

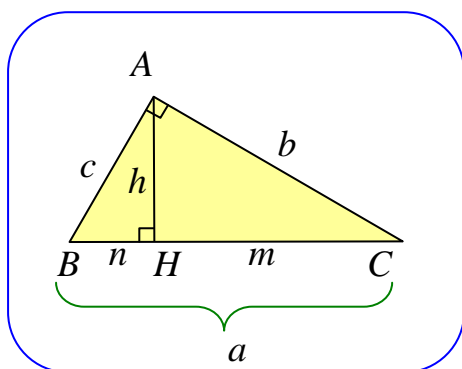
## درس اول: قضیه ی سینوس ها

در این درس با یک قضیه ی بسیار مهم و کاربردی موسوم به قضیه ی سینوس ها در مثلث آشنا شویم.

### یادآوری روابط طولی در مثلث قائم الزاویه

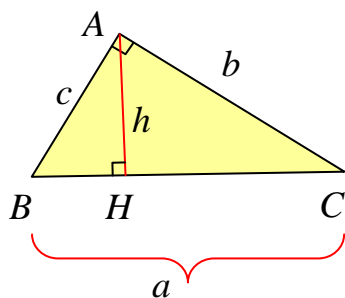
منظور از روابط طولی، رابطه هایی است که در مورد اندازه های پاره خط ها و زاویه ها در شکل های مختلف، بحث می کند. در سال گذشته با برخی از این روابط طولی در مثلث قائم الزاویه آشنا شده اید. مهمترین این

روابط عبارتند از :



$$\begin{aligned} ۱) \quad & a^2 = b^2 + c^2 \\ ۲) \quad & b^2 = a \times m \\ ۳) \quad & c^2 = a \times n \\ ۴) \quad & h^2 = m \times n \\ ۵) \quad & a \times h = b \times c \end{aligned}$$

اکنون با توجه به این روابط طولی و تعریف نسبت های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه می توان، نتایج جالب دیگری را به دست آورد. به ادامه ی مطلب توجه نمایید.



**تمرین ۱:** در مثلث قائم الزاویه ی  $ABC$  شکل مقابل، ارتفاع وارد

بر وتر را رسم می کنیم و اندازه ی آن را  $h$  قرار می دهیم. با توجه به

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2} \quad \text{شکل ثابت کنید که:}$$

حل :

$$\frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{b^2}{b^2 c^2} + \frac{c^2}{b^2 c^2} = \frac{b^2 + c^2}{b^2 c^2} = \frac{a^2}{b^2 c^2} = \left(\frac{a}{bc}\right)^2 = \left(\frac{a}{ah}\right)^2 = \frac{1}{h^2}$$

**تمرین ۲:** در یک مثلث قائم الزاویه، مجموع معکوس مربعات اندازه های دو ضلع زاویه ی قائمه برابر  $\frac{1}{۲۵}$

است. اندازه ی ارتفاع وارد بر وتر را تعیین کنید.

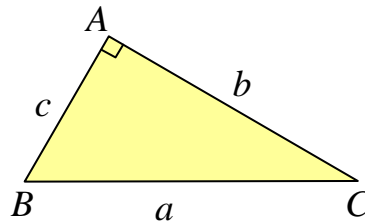
**تمرین ۳:** ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه، نسبت اندازه‌ی هر ضلع به سینوس زاویه‌ی مقابل به آن ضلع برابر طول وتر است.

اثبات:

$$\sin A = \sin(90^\circ) = 1 \rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{a}{1} = a$$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{b}{\frac{b}{a}} = \frac{ab}{b} = a$$

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{c}{\frac{c}{a}} = \frac{ac}{c} = a$$



\*\*\*

**تمرین برای حل:**

**۴:** طول اضلاع قائم از مثلث قائم الزاویه ای ۹ و ۱۲ واحد است. اندازه‌ی تصویر ضلع کوچکتر بر روی وتر کدام است؟

- ۴/۸ (۱)      ۵/۴ (۲)      ۶ (۳)      ۷/۲ (۴)

**۵:** پاره خطی به طول  $a$  داده شده است. پاره خطی به طول  $\sqrt{a}$  را رسم کنید. (روش رسم را توضیح دهید.)

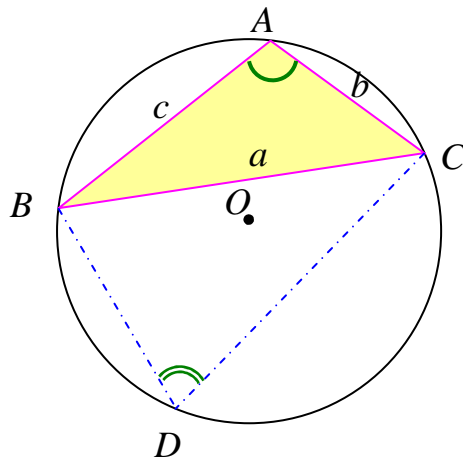
$$\sin C = \sin D \xrightarrow{\sin D = \frac{AB}{BD}} \sin C = \frac{AB}{BD} \rightarrow \frac{c}{\sin C} = BD \xrightarrow{BD=2R} \frac{c}{\sin C} = 2R$$

به طور مشابه خواهیم داشت:

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \quad \text{و} \quad \frac{b}{\sin B} = 2R$$

**حالت سوم:** در مثلث  $ABC$ ،  $\angle A > 90^\circ$  است.

در این نقطه‌ی دلخواه  $D$  روی کمان  $BC$  (کمان مقابل زاویه‌ی  $A$ ) را به نقاط  $B$  و  $C$  وصل می‌کنیم. زاویه‌های  $A$  و  $D$  مکمل یکدیگرند. (چرا؟) و  $A$  منفرجه است، لذا زاویه‌ی  $D$  حاده است. پس:



$$\sin A = \sin(\pi - D)$$

یعنی

$$\sin A = \sin D$$

و در مثلث  $BCD$  طبق قسمت قبل داریم:

$$\frac{a}{\sin D} = 2R$$

لذا

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

از طرف چون زاویه‌های دیگر مثلث  $ABC$  حاده هستند، پس طبق قسمت قبل خواهیم داشت.

$$\frac{b}{\sin B} = 2R \quad \text{و} \quad \frac{c}{\sin C} = 2R$$

\*\*\*

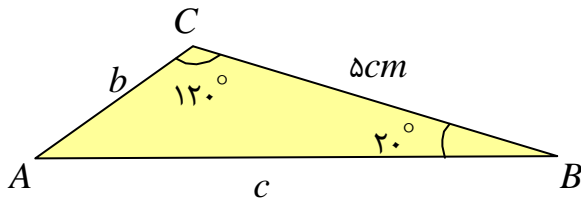
**قضیه‌ی سینوس ها:** در هر مثلث  $ABC$  با اضلاع  $BC = a$  و  $AC = b$  و  $AB = c$  داریم:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

که  $R$  شعاع دایره‌ی محیطی مثلث است.

**تمرین ۶:** با توجه به شکل مقابل اندازه ی

مقادیر  $b$  و  $c$  را به دست آورید.



(  $\sin 20^\circ = 0.34$  و  $\sin 40^\circ = 0.64$  )

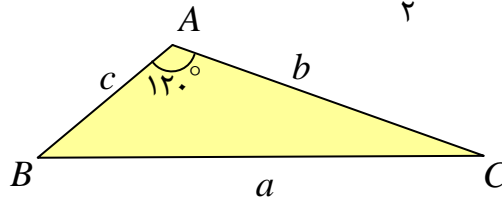
**تمرین ۷:** در مثلث  $ABC$ ،  $BC = 10 \text{ cm}$  و  $\angle A = 120^\circ$  و  $AC = \frac{10\sqrt{6}}{3}$ ، مقدار شعاع دایره ی

محیطی مثلث و اندازه ی زاویه های  $B$  و  $C$  را به دست آورید.

حل: به کمک قضیه ی سینوس ها می توان نوشت:

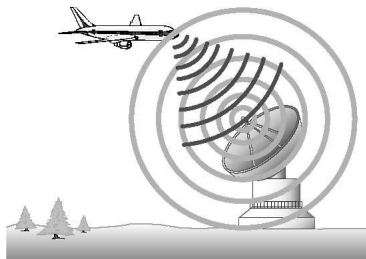
$$\frac{a}{\sin A} = 2R \rightarrow \frac{10}{\sin 120^\circ} = 2R \xrightarrow{\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$$

$$\rightarrow \frac{20}{\sqrt{3}} = 2R \rightarrow R = \frac{10}{\sqrt{3}}$$



$$\frac{b}{\sin B} = 2R \rightarrow \frac{\frac{10\sqrt{6}}{3}}{\sin B} = 2\left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right) \rightarrow \frac{10\sqrt{6}}{3 \sin B} = \frac{20}{\sqrt{3}} \rightarrow \sin B = \frac{10 \times 3\sqrt{2}}{3 \times 20} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

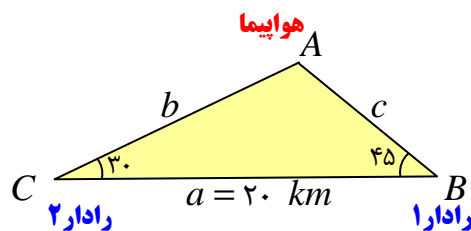
$$\rightarrow \begin{cases} \angle B = 45^\circ \xrightarrow{\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ} \angle C = 15^\circ \\ \angle B = 135^\circ \xrightarrow{\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ} \angle C = \text{وجود ندارد} \end{cases}$$



**تمرین ۸:** دو ایستگاه رادار که در فاصله ی ۲۰ کیلومتری از هم

واقع اند، هواپیمایی را با زاویه های ۳۰ و ۴۵ درجه رصد کرده اند.

فاصله ی هواپیما را از دو ایستگاه به دست آورید.



حل:

$$\angle A = 180 - (\angle B + \angle C) = 180 - (30 + 45) = 105^\circ$$

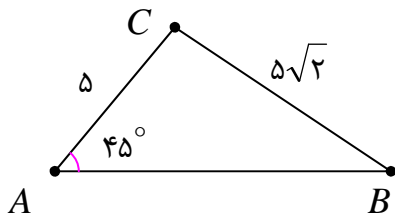
اکنون به کمک ماشین حساب داریم:  $\sin(105^\circ) \approx 0.96$  و  $\sin 45 = 0.7$  و  $\sin 30 = 0.5$  لذا

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \rightarrow \frac{20}{0.96} = \frac{b}{0.7} \rightarrow b = \frac{20 \times 0.7}{0.96} = 14.58$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \rightarrow \frac{20}{0.96} = \frac{c}{0.5} \rightarrow c = \frac{20 \times 0.5}{0.96} = 10.41$$

تمرین برای حل:

۹: در شکل مقابل اندازه‌ی زاویه‌ی  $B$  را محاسبه کنید.



۱۰: در مثلثی  $BC = 10$  و  $\angle A = 45^\circ$  و  $\angle B = 60^\circ$  اندازه‌ی دیگر اضلاع مثلث را بیابید.

$$(\sin 75^\circ = 0.96)$$

۱۱: نشان دهید که مثلثی با مشخصات  $a = 2$  و  $b = 6$  و  $\angle A = 60^\circ$  وجود ندارد.

۱۲: در مثلث  $ABC$ ،  $BC = 20$  و  $\angle B + \angle C = 120^\circ$  و  $AC = \frac{20\sqrt{6}}{3}$

الف: شعاع دایره‌ی محیطی مثلث را بدست آورید.

