## * تبدیل

تبدیل T در صفحه، تابعی است که به هر نقطه‌ی A از صفحه، دقیقاً یک نقطه‌ی دیگر مانند $A'$ را نظیر می‌کند و برعکس، هر نقطه‌ی $A'$ از صفحه، تصویر دقیقاً یک نقطه‌ی A از صفحه است. $\begin{cases} T: R^۲ \to R^۲ \\ T(A) = A' \end{cases}$

☑ **مثال ۱: اگر $T(x,y)=(x+۱,۳y)$ یک تبدیل باشد، آنگاه:**

**الف) تصویر نقاط $(۰,۰)$ و $(۲,۵)$ و $(-۱,-۲)$ را تحت این تبدیل بیابید.**

**ب) تحت تبدیل T، $(۴,۹)$ تصویر چه نقطه‌ای است؟**

**یادآوری:** طول پاره‌خط AB و شیب آن از فرمول‌های زیر محاسبه می‌شدند:

$$\begin{cases} AB = \sqrt{(x_A - x_B)^۲ + (y_A - y_B)^۲} \\ m_{AB} = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \end{cases}$$

☑ **مثال ۲: نقاط $A(۱,۴)$ و $B(-۲,-۱)$ و تبدیل $T(x,y)=(-x,y)$ مفروض‌اند،**

**الف) مختصات $A'$ و $B'$، تصویر A و B را تحت تبدیل T بیابید و در دستگاه مختصات رسم کنید.**

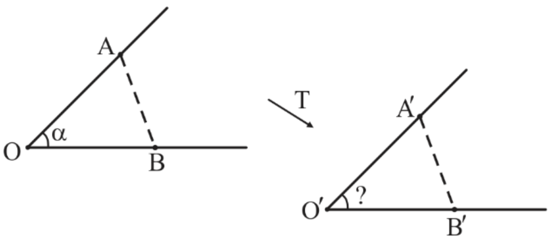
**ب) طول AB و $A'B'$ را بیابید.**

**پ) شیب AB و $A'B'$ را بیابید.**

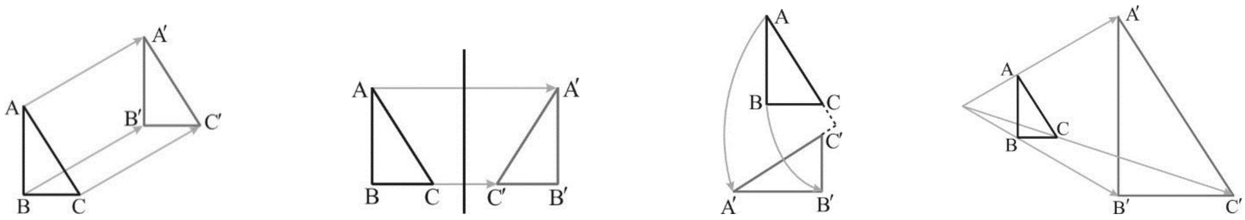
**تبدیل ایزومتری:** تبدیلی که طول پاره‌خط را حفظ می‌کند، ***تبدیل ایزومتری*** یا ***طولپا*** نامیده می‌شود.

**نکته:** هر تبدیل طولپا، اندازه‌ی زاویه را حفظ می‌کند.

**اثبات:**



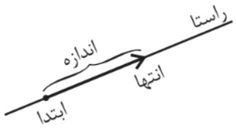

## * انواع تبدیل‌های هندسی




تجانس دوران بازتاب انتقال

### ۱) انتقال (Translation)

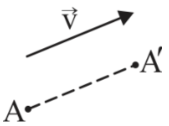
**یادآوری:**




۱- در شکل مقابل، یک بردار، ابتدا، انتها، اندازه و راستای آن مشخص شده است.

۲- دو بردار که هم‌اندازه، هم‌راستا و هم‌جهت باشند، دو بردار برابر نامیده می‌شوند.

**تعریف:** انتقال تحت بردار $\vec{v}$، تبدیلی از صفحه است که در آن، تصویر هر نقطه‌ی $A$ از صفحه، نقطه‌ای مانند $A'$ در همان صفحه است که $\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$.

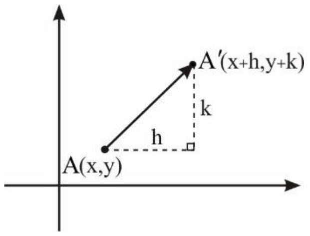



**نکته:** انتقال، طولپاست و شیب خط را حفظ می‌کند.

**اثبات:**

**نکته: ضابطه‌ی نگاشت انتقال:**

$$\boxed{T(x,y)=(x+h,y+k)}$$




که در آن $\vec{v}=(h,k)$ است.

