار تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ از هر چهار ناحیه‌ی محورهای مختصات عبور می‌کند هرگاه $\frac{c}{a}<0$ باشد، یعنی دارای دو ریشه مختلف العلامه باشد.

۱۲) تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ با شرط $a>0$ قطعاً از ناحیه‌ی اول و دوم و با شرط $a<0$ قطعاً از ناحیه‌ی سوم و چهارم عبور می‌کند.

۱۳) **صفرهای تابع درجه دوم**: نقاط برخورد نمودار یک تابع با محور x ها ، نقاط با اهمیتی هستند که آنها را صفرهای تابع می‌نامیم، چرا که در این نقاط مقدار تابع صفر می‌شود.

۱۳۵) نمودار $y=(m-6)x^2+2mx-1$ بالای محور x ها نمی‌باشد. حدود m کدام است؟ (مشابه سراسری ریاضی ۸۵)

۱) $-3\le m<-2$ ۲) $-2\le m<3$
۳) $-3\le m\le 2$ ۴) $-2\le m\le 3$

۱۳۶) اگر $a+b+c<0$ و معادله‌ی درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ فاقد ریشه باشد، آن‌گاه کدام گزینه همواره درست است؟

کنکور آسان است konkursara
برای دانلود اپلیکیشن اینجا را کلیک کنید

برای دریافت نمونه سوالات و جزوات رایگان بیشتر کلیک کنید
کنکور آسان است
KONKURSARA

درسنامه ۱۱

روش‌های یافتن ماکزیمم یا مینیمم توابع درجه دوم

۱) روش مربع کامل کردن: در این روش ابتدا از ضریب $x^۲$ فاکتور گرفته آن را به صورت $a\left(x^۲+\frac{b}{a}x\right)+c$ می‌نویسیم. سپس به عبارت داخل پرانتز عدد $\left(\frac{b}{۲a}\right)^۲$ را اضافه و کم می‌کنیم و مربع کامل تشکیل می‌دهیم. ($\frac{b}{۲a}$ در واقع نصف ضریب x ، پس از فاکتورگیری از a است)

مثال مینیمم و ماکزیمم چند جمله‌ای‌های $۲x^۲+۶x-۱$ و $-۳x^۲+۹x+۲$ را به دست آورید.

پاسخ

الف) $۲x^۲+۶x-۱=۲(x^۲+۳x)-۱=۲\left(x^۲+۳x+\left(\frac{۳}{۲\times۱}\right)^۲-\left(\frac{۳}{۲\times۱}\right)^۲\right)-۱$

$=۲\left(x^۲+۳x+\frac{۹}{۴}-\frac{۹}{۴}\right)-۱=۲\left(x^۲+۳x+\frac{۹}{۴}\right)-\frac{۹}{۲}-۱$

$=۲\left(x+\frac{۹}{۲}\right)^۲-\frac{۱۱}{۲}\geq-\frac{۱۱}{۲}\Rightarrow$ کم ترین مقدار $=-\frac{۱۱}{۲}=-۵/۵$

ب) $-۳x^۲+۹x+۲=-۳(x^۲-۳x)+۲=-۳\left(x^۲-۳x+\left(\frac{-۳}{۲\times۱}\right)^۲-\left(\frac{-۳}{۲\times۱}\right)^۲\right)+۲$

$=-۳\left(x^۲-۳x+\frac{۹}{۴}-\frac{۹}{۴}\right)+۲=-۳\left(x^۲-۳x+\frac{۹}{۴}\right)-\frac{۲۷}{۴}+۲=-۳\left(x-\frac{۳}{۲}\right)^۲-\frac{۳۵}{۴}\leq-\frac{۳۵}{۴}\Rightarrow$ بیشترین مقدار $=-\frac{۳۵}{۴}$

۲) روش یافتن مختصات نقطه‌ای اکستریم: گفتیم اگر $a>۰$ باشد تابع مینیمم و اگر $a<۰$ باشد تابع ماکزیمم دارد. مختصات نقطه‌ای مینیمم یا ماکزیمم تابع درجه دوم $y=ax^۲+bx+c$ از رابطه‌ی زیر قابل محاسبه است:

$$S\left(-\frac{b}{۲a}\ ,\ -\frac{\Delta}{۴a}\right)$$

مثال مختصات نقاط اکسترمم توابع $f(x)=x^۲+۴x-۱$ و $g(x)=-x^۲+۶x+۲$ را به دست آورید.