ب: اندازه‌ی زاویه‌های  $B$  و  $C$  پیدا کنید.

**درس دوم : قضیه ی کسینوس ها**

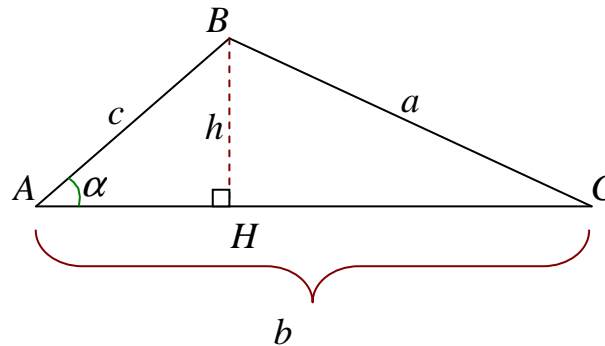
در این درس با یک قضیه ی بسیار مهم و کاربردی دیگری موسوم به قضیه ی کسینوس ها در مثلث آشنا شویم.

**قضیه ی کسینوس ها:** در هر مثلث، مربع هر ضلع با مجموع مربعات دو ضلع دیگر منهای دو برابر حاصل ضرب آن دو ضلع در کسینوس زاویه ی بین این دو ضلع برابر است.

اثبات: این قضیه را برای در مثلث  $ABC$  در سه حالت  $\angle A = 90^\circ$  و  $\angle A < 90^\circ$  و  $\angle A > 90^\circ$  ثابت می کنیم.

**حالت اول :** در مثلث  $ABC$ ،  $\angle A < 90^\circ$  است.

در این حالت ابتدا ارتفاع  $BH$  را رسم می کنیم. سپس با توجه به تعریف نسبت های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه، می توان نوشت :



$$\Delta(ABH) : \cos \alpha = \frac{AH}{c} \rightarrow AH = c \times \cos \alpha$$

$$\Delta(ABH) : c^2 = h^2 + AH^2$$

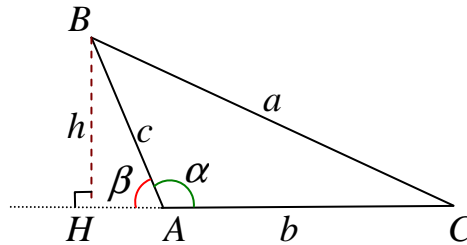
$$\Delta(BCH) : a^2 = h^2 + CH^2 \xrightarrow{CH = b - AH} a^2 = h^2 + (b - AH)^2$$

$$\rightarrow a^2 = h^2 + b^2 - 2b \times AH + AH^2$$

$$\rightarrow a^2 = c^2 + b^2 - 2b \times (c \times \cos \alpha) = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

**حالت دوم:** در مثلث  $ABC$ ،  $\angle A > 90^\circ$  است.

در این حالت ابتدا ارتفاع  $BH$  را رسم می کنیم. سپس با توجه به تعریف نسبت های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه، می توان نوشت:



چون  $\beta$  زاویه ی خارجی رأس  $A$  می باشد. پس  $\beta = \pi - \alpha$  لذا:

$$\sin \beta = \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos \beta = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\Delta(ABH): \cos \beta = \frac{AH}{AB} \rightarrow AH = c \times \cos \beta \rightarrow AH = -c \times \cos \alpha$$

$$\Delta(ABH): c^2 = h^2 + AH^2$$

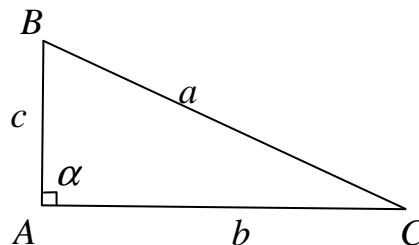
$$\Delta(BCH): a^2 = h^2 + CH^2 \xrightarrow{CH=b+AH} a^2 = h^2 + (b + AH)^2$$

$$\rightarrow a^2 = h^2 + b^2 + 2b \times AH + AH^2$$

$$\rightarrow a^2 = c^2 + b^2 + 2b \times (-c \times \cos \alpha)$$

$$\rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

**حالت سوم:** در مثلث  $ABC$ ،  $\angle A = 90^\circ$  است.



در این حالت طبق قضیه ی فیثاغورس می توان نوشت:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

حال چون  $\cos A = 0$  پس مانعی ندارد که بنویسیم:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

پس در این حالت، قضیه ی داده شده نیز برقرار است.

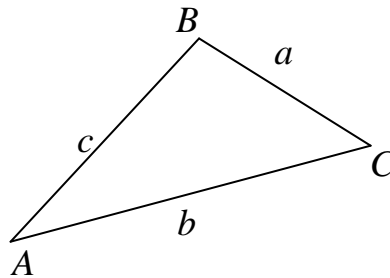
\*\*\*

**قضیه ی کسینوس ها:** در هر مثلث  $ABC$  با اضلاع  $BC = a$  و  $AC = b$  و  $AB = c$  داریم:

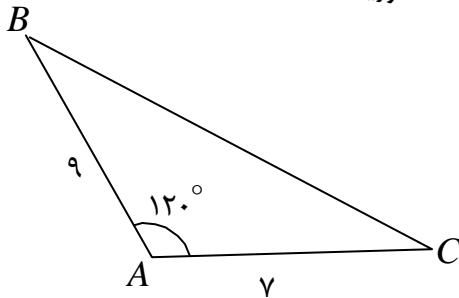
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



**تمرین ۱:** با توجه به شکل مقابل اندازه ی ضلع  $BC$  را به دست آورید.



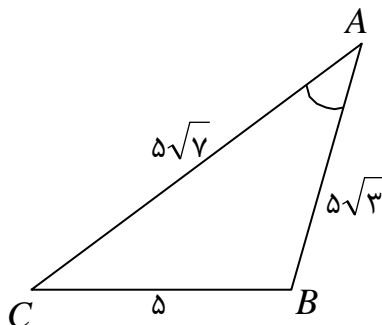
**تمرین ۲:** طول قطر یک پنج ضلعی منتظم که طول ضلع آن ۱۰ سانتی متر باشد را پیدا کنید.

$$(\cos 108^\circ = -0.3)$$

**توجه:** با توجه به رابطه ی فوق می توان نتیجه گرفت که:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

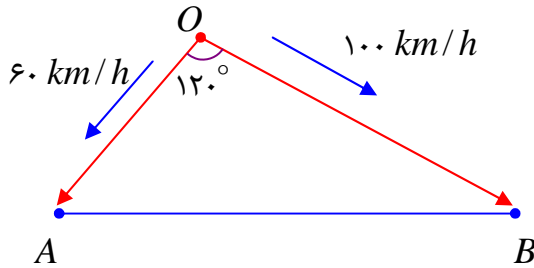
**تمرین ۳:** با توجه به شکل مقابل کسینوس زاویه ی  $A$  را محاسبه کنید.





حل :

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(5\sqrt{7})^2 + (5\sqrt{3})^2 - (5)^2}{2(5\sqrt{7})(5\sqrt{3})} \\ &= \frac{175 + 75 - 25}{50\sqrt{21}} = \frac{225}{50\sqrt{21}} = \frac{9}{2\sqrt{21}} = \frac{9\sqrt{21}}{2(21)} = \frac{3\sqrt{21}}{14}\end{aligned}$$



**تمرین ۴:** مطابق شکل مقابل، دو قایق از یک

نقطه در دریاچه ای با سرعت های ۶۰ و ۱۰۰ کیلومتر بر ساعت و با زاویه ی ۱۲۰ درجه از هم دور می شوند. تعیین کنید که نیم ساعت بعد این دو

قایق چه فاصله ای از یکدیگر دارند؟

حل : با توجه به نقطه ی شروع دو قایق و سرعت های ثابت، نیم ساعت بعد، مسافت طی شده توسط هر قایق به صورت زیر است.

$$OA = 60 \times \frac{1}{2} = 30 \text{ km} \quad \text{و} \quad OB = 100 \times \frac{1}{2} = 50 \text{ km}$$

حال به کمک قضیه ی کسینوس ها می نویسیم.

$$AB^2 = (30)^2 + (50)^2 - 2(30)(50)\cos(120)$$

$$\rightarrow AB^2 = 900 + 2500 - 3000 \left(-\frac{1}{2}\right) = 900 + 2500 + 1500 = 4900$$

$$\rightarrow AB = 70 \text{ km}$$

**تمرین ۵:** در مثلث  $ABC$  داریم،  $AB = 2\sqrt{2}$  و  $AC = \sqrt{6} + \sqrt{2}$  و  $\angle A = 60^\circ$  در این صورت:

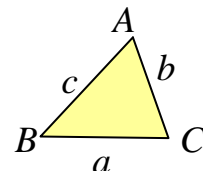
الف : طول ضلع  $BC$  را به دست آورید.

ب : اندازه ی زاویه های  $ABC$  و  $ACB$  را به دست آورید.

حل : با توجه به قضیه ی کسینوس ها داریم.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$$

$$\rightarrow a^2 = (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2(\sqrt{6} + \sqrt{2})(2\sqrt{2})\cos(60^\circ)$$



$$\rightarrow a^2 = (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2(\sqrt{6} + \sqrt{2})(2\sqrt{2})\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\rightarrow a^2 = 6 + 2\sqrt{12} + 2 + 8 - 2\sqrt{12} - 4 = 12 \rightarrow a = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

همچنین با توجه به قضیه ی سینوس ها می توان نوشت:

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sin C} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} \rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sin C} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sin C} = 4 \rightarrow \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\rightarrow \angle C = 45^\circ$$

و در نهایت داریم:

$$\angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C) = 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ$$

**تمرین ۶:** در مثلث متساوی الاضلاع  $ABC$  به طول ضلع ۸

واحد، روی ضلع  $BC$  نقطه ی  $D$ ، به فاصله ی ۷ واحد از رأس  $A$ ،

همچنین روی ضلع  $AC$  نقطه ی  $E$ ، به فاصله ی ۵ واحد از رأس  $C$

در نظر گرفته شده اند.