☑ **تست ۳: کدام تبدیل زیر انتقال نیست؟**

۱) $T(x,y)=(x,y)$ ۲) $T(x,y)=(x-\frac{۱}{۲},y+\frac{۱}{۲})$

۳) $T(x,y)=(۲x,y)$ ۴) $T(x,y)=(x,y+۱)$

**تذکر:** به تبدیل $T(x,y)=(x,y)$، **تبدیل همانی** گفته می‌شود که نوعی انتقال است. تبدیل همانی، هر نقطه را بر روی خودش تصویر می‌کند.

☑ **تست ۴: انتقال یافته‌ی نقطه‌ی $A(۱,۲)$، نقطه‌ی $A'(۵,-۱)$ است. بردار انتقال کدام است؟**

۱) $\vec{V}(۴,۳)$ ۲) $\vec{V}(۴,-۳)$

۳) $\vec{V}(-۴,۳)$ ۴) $\vec{V}(-۴,-۳)$

**نکته:** اگر $A'$ انتقال یافته‌ی $A$ باشد، بردار انتقال برابر است با: $\vec{V}=\overline{AA'}=A'-A=(x_{A'}-x_A,y_{A'}-y_A)$

**چند نکته:**

۱- انتقال یافته‌ی هر پاره‌خط، با آن پاره‌خط موازی و برابر است.

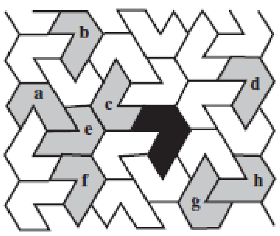
۲- انتقال یافته‌ی هر زاویه، با آن زاویه برابر است و اضلاع دو زاویه، نظیر به نظیر موازی‌اند.

۳- دو خط موازی $d$ و $d'$ همواره انتقال یافته‌ی یکدیگرند. برای این انتقال، بی‌شمار بردار می‌توان یافت. بردارهایی که ابتدای آن روی $d$ و انتهای آن روی $d'$ قرار دارد.

۴- دو خط متقاطع هیچگاه انتقال یافته‌ی یکدیگر نیستند.

۵- ترکیب چند انتقال، یک انتقال است، به‌طوری‌که بردار انتقال حاصل، جمع بردارهای آن چند انتقال است.

☑ **مثال ۵: در نمودار زیر، کدام یک از تصویرهای مشخص شده، تصویر انتقال یافته‌ی شکل سایه دار است؟**




### ویژگی‌های انتقال

*- انتقال ایزومتری (طولپا) است.*

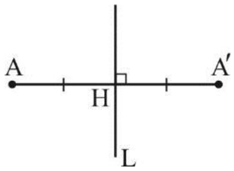
*- انتقال شیب خط را حفظ می‌کند.*

*- انتقال اندازه زاویه را حفظ می‌کند.*

*- بردارهای انتقال دهنده‌ی نقاط نظیر دو شکل، طول‌های برابر دارند و جهت‌شان یکسان است.*

## ۲) بازتاب (Reflection)

### الف) بازتاب (تقارن) محوری:



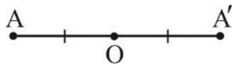

نقطه‌ی $A'$ بازتاب محوری $A$ نسبت به محور $L$ است، اگر $L$ **عمودمنصف** $AA'$ باشد.

واضح است که تصویر هر نقطه مانند $H$ که روی خط باشد، خود نقطه‌ی $H$ خواهد شد. $L$ را **محور تقارن** بازتاب می‌نامیم.

**تعریف :** در هر تبدیل، نقطه‌ای را که تبدیل یافته‌ی آن بر خود آن نقطه منطبق می‌شود، **نقطه‌ی ثابت تبدیل** می‌نامیم.

بنابراین بازتاب نسبت به خط، بی‌شمار نقطه ثابت تبدیل دارد.

### ب) بازتاب (تقارن) مرکزی:




نقطه‌ی $A'$ قرینه‌ی $A$ نسبت به نقطه‌ی $O$ است، اگر $O$ وسط $AA'$ باشد.

نقطه‌ی $O$ را **مرکز تقارن** این بازتاب می‌نامیم.

☑ مثال ۶: **اگر نقطه‌ی A′(۳,۵) تصویر نقطه‌ی A(−۳,−۱) تحت یک بازتاب باشد، معادله‌ی محور تقارن را بیابید.**

☑ تست ۷: **اگر نقطه‌ی A(−۳,−۱) تحت بازتاب نسبت به نقطه‌ی B(۱,۲) به نقطه‌ی C تصویر شده باشد، مختصات C کدام است؟**

۱) (۵,۴) ۲) (۵,۵)

۳) (۴,۵) ۴) $(-۱,\frac{۱}{۲})$

**نکته:** تبدیل بازتاب، طولپاست.

**اثبات:**

**چند نکته:**

۱- وقتی $A'$ بازتاب $A$ نسبت به خط $d$ است، بازتاب $A'$ نسبت به خط $d$، همان $A$ است زیرا

۲- قرینه‌ی قرینه‌ی هر نقطه، خود آن نقطه است، یعنی: $S(S(A)) = S(A') = A$

۳- در هر بازتاب، تبدیل یافته‌ی یک مثلث، یک مثلث است که با مثلث اولیه هم‌نهشت است.