پاسخ

$f(x)=x^۲+۴x-۱\xrightarrow{\text{ضریب } x^۲ \text{ مثبت است ،پس مینیمم دارد}}x_{min}=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۴}{۲}=-۲$

$y_{min}=-\frac{\Delta}{۴a}=-\frac{۱۶-۴(-۱)}{۴}=-۵$

$g(x)=-x^۲+۶x+۲\xrightarrow{\text{ضریب } x^۲ \text{ منفی است ،پس ماکزیمم دارد}}x_{max}=\frac{-b}{۲a}=-\frac{۶}{۲(-۱)}=۳$

$y_{min}=-\frac{\Delta}{۴a}=-\frac{۳۶-۴(-۱)(۲)}{-۴}=۱۱$

۳) روش یافتن عرض نقطه‌ی (مقدار) اکسترمم: کمترین یا بیشترین مقدار تابع $y=ax^۲+bx+c$ بسته به علامت a برابر است با $\frac{-\Delta}{۴a}$

۱۵۶) تابع $f=\{(x,y)x^۲\ |\ -x-y=-m\}$ مینیممی برابر ۳ دارد. مقدار m کدام است ؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) $\frac{۱۳}{۲}$ ۲) $\frac{۱۳}{۴}$ ۳) $-\frac{۱۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۱۳}{۴}$

۱۵۷) موشکی از سطح زمین پرتاب می شود به طوری که مسیر سهمی را طی می‌کند. اگر ارتفاع موشک بعد از t ثانیه از معادله‌ی $y=-۵t^۲+۱۰۰t+۲۰۰$ به دست می‌آید، حداکثر ارتفاعی که موشک به آن خواهد رسید، کدام است ؟

کنکور آسان است
KONKURSARA
برای دانلود اپلیکیشن اینجا را کلیک کنید

برای دریافت نمونه سوالات و جزوات رایگان بیشتر کلیک کنید
کنکور آسان است
KONKURSARA

درسنامه ۱۲

معادلات گویا

مستطیل طلایی: مستطیلی است که نسبت مجموع طول و عرض، به طول آن برابر با نسبت طول به عرض مستطیل باشد به عبارت دیگر اگر طول و عرض مستطیل به ترتیب x,y باشد داشته باشیم $\frac{x+y}{x}=\frac{x}{y}$. نسبت طول به عرض این مستطیل را نسبت طلایی می‌گویند.

عبارت‌های گویا

کسرهایی که صورت و مخرج آنها چند جمله‌ای باشند، عبارت‌های گویا می‌نامیم. برای مثال عبارت‌های زیر همگی عبارت‌های گویا هستند.

$$\frac{x+1}{x-5}-\frac{7x}{x+9} \quad , \quad \frac{5x^3-3x-10}{x^2+7x}$$

دامنه‌ی عبارت‌های جبری گویا: برای محاسبه دامنه‌ی عبارت گویا ، ابتدا مخرج را مساوی صفر قرار می‌دهیم، سپس ریشه‌های مخرج را به دست می‌آوریم. ریشه‌های مخرج را از مجموعه اعداد حقیقی کم می‌کنیم تا دامنه‌ی عبارت گویا حاصل شود به عبارت دیگر:

$$D=\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$$

مثال دامنه‌ی عبارت‌های گویای زیر را به دست آورید.

الف- $\frac{x}{x^2-1}$ ب- $\frac{x}{x+9}-\frac{x^2+3x}{x^2+7x}$

پاسخ

الف) $\text{مخرج}=0\Rightarrow x^2-1=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm1\Rightarrow D=\mathbb{R}-\{\pm1\}$

ب) $\text{مخرج‌ها}=0\begin{cases}x+9=0\Rightarrow x=-9\\ x^2+7x=0\Rightarrow x(x+7)=0\Rightarrow \begin{cases}x=0\Rightarrow D=\mathbb{R}-\{-9,-7,0\}\\ x=-7\end{cases}\end{cases}$

تذکر مهم در تعیین دامنه‌ی عبارت گویا، حق نداریم کسرها را ساده کنیم، زیرا در صورت ساده کردن کسرها ممکن است بعضی از ریشه‌های مخرج حذف شوند و آنها را جز دامنه محسوب کنیم.

((ک م م)) چند جمله‌ای‌ها: برای تعیین ((ک م م)) چند عبارت، ابتدا هر یک از عبارات را به حاصل ضرب عوامل اول تجزیه می‌کنیم، سپس عوامل مشترک با بزرگترین توان را در عبارت‌های غیرمشترک ضرب می‌کنیم تا ((ک م م)) به دست آید.

مثال ک م م دو عبارت $(x^2-1)^2,(x^2+x)^2$ را بیابید.