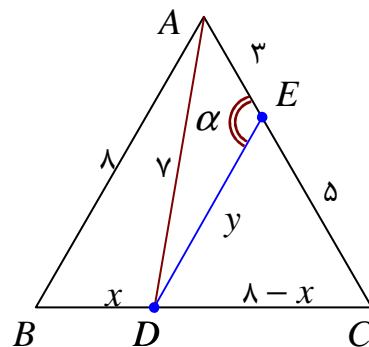
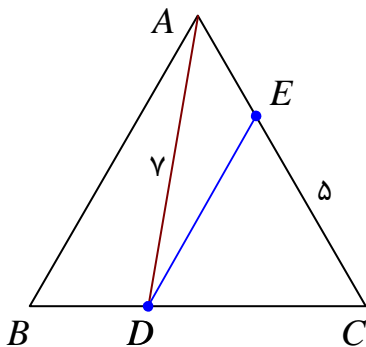
الف: با فرض اینکه  $CD > BD$ ، تعیین کنید که نقطه ی  $D$  از

نقاط  $B$  و  $C$  چه فاصله ای دارد؟

ب: تعیین کنید که نقطه ی  $E$  از نقطه ی  $D$  چه فاصله ای دارد؟

ج: اندازه ی زاویه ی  $AED$  را محاسبه کنید؟

حل: قرار می دهیم،  $BD = x$  و  $DE = y$  و  $\angle AED = \alpha$  در این صورت داریم:



$$\Delta(ABD): \gamma^2 = x^2 + \lambda^2 - 2(x)(\lambda)\cos 60 \rightarrow x^2 - \lambda x + 15 = 0 \rightarrow (x-3)(x-5) = 0$$

$$\rightarrow x = 3, x = 5 \xrightarrow{DB < DC} x = DB = 3, DC = 5$$

و چون  $DC = CE = 5$  پس مثلث  $DEC$  متساوی الساقین است و چون یک زاویه  $60^\circ$  دارد، پس متساوی الاضلاع است. یعنی  $DE = 5$ . در مثلث  $DEC$  زاویه  $\alpha$  یک زاویه خارجی است. پس:

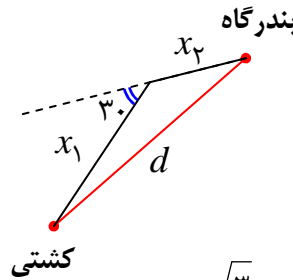
$$\alpha = 60 + 60 = 120^\circ$$

**تمرین ۷:** یک کشتی از یک نقطه با سرعت  $60$  کیلومتر در ساعت در یک جهت در حرکت است و یک ساعت بعد با  $30^\circ$  درجه انحراف به راست با سرعت  $40$  کیلومتر در ساعت به حرکت خود ادامه می دهد و یک ساعت و نیم پس از آغاز حرکتش در یک بندرگاه پهلو می گیرد. فاصله بندرگاه از مبدأ حرکت کشتی چند کیلومتر است؟

حل:

$$\begin{cases} t_1 = 1 \\ x_1 = 60 \times 1 = 60 \text{ km} \end{cases}$$

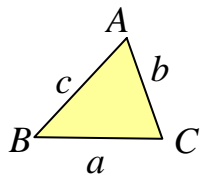
$$\begin{cases} t_2 = 1/5 - 1 = 0/5 \\ x_2 = 40 \times (0/5) = 20 \text{ km} \end{cases}$$



$$d^2 = (60)^2 + (20)^2 - 2(60)(20)\cos(150) = 3600 + 400 - 2400 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\rightarrow d^2 = 4000 + 1200\sqrt{3} \xrightarrow{\sqrt{3} = 1/73} d = \sqrt{6078} = 77/96 \text{ km}$$

**تمرین ۸:** به کمک قضیه کسینوس ها ثابت کنید، در مثلث  $ABC$



الف:  $\angle A > 90^\circ$  اگر و تنها اگر  $a^2 > b^2 + c^2$

ب:  $\angle A < 90^\circ$  اگر و تنها اگر  $a^2 < b^2 + c^2$

پ:  $\angle A = 90^\circ$  اگر و تنها اگر  $a^2 = b^2 + c^2$

اثبات الف:

$$\angle A > 90^\circ \rightarrow \cos A < 0 \rightarrow 2bc \cos A < 0 \rightarrow -2bc \cos A > 0$$

$$\xrightarrow{+(b^2+c^2)} b^2 + c^2 - 2bc \cos A > b^2 + c^2 \rightarrow a^2 > b^2 + c^2$$

$$a^2 > b^2 + c^2 \rightarrow b^2 + c^2 - 2bc \cos A > b^2 + c^2 \xrightarrow{-(b^2+c^2)} -2bc \cos A > 0$$

$$\rightarrow 2bc \cos A < 0 \xrightarrow{\div 2bc} \cos A < 0 \rightarrow \angle A > 90^\circ$$

اثبات ب:

$$\angle A < 90^\circ \rightarrow \cos A > 0 \rightarrow 2bc \cos A > 0 \rightarrow -2bc \cos A < 0$$

$$\xrightarrow{+(b^2+c^2)} b^2 + c^2 - 2bc \cos A < b^2 + c^2 \rightarrow a^2 < b^2 + c^2$$

$$a^2 < b^2 + c^2 \rightarrow b^2 + c^2 - 2bc \cos A < b^2 + c^2 \xrightarrow{-(b^2+c^2)} -2bc \cos A < 0$$

$$\rightarrow 2bc \cos A > 0 \xrightarrow{\div 2bc} \cos A > 0 \rightarrow \angle A < 90^\circ$$

اثبات پ:

$$\angle A = 90^\circ \rightarrow \cos A = 0 \rightarrow 2bc \cos A = 0 \rightarrow -2bc \cos A = 0$$

$$\xrightarrow{+(b^2+c^2)} b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 \xrightarrow{-(b^2+c^2)} -2bc \cos A = 0$$

$$\rightarrow 2bc \cos A = 0 \xrightarrow{\div 2bc} \cos A = 0 \rightarrow \angle A = 90^\circ$$

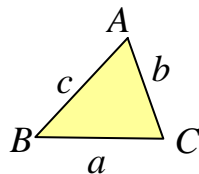
**تمرین ۹:** در هر مورد، مشخصاتی از مثلث  $ABC$  داده شده است. به کمک این مشخصات، نوع زاویه-

ی  $A$  (حاده، منفرجه یا قائمه بودن) را تعیین کنید.

الف:  $BC = 9$  و  $AC = 6$  و  $AB = 10$

ب:  $BC = 9$  و  $AC = 4$  و  $AB = 8$

ج:  $BC = 17$  و  $AC = 15$  و  $AB = 8$



حل: به کمک تمرین قبل، کافی است، مقدار  $a^2$  را با  $b^2 + c^2$  مقایسه کنیم. در این صورت:

الف:

$$\left. \begin{array}{l} a^2 = 100 \\ b^2 + c^2 = 36 + 100 = 136 \end{array} \right\} \rightarrow a^2 < b^2 + c^2 \rightarrow \angle A < 90^\circ$$

ب:

$$\left. \begin{array}{l} a^2 = 81 \\ b^2 + c^2 = 16 + 64 = 80 \end{array} \right\} \rightarrow a^2 > b^2 + c^2 \rightarrow \angle A > 90^\circ$$

ج :

$$\left. \begin{array}{l} a^2 = 289 \\ b^2 + c^2 = 225 + 64 = 289 \end{array} \right\} \rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow \angle A = 90^\circ$$

**تمرین ۱۰ :** در مثلثی رابطه‌ی  $a = 2b \cos C$  برقرار است. نوع مثلث را تعیین کنید.

حل :

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \xrightarrow{\cos C = \frac{a}{2b}} \frac{a}{2b} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\rightarrow a^2 = a^2 + b^2 - c^2 \rightarrow b^2 - c^2 = 0 \rightarrow b^2 = c^2 \rightarrow b = c$$

یعنی مثلث متساوی الساقین است.

**تمرین ۱۱ :** در مثلث  $ABC$  ثابت کنید که :

$$\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$$

حل :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \rightarrow \frac{\cos A}{a} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2abc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \rightarrow \frac{\cos B}{b} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2abc}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \rightarrow \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2abc}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2abc} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2abc} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2abc} \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc} \end{aligned}$$

\*\*\*

تمرین برای حل :

۱۲ : طول اضلاع مثلثی ۴ و ۵ و ۷ است. کسینوس بزرگترین زاویه ی این مثلث را تعیین کنید.

۱۳ : طول قطر کوچک یک شش ضلعی منتظم که طول ضلع آن ۵ سانتی متر باشد را پیدا کنید.

۱۴ : در مثلثی رابطه ی  $a^2 = b^2 + c^2 - bc$  برقرار است. اندازه ی زاویه ی  $A$  چقدر است؟

۱۵ : در مثلثی رابطه ی  $a^2 = b^2 + c^2 + bc$  برقرار است. اندازه ی زاویه ی  $A$  چقدر است؟

۱۶ : در مثلثی  $a = 4$  و  $b = 2\sqrt{3}$  و  $\angle C = 30^\circ$  اندازه ی دیگر زاویه ها و ضلع سوم مثلث را بیابید.

۱۷ : در مثلث  $ABC$ ، اگر  $AB = BC = 2$  و  $AC = 2\sqrt{2} - \sqrt{2}$ . اندازه ی زاویه ی  $ABC$  را محاسبه

کنید.

۱۸ : طول اضلاع مثلثی ۴ و ۵ و ۷ است. حاصل  $\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c}$  را تعیین کنید.

\*\*\*

## محاسبه‌ی طول میانه‌ها

می‌دانید که میانه پاره خطی است که یک رأس مثلث را به وسط ضلع مقابل آن وصل می‌کند. در این قسمت رابطه‌ی آن را معرفی می‌کنیم که به کمک آن می‌توان با داشتن اندازه‌ی اضلاع مثلث، اندازه‌ی میانه را محاسبه کرد.

**قضیه‌ی طول میانه‌ها :** در هر مثلث  $ABC$  با اضلاع  $BC = a$  و  $AC = b$  و  $AB = c$ ، اگر اندازه‌ی میانه‌ی وارد بر ضلع  $a$  برابر  $m_a$  باشد، در این صورت می‌توان نوشت:

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{1}{2}a^2$$

اثبات :

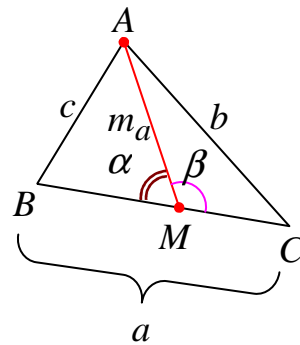
$$\beta = 180^\circ - \alpha \rightarrow \cos \beta = -\cos \alpha$$

$$\Delta(AMC): b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + m_a^2 - 2\left(\frac{a}{2}\right)(m_a)\cos \beta$$

$$\rightarrow b^2 = \frac{a^2}{4} + m_a^2 + a.m_a \cos \alpha \quad (1)$$

$$\Delta(ABM): c^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + m_a^2 - 2\left(\frac{a}{2}\right)(m_a)\cos \alpha$$

$$\rightarrow c^2 = \frac{a^2}{4} + m_a^2 - a.m_a \cos \alpha \quad (2)$$



اکنون اگر روابط (۱) و (۲) را نظیر به نظیر جمع کنیم، خواهیم داشت:

$$b^2 + c^2 = \left(\frac{a^2}{4} + m_a^2 + a.m_a \cos \alpha\right) + \left(\frac{a^2}{4} + m_a^2 - a.m_a \cos \alpha\right)$$

$$\rightarrow b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$$

**توجه :** در هر مثلث  $ABC$  با اضلاع  $BC = a$  و  $AC = b$  و  $AB = c$ ، اگر اندازه‌ی میانه‌ی وارد بر ضلع  $a$  برابر  $m_a$  باشد، در این صورت می‌توان نوشت:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

**قضیه ی طول میانه ها :** در هر مثلث  $ABC$  با اضلاع  $BC = a$  و  $AC = b$  و  $AB = c$  داریم:

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

$$m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}$$

$$m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$$

**تمرین ۱۹:** در مثلث  $ABC$  با اضلاع  $BC = ۸$  و  $AC = ۶$  و  $AB = ۴$ ، طول میانه ی  $AM$  را تعیین

کنید.

حل :

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2(36 + 16) - 64} = \frac{1}{2} \sqrt{104 - 64} = \frac{1}{2} \sqrt{40} = \sqrt{10}$$

**تمرین برای حل :**

**۲۰:** طول اضلاع مثلثی ۹ و ۸ و ۳ سانتی متر می باشند، طول میانه ی وارد بر بزرگترین ضلع این مثلث را

محاسبه کنید.

\*\*\*

**تمرین ۲۱:** ثابت کنید که در هر متوازی الاضلاع، مجموع مربعات دو قطر با مجموع مربعات اضلاع برابر

است.

اثبات :

$$\alpha + \beta = 180 \rightarrow \beta = 180 - \alpha \rightarrow \cos \beta = -\cos \alpha$$

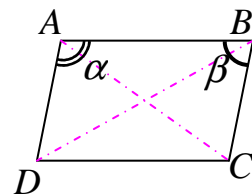
$$\Delta(ABD): BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2(AB)(AD)\cos \alpha \quad (1)$$

$$\Delta(ABC): AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2(AB)(BC)\cos \beta$$

$$\xrightarrow{\cos \beta = -\cos \alpha} AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2(AB)(BC)\cos \alpha$$

$$\xrightarrow{AB=DC, BC=AD} AC^2 = DC^2 + BC^2 + 2(AB)(AD)\cos \alpha \quad (2)$$

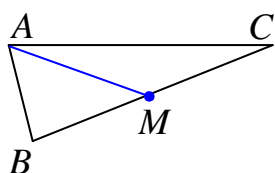
$$\xrightarrow{(1),(2)} AC^2 + BD^2 = AB^2 + AD^2 + DC^2 + BC^2$$





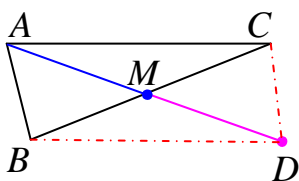
**نتیجه:** بنا بر اینکه در متوازی الاضلاع، اضلاع مقابل مساوی می باشند. در هر متوازی الاضلاع مجموع مربعات دو قطر با دو برابر مجموع مربعات هر دو ضلع مجاور برابر است.

$$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$$



**تمرین ۲۲:** در مثلث مقابل  $AM$  میانه‌ی وارد بر ضلع  $BC$  است. ثابت کنید:

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$



**اثبات:** میانه‌ی  $AM$  را از طرف نقطه‌ی  $M$  به اندازه‌ی خودش امتداد

می دهیم، تا نقطه‌ی  $D$  بدست آید. نقطه‌ی  $D$  را به نقاط  $B$  و  $C$

وصل می کنیم. قطرهای چهارضلعی بدست آمده، همدیگر را نصف می

کنند، لذا این چهارضلعی متوازی الاضلاع است. پس:

$$AD^2 + BC^2 = AC^2 + DC^2 + BD^2 + AB^2$$

$$\xrightarrow{AC=BD, DC=AB} AD^2 + BC^2 = 2(AC^2 + AB^2)$$

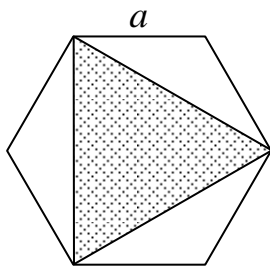
$$\xrightarrow{AD=2AM} (2AM)^2 + BC^2 = 2(AC^2 + AB^2)$$

$$\rightarrow (2m_a)^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2$$

$$\rightarrow 2m_a = \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} \rightarrow m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

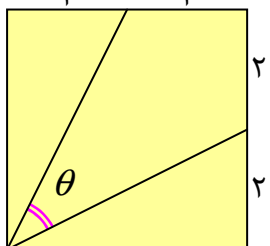
\*\*\*

**تمرین برای حل:**



**۲۳:** در شکل مقابل شش ضلعی منتظم به ضلع  $a$  داده شده است. مساحت مثلثی

که از وصل کردن یک در میان رئوس شش ضلعی تشکیل می شود را تعیین کنید.



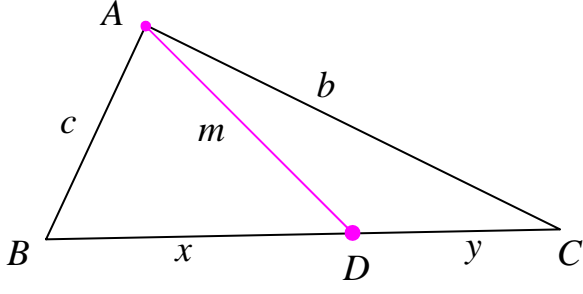
**۲۴:** در مربع شکل مقابل، مقدار  $\sin \theta$  کدام است؟ (راه حل قید شود).

$$\frac{3}{5} \quad (۴)$$

$$\frac{2}{5} \quad (۳)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۱)$$



**قضیه استوارت:** اگر  $D$  نقطه‌ای دلخواه روی ضلع  $BC$  در مثلث  $ABC$  باشد. در این صورت می‌توان نوشت:

$$xb^2 + yc^2 = (x + y)m^2 + xy(x + y)$$

**تمرین ۲۵:** به کمک قضیه استوارت، درستی قضیه میانه‌ها را ثابت کنید.

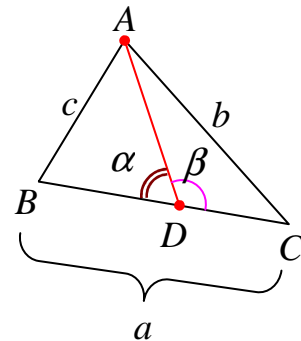
حل: گیریم که نقطه‌ی  $D$  پای میانه‌ی وارد بر ضلع  $BC$  باشد. پس  $DB = DC$  لذا طبق قضیه استوارت داریم.

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = AD^2 \cdot BC + DB \cdot DC \cdot BC$$

$$\xrightarrow{DB=DC} AB^2 \cdot DB + AC^2 \cdot DB = AD^2 \cdot BC + DB^2 \cdot BC$$

$$\xrightarrow{BC=2DB} c^2 \cdot DB + b^2 \cdot DB = m_a^2 \cdot 2DB + DB^2 \cdot a$$

$$\xrightarrow{\div DB} c^2 + b^2 = 2m_a^2 + DB \cdot a$$

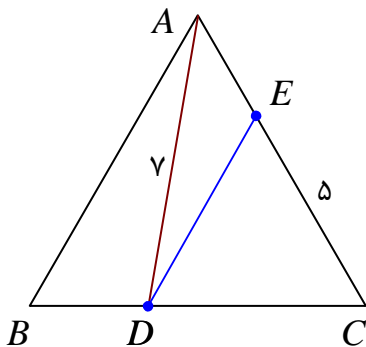


$$\xrightarrow{DB=\frac{1}{2}a} c^2 + b^2 = 2m_a^2 + \frac{1}{2} \cdot a^2 \rightarrow m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

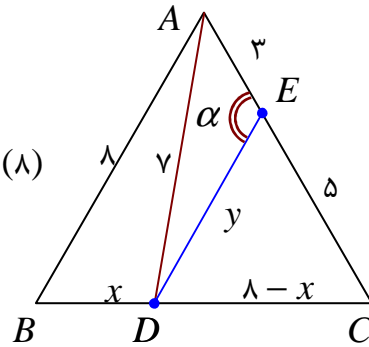
**تمرین ۲۶:** در مثلث متساوی الاضلاع  $ABC$  به طول ضلع ۸

واحد، روی ضلع  $BC$  نقطه‌ی  $D$ ، به فاصله‌ی ۷ واحد از رأس  $A$ ، همچنین روی ضلع  $AC$  نقطه‌ی  $E$ ، به فاصله‌ی ۵ واحد از رأس  $C$  در نظر گرفته شده‌اند. با فرض اینکه  $CD > BD$ ، تعیین کنید که

نقطه‌ی  $D$  از نقاط  $B$  و  $C$  چه فاصله‌ای دارد؟



حل : قرار می دهیم،  $BD = x$  و  $DE = y$  و  $\angle AED = \alpha$  در این صورت داریم:



$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = AD^2 \cdot BC + DB \cdot DC \cdot BC$$

$$\rightarrow (7)^2 \cdot (8 - x) + (5)^2 \cdot (x) = (y)^2 \cdot (8) + (x) \cdot (8 - x) \cdot (8)$$

$$\rightarrow 64(8 - x) + 64x = 49 \times 8 + 8x(8 - x)$$

$$\rightarrow 64 \times 8 - 64x + 64x = 49 \times 8 + 8x(8 - x)$$

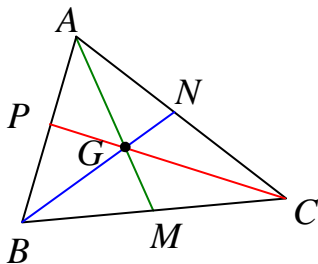
$$\xrightarrow{\div 8} \rightarrow 64 = 49 + 8x - x^2 \rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \rightarrow (x - 3)(x - 5) = 0$$

$$\xrightarrow{\div 8} \rightarrow x = 3, \quad x = 5 \xrightarrow{DB < DC} \rightarrow x = DB = 3, \quad DC = 5$$

**تمرین ۲۷:** اگر  $AM$  و  $BN$  و  $CP$  میانه های مثلث  $ABC$  و نقطه ی  $G$  محل تلاقی آنها باشد.

ثابت کنید که :

$$AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$



حل :

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} \rightarrow 2m_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$$

$$\frac{AG = \frac{2}{3}m_a \rightarrow m_a = \frac{3}{2}AG}{\rightarrow 2\left(\frac{3}{2}AG\right)^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}}$$

$$\rightarrow \frac{9}{2}AG^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2} \rightarrow AG^2 = \frac{2}{9}\left(b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}\right) = \frac{2}{9}b^2 + \frac{2}{9}c^2 - \frac{1}{9}a^2$$

به همین ترتیب :

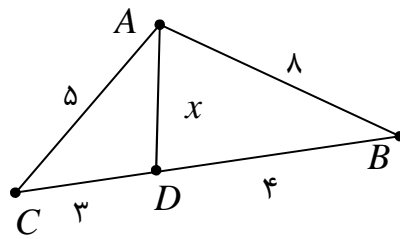
$$BG^2 = \frac{2}{9}a^2 + \frac{2}{9}c^2 - \frac{1}{9}b^2$$

$$CG^2 = \frac{2}{9}a^2 + \frac{2}{9}b^2 - \frac{1}{9}c^2$$

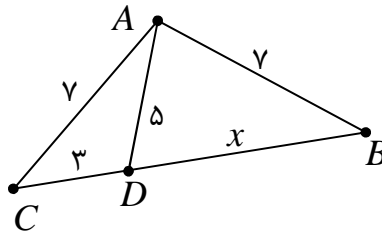
که با جمع هر سه تساوی فوق داریم:

$$\begin{aligned}
 & AG^2 + BG^2 + CG^2 \\
 &= \left(\frac{2}{9}b^2 + \frac{2}{9}c^2 - \frac{1}{9}a^2\right) + \left(\frac{2}{9}a^2 + \frac{2}{9}c^2 - \frac{1}{9}b^2\right) + \left(\frac{2}{9}a^2 + \frac{2}{9}b^2 - \frac{1}{9}c^2\right) \\
 &= \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{3}c^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)
 \end{aligned}$$

**۲۸:** با توجه به شکل مقابل اندازه‌ی پاره خط  $AD$  را به دست آورید.



**۲۹:** با توجه به شکل مقابل مقدار  $x$  را بیابید.



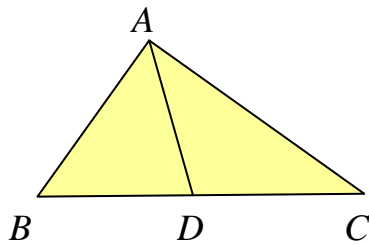
\*\*\*

**درس سوم : قضیه ی نیمسازهای زاویه های داخلی**

یکی دیگر از قضایای مهم هندسی ، قضیه ی نیمساز های زاویه های داخلی مثلث است. در این درس با این قضیه و روش محاسبه ی طول نیمساز آشنا شویم.