پاسخ دو عبارت را تجزیه می‌کنیم. داریم:

$$(x^2+x)^2=(x(x+1))^2=x^2(x+1)^2 \quad \text{و} \quad (x^2-1)^3=((x-1)(x+1))^3=(x-1)^3(x+1)^3$$

$$\text{ک م م}=x^2(x-1)^3(x+1)^3\Leftarrow \text{حاصل‌ضرب عوامل مشترک و غیرمشترک با بیشترین توان}$$

معادله‌هایی شامل عبارت گویا

معادله‌هایی که در آنها عبارت‌های گویا وجود داشته باشند، معادله‌هایی شامل عبارت‌های گویا می‌نامند. برای حل این‌گونه معادلات باید مراحل زیر را انجام دهیم.

۱) دامنه‌ی معادله را به دست می آوریم .

۲) همه‌ی عبارت‌های جبری را به یک طرف معادله انتقال می‌دهیم.

۳) ک م م مخرج‌ها را به دست می‌آوریم و معادله را در ((ک م م)) مخرج‌ها ضرب (یعنی ریشه‌ی مخرج نباشد.) و ساده‌تر می‌کنیم و جواب‌ها

کنکور آسان است
KONKURSARA
برای دانلود اپلیکیشن اینجا را کلیک کنید

برای دریافت نمونه سوالات و جزوات رایگان بیشتر کلیک کنید
کنکور آسان است konkursara

را به دست می‌آوریم. (یعنی ریشه‌ی مخرج نباشد)

۴) جواب‌هایی قابل قبول هستند که در دامنه‌ی جواب معادله قرار داشته باشند.

مثال نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $\frac{۲x+۴}{x+۱}=۱$ (هماهنگ خارج از کشور ـ خرداد ۹۰)

ب) $\frac{x}{x-۱}+\frac{۳}{x^۲-۱}=\frac{x-۲}{x+۱}$ (هماهنگ کشوری ـ شهریور ۹۰)

الف) ابتدا دامنه‌ی معادله را می‌یابیم:

$$\text{مخرج}=۰\Rightarrow x+۱=۰\Rightarrow x=-۱\Rightarrow D=\mathbb{R}-\{-۱\}$$

$$\frac{۲x+۴}{x+۱}=۱\Rightarrow ۲x+۴=x+۱\Rightarrow x=-۳\in D \quad (\text{ق ق})$$

ب) دامنه‌ی معادله برابر است با:

$$\text{مخرجها}=۰\Rightarrow\begin{cases}x-۱=۰\Rightarrow x=۱\\ x^۲-۱=۰\Rightarrow x=\pm ۱\Rightarrow D=\mathbb{R}-\{\pm ۱\}\\ x+۱=۰\Rightarrow x=-۱\end{cases}$$

کل عبارت را به یک طرف تساوی منتقل می‌کنیم و مخرج مشترک می‌گیریم.

$$\frac{x}{x-۱}+\frac{۳}{x^۲-۱}-\frac{x-۲}{x+۱}=۰\Rightarrow\frac{x(x+۱)+۳-(x-۲)(x-۱)}{(x-۱)(x+۱)}=۰$$

$$\Rightarrow\frac{x^۲+x+۳-x^۲+۳x-۲}{(x-۱)(x+۱)}=۰\Rightarrow ۴x+۱=۰\Rightarrow x=-\frac{۱}{۴}\in D \quad (\text{ق ق})$$

۱۶۵) اگر نسبت طول به عرض یک مستطیل برابر نسبت طلایی و طول مستطیل برابر جمله دوم دنباله مربعی باشد، عرض مستطیل کدام است ؟

۱) $۴\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۵}+۱$ ۳) $۲(\sqrt{۵}-۱)$ ۴) ۳

۱۶۶) ابعاد یک مستطیل متناسب با نسب طلایی است . اگر محیط مستطیل ۲۰ متر باشد، طول آن کدام است ؟

۱) $۵-۵\sqrt{۵}$ ۲) $۵(\sqrt{۵}-۱)$ ۳) $۲(\sqrt{۵}+۱)$ ۴) $۵(۲+\sqrt{۵})$

۱۶۷) تعداد جواب‌های معادله‌ی $\frac{x^۲-۲x+۲}{x^۲-۲x}-\frac{۱+x}{x}=\frac{x-۱}{x-۲}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۶۸) معادله‌ی $\frac{x}{x^۲-۳۶}+\frac{x}{x^۲-۶۸}=۰$ دارای چه نوع جواب‌هایی است؟

۱) یک جواب مثبت و یک جواب منفی ۲) دو جواب مثبت

۳) یک جواب مثبت و یک جواب صفر ۴) یک جواب مثبت ، یک جواب منفی و یک جواب صفر

۱۶۹) در معادله‌ی $\frac{x+۲}{x-۲}=۱-\frac{۳}{x+۵}$ حاصل مجموع با معکوس جواب کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{-۱}{۲}$ ۳) $\frac{-۵}{۲}$ ۴) -۲