**قضیه ی نیمساز های زاویه های داخلی مثلث :** در هر مثلث ، نیمساز هر زاویه ی داخلی ، ضلع

روبرو به آن زاویه را به نسبت دو ضلع زاویه قطع می کند.



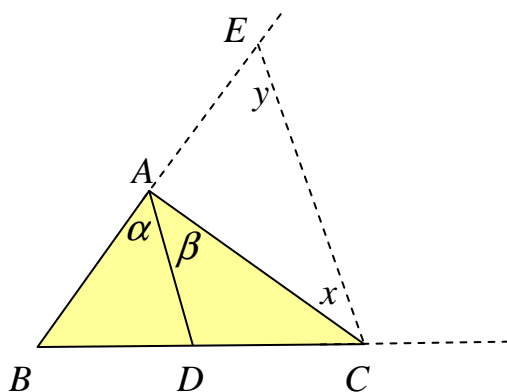
پاره خط  $AD$  نیمساز زاویه ی  $BAC$  است. فرض

$$\text{حکم : } \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$$

اثبات: اضلاع  $AB$  و  $BC$  را از طرف نقاط  $A$  و  $C$  امتداد داده و سپس از نقطه ی  $C$  خطی موازی با نیمساز

زاویه ی  $A$  یعنی  $AD$  رسم می کنیم تا امتداد  $AB$  را

در نقطه ی  $E$  قطع کند. در این صورت داریم:



$$AD \parallel CE \Rightarrow \angle \beta = \angle x \text{ مورب } AC \text{ و } AD$$

$$AD \parallel CE \Rightarrow \angle \alpha = \angle y \text{ مورب } BE \text{ و } AD$$

از طرفی طبق فرض داشتیم:  $\angle \alpha = \angle \beta$  پس  $\angle x = \angle y$  و در نتیجه مثلث  $ACE$  متساوی الساقین

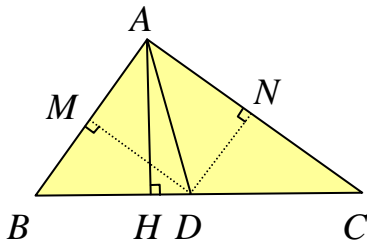
$$\text{است، یعنی } AE = AC$$

از طرفی طبق قضیه ی تالس داریم:

$$AD \parallel CE \rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{BD}{CD} \xrightarrow{AE=AC} \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} \rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$$

**روش دوم :** از نقطه ی  $D$  بر اضلاع مثلث دو خط  $DM$  و  $DN$  را عمود می کنیم. می دانیم که هر نقطه

روی نیمساز زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. پس  $DM = DN$  از طرفی:



$$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{\frac{1}{2}AH \times BD}{\frac{1}{2}AH \times DC} = \frac{BD}{DC} \quad (1)$$

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{\frac{1}{2}DM \times AB}{\frac{1}{2}DN \times AC} = \frac{DM \times AB}{DN \times AC} \quad (2)$$

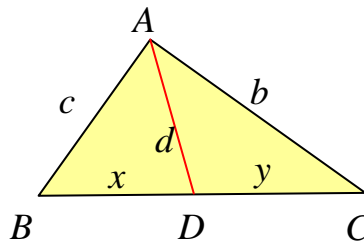
$$(1), (2) \rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC}$$

\*\*\*

**قضیه نیمسازها:** در هر مثلث  $ABC$  با اضلاع  $BC = a$  و  $AC = b$  و  $AB = c$  اگر  $AD$

نیمساز زاویه داخلی  $A$  داریم:

$$\frac{c}{x} = \frac{b}{y}$$



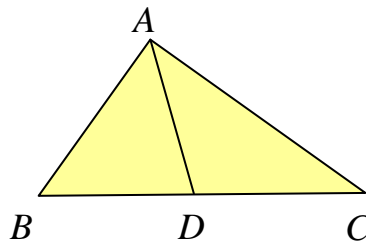
\*\*\*

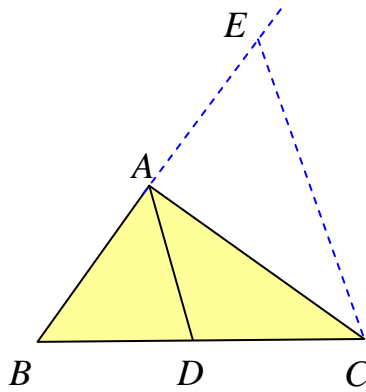
**تمرین ۱:** نقطه‌ی  $D$  روی ضلع  $BC$  از مثلث  $ABC$  طوری قرار دارد که  $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC}$ . ثابت کنید،

نقطه‌ی  $D$  پای نیمساز نظیر رأس  $A$  است.

فرض:  $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC}$

پاره خط  $AD$  نیمساز زاویه داخلی  $BAC$  است. حکم





اثبات: از نقطه ی  $C$  خطی موازی با  $AD$  رسم می کنیم تا امتداد  $AB$  را در نقطه ی  $E$  قطع کند. در این صورت و بنابر قضیه ی

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AE} \quad (1) \quad \text{تالس در مثلث } BCE \text{ داریم:}$$

اکنون با توجه به فرض داریم:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC} \rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \quad (2)$$

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AB}{AC} \rightarrow AE = AC \quad \text{بنابر نتایج ۱ و ۲ می توان نوشت:}$$

یعنی مثلث  $ACE$  متساوی الساقین است. پس  $\angle AEC = \angle ACE$  . و چون  $AD$  و  $CE$  موازیند،

پس:

$$\begin{cases} \angle CAD = \angle ACE \\ \angle BAD = \angle AEC \end{cases} \rightarrow \angle BAD = \angle CAD$$

یعنی  $AD$  نیمساز زاویه ی  $BAC$  است.

\*\*\*

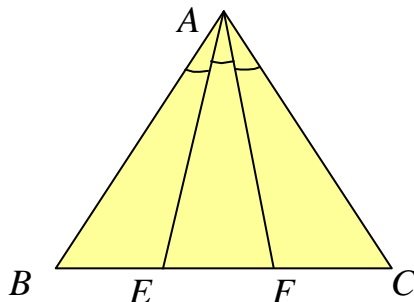
نتیجه : در هر مثلث، نیمساز هر زاویه ، ضلع روبرو به آن زاویه را به نسبت دو ضلع زاویه قطع می کند و برعکس

\*\*\*

**تمرین ۲:** در شکل مقابل  $AE$  و  $AF$  زاویه ی  $A$  را به سه

قسمت برابر تقسیم کرده اند. ثابت کنید که:

$$\frac{BE}{CF} = \frac{AB \times AE}{AC \times AF}$$



اثبات:

الف: در مثلث  $ABF$  پاره خط  $AE$  نیمساز زاویه ی  $BAF$  است. پس:

$$\frac{AB}{BE} = \frac{AF}{EF} \rightarrow \frac{AB}{AF} = \frac{BE}{EF} \quad (1)$$

ب: در مثلث  $AEC$  پاره خط  $AF$  نیمساز زاویه  $EAC$  است. پس:

$$\frac{AE}{EF} = \frac{AC}{CF} \rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{EF}{CF} \quad (۲)$$

اکنون نتایج ۱ و ۲ را در همدیگر ضرب می کنیم.

$$\frac{AB}{AF} \times \frac{AE}{AC} = \frac{BE}{EF} \times \frac{EF}{CF} \rightarrow \frac{AB \times AE}{AC \times AF} = \frac{BE}{CF}$$

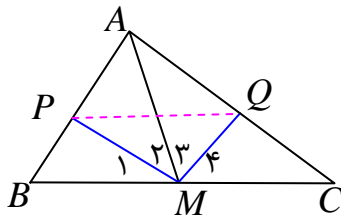
\*\*\*

**تمرین ۳:** در مثلث  $ABC$  میانه  $AM$  و نیمسازهای دو زاویه  $AMB$  و  $AMC$  را رسم کنید. اگر

این دو نیمساز، اضلاع  $AB$  و  $AC$  را به ترتیب در نقاط  $P$  و  $Q$  قطع کنند. ثابت کنید دو خط  $PQ$  و  $BC$

موازیند.

اثبات:



در مثلث  $AMB$  پاره خط  $PM$  نیمساز رأس  $M$  است، پس:

$$\frac{MB}{PB} = \frac{AM}{AP} \rightarrow \frac{AP}{PB} = \frac{AM}{MB} \quad (۱)$$

در مثلث  $AMC$  پاره خط  $QM$  نیمساز رأس  $M$  است، پس:

$$\frac{MC}{QC} = \frac{AM}{AQ} \rightarrow \frac{AQ}{QC} = \frac{AM}{MC} \quad (۲)$$

از مقایسه‌ی روابط ۱ و ۲ و بنابر اینکه  $MB = MC$ ، پس می توان نوشت:  $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$

و طبق عکس قضیه‌ی تالس نتیجه می شود:  $PQ \parallel BC$

\*\*\*

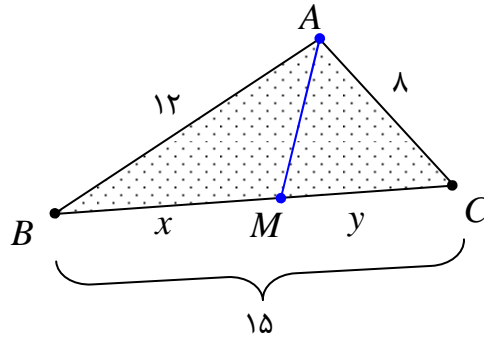
**تمرین ۴:** اندازه‌های سه ضلع مثلثی ۸ و ۱۲ و ۱۵ سانتی متر می باشند. اندازه‌ی پاره خط‌هایی که نیمساز

درونی زاویه‌ی بزرگتر مثلث بر ضلع مقابل آن پدید می آورد را تعیین کنید.

حل: می دانیم که در هر مثلث بزرگترین زاویه روبرو به بزرگترین ضلع است. از طرفی نیمساز هر زاویه‌ی

داخلی ضلع مقابل به آن زاویه را به نسبت دو ضلع زاویه تقسیم می کند. پس:





$$x + y = 15$$

$$\frac{12}{x} = \frac{8}{y} \rightarrow \frac{12}{8} = \frac{x}{y} \rightarrow \frac{3}{2} = \frac{x}{y} \rightarrow 2x = 3y \rightarrow 2x - 3y = 0$$

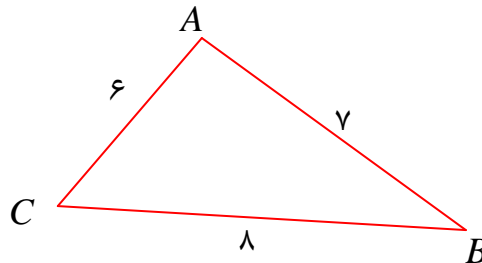
حال دستگاه زیر را حل می کنیم.

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases} \rightarrow x = 9, y = 6$$

\*\*\*

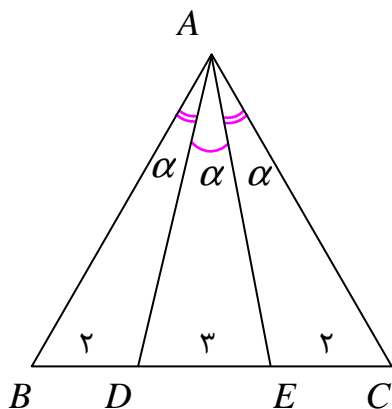
تمرین برای حل :

۵: در شکل روبرو، طول دو قطعه‌ای که نیمساز زاویه‌ی C روی ضلع AB جدا می کند، را حساب کنید.



۶: در مثلث ABC داریم،  $AB = 7$  و  $AC = 5$  و  $BC = 10$  است. طول های دو قطعه‌ای را که نیمساز

زاویه‌ی A روی ضلع مقابل آن ایجاد می کند، را به دست آورید.

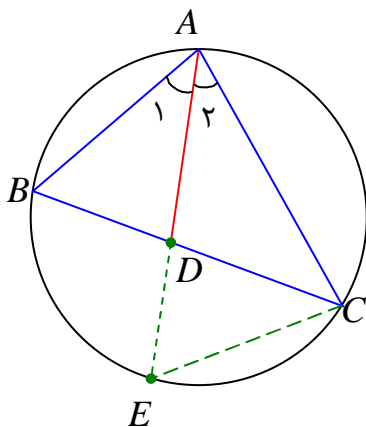


۷: با توجه به شکل زیر، حاصل  $\frac{AB \times AD}{AC \times AE}$  را بدست آورید.

## محاسبه‌ی طول نیمسازها

در این قسمت رابطه‌ی ای را معرفی می‌کنیم که به کمک آن می‌توان، به کمک اندازه‌ی اضلاع مثلث، اندازه-ی نیمساز زاویه‌ی داخلی مثلث را محاسبه کرد.

**قضیه‌ی طول نیمسازها:** در هر مثلث، مربع اندازه‌ی هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل ضرب اندازه-ی دو ضلع زاویه، منهای حاصل ضرب اندازه‌ی دو قطعه‌ی ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.



اثبات: نیمساز زاویه‌ی داخلی  $A$  را امتداد می‌دهیم. تا دایره‌ی محیطی مثلث را در نقطه‌ی  $E$  قطع کند. سپس نقطه‌ی  $E$  را به  $C$  وصل می‌کنیم. در این صورت چون  $AD$  نیمساز زاویه‌ی  $A$  است، پس  $\angle A_1 = \angle A_2$ . همچنین چون دو زاویه‌ی  $B$  و  $E$  محاطی بوده و برابر نصف کمان  $AC$  می‌باشند، پس  $\angle B = \angle E$ . لذا دو مثلث  $ABD$  و  $AEC$  به حالت تساوی دو زاویه متشابهند.

پس:

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AE}{AB} = \frac{CE}{BD}$$

از تناسب اول می‌توان نتیجه گرفت:

$$AB.AC = AD.AE$$

و چون  $AE = AD + DE$  داریم.

$$AB.AC = AD.(AD + DE)$$

یا اینکه:

$$AB.AC = AD^2 + AD.DE \quad (1)$$

همچنین بنابر اینکه دو وتر  $AE$  و  $BC$  در داخل دایره متقاطع هستند. پس:

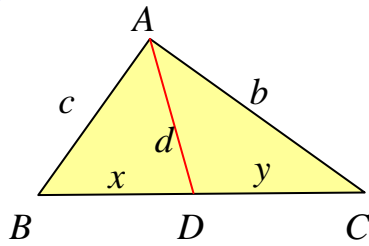
$$AD.DE = BD.DC \quad (2)$$

در نهایت از روابط (۱) و (۲) داریم:

$$AB.AC = AD^2 + BD.DC$$

یعنی:

$$AD^2 = AB.AC - BD.DC$$



قضیه ی طول نیمساز زاویه ی داخلی: در مثلث  $ABC$  با

اضلاع  $BC = a$  و  $AC = b$  و  $AB = c$ ، اگر نیمساز زاویه ی  $A$

برابر  $d$  و این نیمساز، ضلع  $a$  را به دو قطعه به طول های  $y$  و  $x$

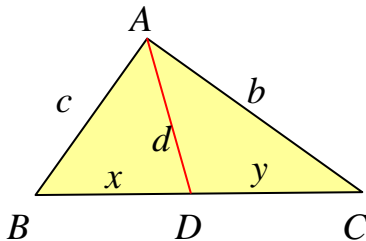
تبدیل کند، در این صورت می توان نوشت:

$$d_a = \sqrt{bc - xy}$$

**تمرین ۸:** در مثلث  $ABC$ ،  $AB = 3$  و  $AC = 5$  و  $BC = 7$  است. نیمساز زاویه ی داخلی  $A$  را به

دست آورید.

حل: به کمک قضیه ی نیمسازها داریم.



$$\frac{c}{x} = \frac{b}{y} \rightarrow \frac{3}{x} = \frac{5}{y} \rightarrow \frac{x}{y} = \frac{3}{5} \rightarrow \frac{x+y}{y} = \frac{8}{5}$$

$$\xrightarrow{x+y=7} \frac{7}{y} = \frac{8}{5} \rightarrow y = \frac{35}{8}$$

$$\xrightarrow{x+y=7} x = 7 - \frac{35}{8} = \frac{21}{8}$$

اکنون به کمک قضیه ی طول نیمسازها می توان نوشت:

$$d_a = \sqrt{bc - xy}$$

$$\rightarrow d_a = \sqrt{(5)(3) - \left(\frac{21}{8}\right)\left(\frac{35}{8}\right)} = \sqrt{15 - \frac{735}{64}} = \sqrt{\frac{225}{64}} \rightarrow d_a = \frac{15}{8}$$

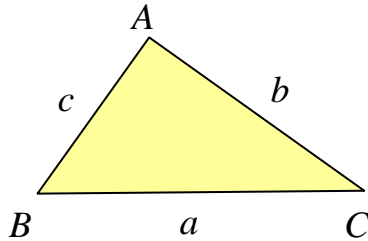
**تمرین برای حل:**

**۹:** در مثلث  $ABC$ ،  $AB = 7$  و  $AC = 4$  و  $BC = 10$  است. نیمساز زاویه ی داخلی  $C$  را به دست

آورید.

## درس چهارم: قضیه هرون برای محاسبه ی مساحت مثلث

به کمک اندازه‌ی سه ضلع مثلث می توان مساحت آن را محاسبه کرد. در این درس، با این روش را که موسوم به دستور هرون می باشد، آشنا شویم.



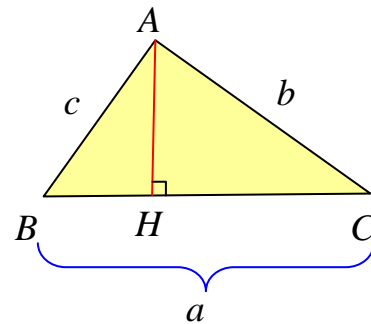
**قضیه هرون:** اگر  $c$  و  $b$  و  $a$  اندازه های سه ضلع یک

مثلث و  $p = \frac{a+b+c}{2}$  نصف محیط آن باشد. می توان

مساحت مثلث را به صورت زیر به دست آورد.

$$S = \sqrt{p \times (p - a) \times (p - b) \times (p - c)}$$

اثبات<sup>۱</sup>: در ابتدا ارتفاع وارد بر ضلع  $BC$  را رسم می کنیم. سپس رابطه ی فیثاغورس را در مثلث  $ABH$  می نویسیم.



$$\Delta(ABH): AH^2 + BH^2 = c^2$$

$$\rightarrow AH^2 + (a - CH)^2 = c^2$$

$$\rightarrow AH^2 + a^2 - 2a \cdot CH + CH^2 = c^2$$

و چون در مثلث  $ACH$  داریم،  $CH^2 = b^2 - AH^2$  پس:

$$b^2 + a^2 - 2a \cdot CH = c^2$$

لذا

$$CH = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$$

باز چون در مثلث  $ACH$  رابطه ی  $CH^2 = b^2 - AH^2$  را داریم. پس:

$$AH^2 = b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)^2$$

در ادامه داریم:

<sup>۱</sup>. اثبات این قضیه برای مطالعه است.

$$\begin{aligned}
 AH^r &= \left[ b - \left( \frac{a^r + b^r - c^r}{2a} \right) \right] \left[ b + \left( \frac{a^r + b^r - c^r}{2a} \right) \right] \\
 \rightarrow AH^r &= \left[ \frac{2ab}{2a} - \frac{a^r + b^r - c^r}{2a} \right] \left[ \frac{2ab}{2a} + \frac{a^r + b^r - c^r}{2a} \right] \\
 \rightarrow AH^r &= \left( \frac{2ab - a^r - b^r + c^r}{2a} \right) \left( \frac{2ab + a^r + b^r - c^r}{2a} \right) \\
 \rightarrow AH^r &= \frac{c^r - (a-b)^r}{2a} \times \frac{(a+b)^r - c^r}{2a} \\
 \rightarrow AH^r &= \frac{(c-a+b)(c+a-b)}{2a} \times \frac{(a+b-c)(a+b+c)}{2a} \\
 \rightarrow AH^r &= \frac{(a+b+c)(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)}{4a^r} \\
 \rightarrow AH^r &= \frac{(a+b+c)(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)}{16} \times \frac{4}{a^r} \\
 \rightarrow AH^r &= \frac{a+b+c}{2} \times \frac{c-a+b}{2} \times \frac{c+a-b}{2} \times \frac{a+b-c}{2} \times \frac{4}{a^r} \\
 \rightarrow AH^r &= \left( \frac{a+b+c}{2} \right) \times \left( \frac{a+b+c}{2} - a \right) \times \left( \frac{a+b+c}{2} - b \right) \times \left( \frac{a+b+c}{2} - c \right) \times \frac{4}{a^r} \\
 \xrightarrow{p=\frac{a+b+c}{2}} & AH^r = p \times (p-a) \times (p-b) \times (p-c) \times \frac{4}{a^r} \\
 \rightarrow AH &= \frac{r}{|a|} \sqrt{p \times (p-a) \times (p-b) \times (p-c)} \\
 \xrightarrow{|a|=a} & AH = \frac{r}{a} \sqrt{p \times (p-a) \times (p-b) \times (p-c)}
 \end{aligned}$$

با داشتن ارتفاع مثلث می توان مساحت را نیز محاسبه نمود.

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} a \cdot AH \rightarrow S = \frac{1}{2} a \times \frac{r}{a} \sqrt{p \times (p-a) \times (p-b) \times (p-c)} \\
 \rightarrow S &= \sqrt{p \times (p-a) \times (p-b) \times (p-c)}
 \end{aligned}$$

**توجه:** چون در هر مثلث  $S = \frac{1}{2}ah_a$  ، پس می توان نوشت:

$$h_a = \frac{2S}{a}$$

به همین ترتیب خواهیم داشت:

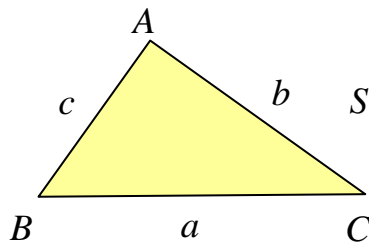
$$h_b = \frac{2S}{b} \quad \text{و} \quad h_c = \frac{2S}{c}$$

یعنی می توان بدین شکل اندازه‌ی ارتفاع‌های مثلث را نیز به دست آورد.