۱۷۰) جواب معادله‌ی $\frac{x-a}{x-b}+\frac{x-b}{x-a}+۲=۰$ $(a\neq b)$ کدام است؟

۱) $\frac{a+b}{۲}$ ۲) $\frac{a-b}{۲}$ ۳) $\frac{a+۲b}{۳}$ ۴) $\frac{۲a-b}{۳}$

۱۷۱) بازه‌ای که شامل جواب‌های معادله‌ی $\frac{۱۶}{x^۲+۴x+۱۶}=\frac{x}{x-۴}-\frac{۶۴}{x^۳-۶۴}$ می‌باشد، کدام است؟

کنکور آسان است konkursara
برای دانلود اپلیکیشن اینجا را کلیک کنید

برای دریافت نمونه سوالات و جزوات رایگان بیشتر کلیک کنید
کنکور آسان است
KONKURSARA

۳) ۱۲ کیلوگرم و ۸۶ گرم ۴) ۱۲ کیلو گرم و ۸۳ گرم

۱۸۵) در مدت ۴ ساعت یک تراکتور ۷ هکتار بیش از یک اسب زمین را شخم می‌زند اگر تراکتور یک هکتار زمین را ۳/۵ ساعت زودتر از اسب شخم بزند، یک اسب در یک ساعت چند هکتار زمین را شخم می‌زند؟

۱) ٪۲۵ ۲) ٪۵ ۳) ۱۱ ۴) ۲

معادلات رادیکالی

برای حل یک معادله شامل رادیکال مراحل زیر را انجام می‌دهیم.

۱) رادیکال را در یک طرف تنها نگه می‌داریم و بقیه جملات را به طرف دیگر منتقل می‌کنیم.

۲) طرفین معادله را به توان عدد فرجه‌ی رادیکال می‌رسانیم.

۳) معادله را ساده می‌کنیم، حال اگر رادیکال باقی مانده باشد باز دوباره آن را در یک طرف تنها نگه می‌داریم و طرفین معادله را به توان عدد فرجه می‌رسانیم و نتیجه را ساده و حل می‌کنیم.

۴) تمام جواب‌های به دست آمده را در معادله اصلی امتحان می‌کنیم. و جواب‌های نهایی را به دست می‌آوریم.

مثال معادله‌ی $\sqrt{5x+9}=2x+3$ را حل کنید.

پاسخ

$$\sqrt{5x+9}=2x+3 \xrightarrow{\text{توان دو}} 5x+9=(2x+3)^2$$

$$5x+9=4x^2+12x+9 \Rightarrow 4x^2+7x=0 \Rightarrow x=0 \quad \text{یا} \quad x=-\frac{7}{4}$$

جواب $x=-\frac{7}{4}$ قابل قبول نیست، زیرا در معادله‌ی اصلی صدق نمی‌کند پس $x=0$ جواب معادله است.

۱۸۶) جواب‌های معادله‌ی $\sqrt{x^2-4}=x^2-4$ چگونه‌اند؟

۱) یک جواب منفی، و یک جواب مثبت ۲) دو جواب منفی ، یک جواب مثبت
۳) دو جواب مثبت ۴) دو جواب منفی ، دو جواب مثبت

۱۸۷) معادله‌ی $\sqrt[5]{3+\sqrt{x-x^2}}=\sqrt[5]{3}$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۸۸) معادله‌ی $\sqrt{x-\sqrt{x+8}}=2$ چند ریشه دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

۱۸۹) منحنی‌های $y=2+\sqrt{x-3}$ و $y=\sqrt{2x+1}$ در چند نقطه با هم تلاقی می‌کنند؟

۱) هیچ نقطه ۲) یک نقطه ۳) دو نقطه ۴) سه نقطه

۱۹۰) جواب‌های معادله‌ی $(x-3)\sqrt{x^2-5x+4}=2x-6$ شامل چند عدد حسابی است؟

۱) ۳ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۱

۱۹۱) مجموع جواب‌های معادله‌ی $\sqrt[5]{x^7+2-\sqrt{x^2+x+4}}=x\sqrt[5]{x^2}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -۲ ۳) -۱ ۴) ۱

۱۹۲) تعداد جواب‌های معادله‌ی $\sqrt{x-1}-\frac{2}{\sqrt{x-1}}=-1$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) صفر

۱۹۳) اگر برای هر عدد حقیقی x متعلق به بازه‌ی (۳ و ۲) رابطه‌ی $\sqrt{x^2-10x+25}-\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{k^5+36}$ برقرار باشد، مقدار k

کنکور آسان است
KONKURSARA
برای دانلود اپلیکیشن اینجا را کلیک کنید