\*\*\*

**قضیه‌ی هرون:** مساحت مثلث  $ABC$  با اضلاع  $BC = a$  و  $AC = b$  و  $AB = c$  ، به صورت زیر

است.



$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

که در آن  $p = \frac{a+b+c}{2}$  ( نصف محیط ) می باشد.

**تمرین ۱:** به کمک دستور هرون مساحت و ارتفاع‌های مثلثی را حساب کنید که اندازه‌ی اضلاع آن ۱۳

و ۱۴ و ۱۵ باشند.

حل:

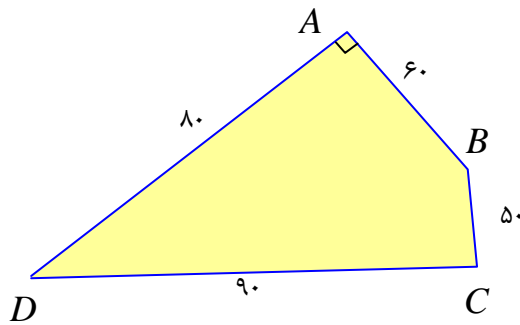
$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+14+15}{2} = \frac{42}{2} = 21$$

$$S = \sqrt{p \times (p-a) \times (p-b) \times (p-c)} = \sqrt{21 \times (21-13) \times (21-14) \times (21-15)}$$

$$\rightarrow S = \sqrt{21 \times 8 \times 7 \times 6} = \sqrt{7^2 \times 3^2 \times 2^2} = 84$$

$$\rightarrow \begin{cases} h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2 \times 84}{13} = \frac{168}{13} \\ h_b = \frac{2S}{b} = \frac{2 \times 84}{14} = 12 \\ h_c = \frac{2S}{c} = \frac{2 \times 84}{15} = \frac{56}{5} \end{cases}$$

تمرین ۲: مساحت چهارضلعی شکل مقابل را به دست آورید.



حل: ابتدا قطر  $BD$  را رسم می‌کنیم. در این صورت چون مثلث  $ABD$  قائم الزویه است. پس:

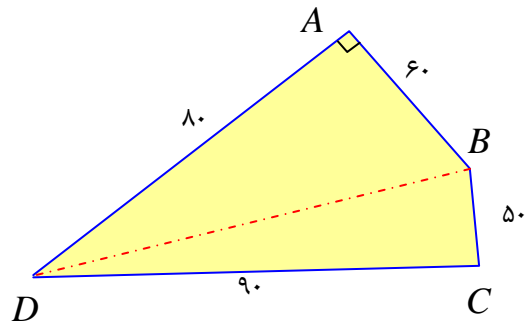
$$BD^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$$

$$\rightarrow BD = 10$$

$$\Delta(ABD): S_1 = \frac{1}{2}(8) \times (6) = 24$$

$$\Delta(CBD): \begin{cases} p = \frac{10 + 5 + 9}{2} = 12 \\ S_2 = \sqrt{12 \times (12 - 10)(12 - 5)(12 - 9)} = 6\sqrt{14} \end{cases}$$

$$\rightarrow S_f = S_1 + S_2 = 24 + 6\sqrt{14}$$

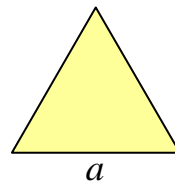


تمرین ۳: به کمک دستور هرون مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع  $a$  را به دست آورید.

حل:

$$S = \sqrt{p \times (p - a) \times (p - b) \times (p - c)}$$

$$\xrightarrow{b=c=a} S = \sqrt{p(p - a)^3}$$



$$\xrightarrow{p = \frac{3a}{2}} S = \sqrt{\frac{3a}{2} \left(\frac{3a}{2} - a\right)^3} = \sqrt{\frac{3a}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^3} = \sqrt{\frac{3a^4}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

\*\*\*

تمرین برای حل :

۴: مساحت مثلثی به اضلاع ۷ و ۸ و ۹ را به دست آورید.

۵: در مثلثی به اضلاع ۱۲ و ۱۶ و ۲۰ سانتی متر، اندازه‌ی ارتفاع وارد از رأس با زاویه‌ی بزرگتر کدام است؟

- الف) ۱۰/۵      ب) ۸/۵      ج) ۹/۶      د) ۹/۵

\*\*\*

دستوری سینوسی برای محاسبه‌ی مساحت مثلث

در این قسمت به روشی دیگر به یک دستور دیگر برای محاسبه‌ی مساحت مثلث می پردازیم.

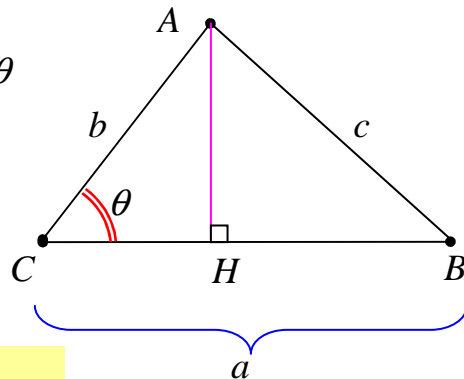
قضیه (محاسبه‌ی مساحت مثلث): مساحت هر مثلث با نصف حاصل ضرب دو ضلع در سینوس زاویه-

ی بین آن دو ضلع برابر است.

اثبات :

$$\Delta(ACH) : \sin \theta = \frac{AH}{AC} \rightarrow AH = AC \times \sin \theta$$

$$S = \frac{1}{2} \times BC \times AH = \frac{1}{2} BC \times AC \times \sin \theta$$



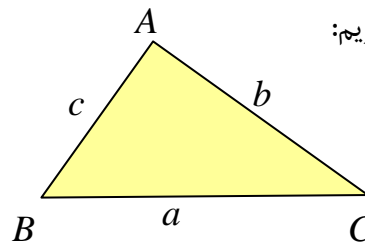
$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} ab \sin \theta$$

\*\*\*

قضیه‌ی سینوسی مساحت مثلث : در هر مثلث ABC با اضلاع  $AC = b$  و  $BC = a$

و  $AB = c$  داریم:

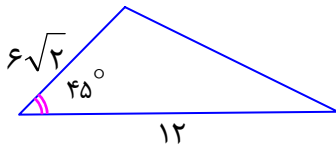
$$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} bc \sin A$$



\*\*\*



**تمرین ۶:** مساحت مثلث مقابل را حساب کنید.



**تمرین ۷:** یک مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع  $a$ ، را در نظر بگیرید. سپس ثابت کنید:

الف: مساحت این مثلث برابر  $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$  است.

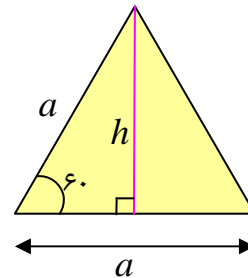
ب: اندازه ی ارتفاع مثلث برابر  $\frac{\sqrt{3}}{2}a$  است.

حل:

الف:

$$S = \frac{1}{2}(a)(a)\sin(60) = \frac{1}{2}a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$h = \frac{2S}{a} = \frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right)}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$



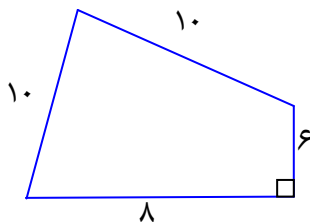
ب:

\*\*\*

**تمرین برای حل:**

**۸:** مساحت یک مثلث متساوی الاضلاع، به طول ضلع ۱۰ سانتی متر را حساب کنید.

**۹:** مساحت شکل مقابل را حساب کنید.



**۱۰:** به کمک دستور سینوسی مساحت ثابت کنید در هر مثلث، نسبت

اندازه ی یک ضلع به سینوس زاویه ی مقابل برابر نسبت اندازه ی ضلع

دیگر به سینوس زاویه ی مقابل می باشد. (قضیه ی سینوس ها)

**۱۱:** ثابت کنید که مساحت هر متوازی الاضلاع برابر حاصل ضرب دو ضلع مجاور در سینوس زاویه ی بین

آن دو ضلع است.

**۱۲:** مساحت متوازی الاضلاعی را حساب کنید که اندازه ی دو ضلع آن  $7\sqrt{3}$  و ۸ سانتی متر و زاویه ی بین

آنها  $120$  درجه است.

۱۳: ثابت کنید که مساحت هر چهارضلعی برابر نصف حاصل ضرب اندازه های دو قطر در سینوس کوچکترین زاویه ی بین آن دو قطر است.

۱۴: اگر  $c$  و  $b$  و  $a$  اندازه های سه ضلع یک مثلث و  $R$  شعاع دایره ی محیطی آن باشد، ثابت کنید که مساحت مثلث را می توان به صورت زیر محاسبه کرد.

$$S = \frac{abc}{4R}$$

\*\*\*

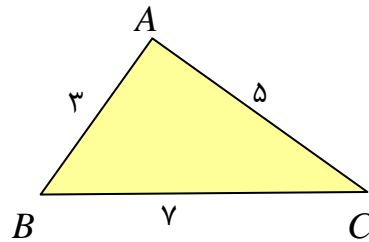
**تعیین زاویه های مثلث به کمک مساحت**

به کمک دستور هرون و با داشتن اندازه های اضلاع مثلث می توان مساحت را به دست آورد. اگر این مساحت را به کمک دستور سینوسی مساحت نیز محاسبه کرده و برابر همدیگر قرار دهیم، اندازه ی زاویه ها را می توان به دست آورد.

**تمرین ۱۵:** اندازه های سه ضلع مثلثی ۳ و ۵ و ۷ می باشند. اندازه ی زاویه ی مقابل به ضلع ۷ سانتی متر را به دست آورید.

حل :

$$p = \frac{3 + 5 + 7}{2} = \frac{15}{2}$$



$$S = \sqrt{p \times (p - a) \times (p - b) \times (p - c)} = \sqrt{\frac{15}{2} \times (\frac{15}{2} - 3) \times (\frac{15}{2} - 5) \times (\frac{15}{2} - 7)}$$

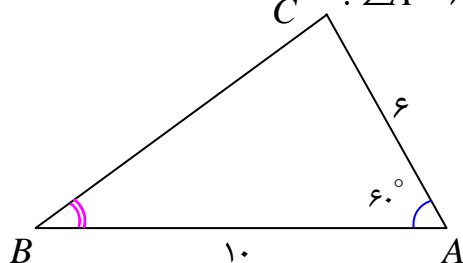
$$\rightarrow S = \sqrt{\frac{15}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{9}{2}} = \frac{15}{4} \sqrt{3} \quad (1)$$

$$S = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \sin A = \frac{15}{2} \times \sin A \quad (2)$$

اکنون به کمک روابط ۱ و ۲ خواهیم داشت:

$$\frac{15}{2} \times \sin A = \frac{15}{4} \sqrt{3} \rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \angle A = 60^\circ \text{ or } \angle A = 120^\circ$$

**تمرین ۱۶:** در مثلث ABC،  $AB = 10$  و  $AC = 6$  و  $\angle A = 60^\circ$ .



الف : طول BC را به دست آورید.

ب : مساحت مثلث را تعیین کنید.

پ : مقدار  $\sin B$  را پیدا کنید.

حل :

الف :

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos A$$

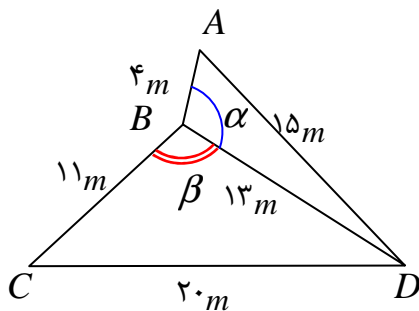
$$\rightarrow BC^2 = 36 + 100 - 2(6)(10)\left(\frac{1}{2}\right) = 76 \rightarrow BC = 2\sqrt{19}$$

ب :

$$S = \frac{1}{2}(AC)(AB) \sin A = \frac{1}{2} \times 6 \times 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$$

پ :

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \rightarrow \frac{6}{\sin B} = \frac{2\sqrt{19}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \rightarrow \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{6}{2\sqrt{19}} = \frac{3\sqrt{57}}{38}$$



**تمرین ۱۷:** دو قطعه زمین کوچک به شکل مثلث با یک

دیوار به طول ۱۳ متر، مطابق شکل از هم جدا شده اند. ابعاد

این قطعه زمین ها هم در شکل مشخص شده اند. اگر با

برداشتن دیوار، این دو قطعه به یک زمین تبدیل شود،

مساحت آن چقدر می شود؟ نشان دهید دیوار مشترک با

اضلاع ۴ متری و ۱۱ متری زاویه های برابر می سازد.

حل :

$$\Delta(ABD): \begin{cases} p = \frac{4 + 13 + 15}{2} = 16 \\ S = \sqrt{16 \times 12 \times 3 \times 1} = 24 \end{cases}$$

$$\Delta(BCD): \begin{cases} p = \frac{11 + 13 + 20}{2} = 22 \\ S = \sqrt{22 \times 11 \times 9 \times 2} = 66 \end{cases}$$

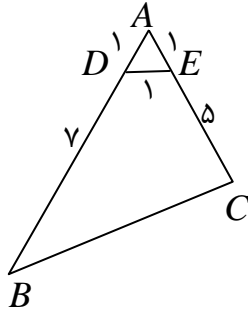
$$S_{ABCD} = A_{\Delta(ABD)} + S_{\Delta(BCD)} = 24 + 66 = 90 \text{ m}^2$$

$$S_{\Delta(ABD)} = \frac{1}{2} AB \times BD \sin \alpha \rightarrow 24 = \frac{1}{2} \times 4 \times 13 \sin \alpha \rightarrow \sin \alpha = \frac{12}{13} \quad (1)$$

$$S_{\Delta(BCD)} = \frac{1}{2} BC \times BD \sin \beta \rightarrow 66 = \frac{1}{2} \times 11 \times 13 \sin \beta \rightarrow \sin \beta = \frac{12}{13} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \sin \alpha = \sin \beta \rightarrow \alpha = \beta$$

\*\*\*



**تمرین ۱۸:** با توجه به شکل مقابل،

اولاً: طول  $BC$  را به دست آورید.

ثانیاً: مساحت چهارضلعی  $DECB$  را بیابید.

حل: با توجه به اینکه مثلث  $ADE$  متساوی الاضلاع است، پس زاویه ی  $DAE$  برابر  $60^\circ$  درجه است. پس:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos A$$

$$\rightarrow BC^2 = 36 + 64 - 2(6)(8)\left(\frac{1}{2}\right) = 52 \rightarrow BC = 2\sqrt{13}$$

$$S_{\Delta(ABC)} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$$

$$S_{\Delta(ADE)} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (1)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{BCED} = S_{\Delta(ABC)} - S_{\Delta(ADE)} = 12\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{47\sqrt{3}}{4}$$

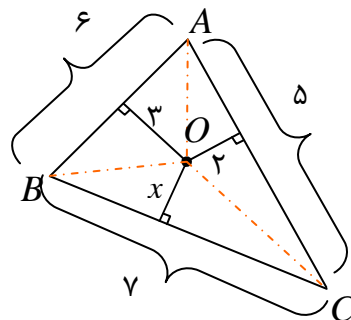
**تمرین ۱۹:** در مثلث  $ABC$  به اضلاع  $5$  و  $6$  و  $7$  سانتی متر، نقطه ای که از اضلاع به طول های  $5$  و  $6$  به

ترتیب به فاصله ی  $2$  و  $3$  سانتی متر است، از ضلع بزرگتر چه فاصله ای دارد؟

حل:

$$\Delta(ABC): \begin{cases} p = \frac{5+6+7}{2} = 9 \\ S = \sqrt{9 \times 2 \times 3 \times 4} = 6\sqrt{6} \end{cases}$$

$$\Delta(AOB): S = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$$



$$\Delta(AOC): S = \frac{1}{2} \times 5 \times 2 = 5$$

$$\Delta(BOC): S = \frac{1}{2} \times 7 \times x = \frac{7}{2}x$$

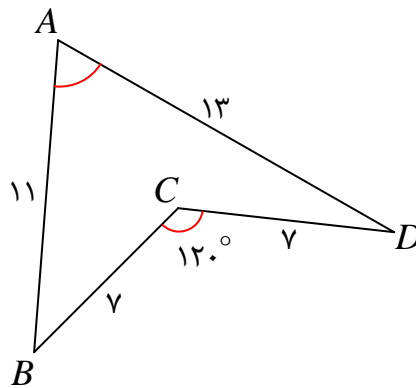
$$S_{\Delta(ABC)} = S_{\Delta(OAB)} + S_{\Delta(OAC)} + S_{\Delta(OBC)}$$

$$\rightarrow 6\sqrt{6} = 9 + 5 + \frac{7}{2}x \rightarrow x = \frac{2}{7}(6\sqrt{6} - 14) \approx 0.2$$

تمرین ۲۰: با توجه به شکل زیر

ب: مساحت چهارضلعی  $ABCD$  را بیابید.

الف: اندازه‌ی زاویه‌ی  $A$  را به دست آورید.



حل: اگر دو رأس  $B$  و  $C$  را به هم وصل کنیم.

مثلث  $BCD$  بوجود می‌آید. این مثلث متساوی الساقین

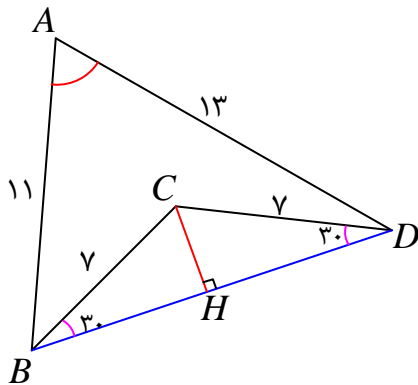
است. با توجه به اندازه‌ی زاویه‌ی  $C$  در این مثلث،

معلوم می‌شود که دو زاویه‌ی دیگر این مثلث  $30^\circ$  درجه

می‌باشند. نظر به اینکه در هر مثلث قائم الزاویه، ضلع

روبرو به زاویه‌ی  $30^\circ$  درجه نصف وتر است. پس

$$CH = \frac{BC}{2} = \frac{7}{2}$$



$$\left. \begin{aligned} S_{\Delta(BCD)} &= \frac{1}{2} \times \frac{7}{2} \times BD = \frac{7}{4}BD \\ S_{\Delta(BCD)} &= \frac{1}{2} \times 7 \times 7 \sin 120^\circ = \frac{49\sqrt{3}}{4} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{7}{4}BD = \frac{49\sqrt{3}}{4} \rightarrow BD = 7\sqrt{3}$$

$$S_{\Delta(ABC)} = S_{\Delta(ABD)} + S_{\Delta(ACD)}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin A = \frac{1}{2} AB \times AD \times \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2} AD \times AC \times \sin \frac{A}{2}$$

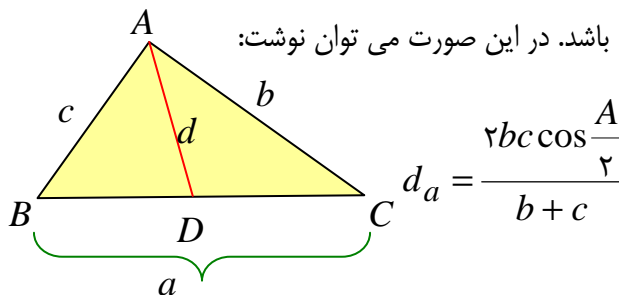
$$\xrightarrow{\times 2} AB \times AC \times \sin A = AB \times AD \times \sin \frac{A}{2} + AD \times AC \times \sin \frac{A}{2}$$

$$\rightarrow AB \times AC \times \sin A = AD \times \sin \frac{A}{2} (AB + AC)$$

$$\frac{\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} \rightarrow 2 AB \times AC \times \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = AD \times \sin \frac{A}{2} (AB + AC)$$

$$\rightarrow 2 AB \times AC \times \cos \frac{A}{2} = AD \times (AB + AC) \rightarrow AD = \frac{2 AB \times AC \times \cos \frac{A}{2}}{AB + AC}$$

قضیهی طول نیمساز زاویهی داخلی: در مثلث  $ABC$  با اضلاع  $BC = a$  و  $AC = b$  و  $AB = c$ ، اگر نیمساز زاویهی  $A$  برابر  $d_a$  باشد. در این صورت می توان نوشت:

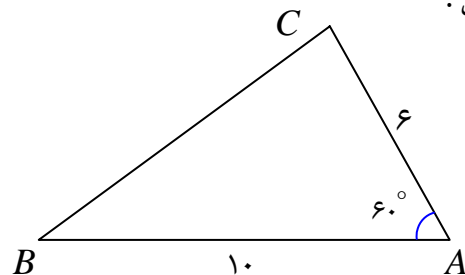


**تمرین ۲۱:** در مثلث  $ABC$ ،  $AB = 10$  و  $AC = 6$  و  $\angle A = 60^\circ$ . طول نیمساز زاویهی  $A$  را به

دست آورید.

حل:

$$d_a = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c} = \frac{2(6)(10) \cos 30^\circ}{6+10} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$



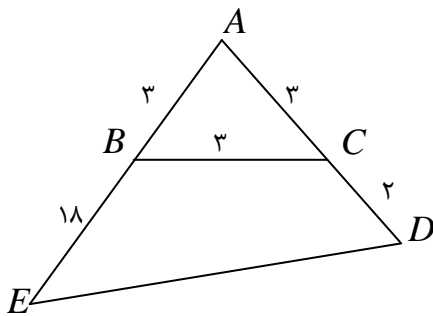
\*\*\*

تمرین برای حل :

۲۲ : در شکل مقابل

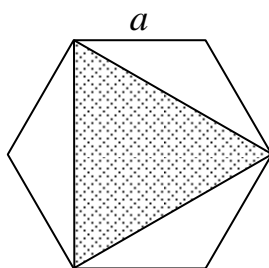
الف : طول ضلع  $DE$  را بدست آورید.

ب : مساحت چهارضلعی  $BCDE$  را بیابید.



۲۳ : در شکل مقابل شش ضلعی منتظم به ضلع  $a$  داده شده است. مساحت مثلثی که از وصل کردن یک در میان

رئوس شش ضلعی تشکیل می شود را تعیین کنید.



\*\*\*