۴- در حالتی که پاره‌خط $AB$، موازی یا عمود بر محور بازتاب باشد، بازتاب شیب خط را حفظ می‌کند و در غیر این صورت شیب را حفظ نمی‌کند، پس در حالت کلی، بازتاب شیب خط را حفظ نمی‌کند.

۵- اگر قرینه‌ی هر نقطه از شکل $P$ نسبت به نقطه‌ی $O$ بر خود $P$ منطبق شود، $O$ را **مرکز تقارن** $P$ گوییم.

**- در مربع، مستطیل و متوازی‌الاضلاع، محل برخورد اقطار، مرکز تقارن است.**

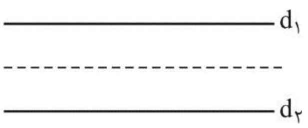
**- $2n$ ضلعی منتظم همواره دارای مرکز تقارن است، ولی $2n-1$ ضلعی منتظم مرکز تقارن ندارد.**

۶- اگر قرینه‌ی هر نقطه از شکل $P$ نسبت به خط $L$ بر خود $P$ منطبق شود، خط $L$ را **محور تقارن** $P$ گوییم.

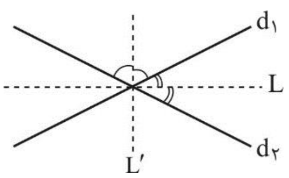
**- $n$ضلعی منتظم همواره دارای $n$ محور تقارن است.**

۷- دو خط $d_1$ و $d_2$ همواره می‌توانند قرینه‌ی یکدیگر باشند:

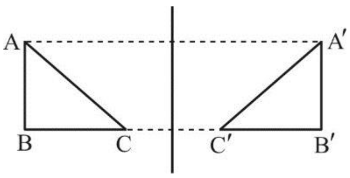
الف) اگر $d_1 \parallel d_2$ باشد، محور تقارن بین دو خط و موازی و متساوی‌الفاصله از آن‌ها است.




ب) اگر $d_1$ موازی $d_2$ نباشد، آنگاه محور تقارن، نیمسازهای زوایای بین دو خط است (۲خط عمود بر هم $L$ و $L'$).




۸- بازتاب جهت شکل را حفظ نمی‌کند. جهت شکل را حفظ نمی‌کند یعنی: در شکل مقابل، نامگذاری حروف مثلث $ABC$، پادساعتگرد است، اما نامگذاری حروف مثلث $A'B'C'$ ساعتگرد است. (تمرین ۲ صفحه ۴۴ کتاب)

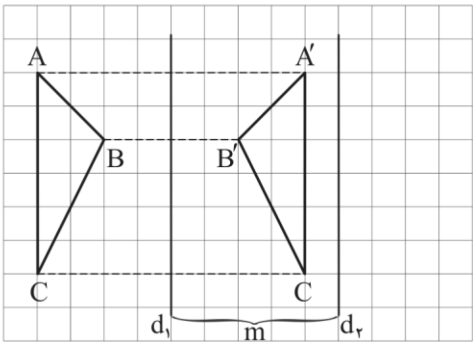



### ویژگی‌های بازتاب

- *بازتاب ایزومتری (طولپا) است.*
- *بازتاب شیب خط را الزاماً حفظ نمی‌کند.*
- *بازتاب اندازه زاویه را حفظ می‌کند.*
- *بازتاب جهت شکل را حفظ نمی‌کند.*

☑ مثال ۸: در حالتی که پاره‌خط AB در راستای عمود بر خط بازتاب قرار دارد، ثابت کنید که اگر $A'B'$ بازتاب AB باشد، AB و $A'B'$ هم‌اندازه‌اند. (تمرین ۱ صفحه ۴۴ کتاب)

☑ مثال ۹: در شکل مقابل، $d_1$ موازی $d_2$ و به فاصله‌ی m از آن قرار دارد و مثلث $A'B'C'$ بازتاب مثلث ABC نسبت به خط $d_1$ است. بازتاب مثلث $A'B'C'$ را نسبت به خط $d_2$ رسم کنید و آن را $A''B''C''$ بنامید. (تمرین ۴ صفحه ۴۴ کتاب)




الف) نشان دهید: $AA'' = 2m$

ب) اندازه $BB''$ و $CC''$ چقدر است؟

پ) با چه تبدیلی می‌توان مثلث $A''B''C''$ را تصویر مثلث ABC دانست؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

**نتیجه:** ترکیب دو تقارن با محورهای موازی، یک انتقال است، به‌طوری‌که بردار انتقال ، دو برابر فاصله‌ی بین دو خط است.

☑ مثال ۱۰: نقطهٔ A به فاصلهٔ $2\sqrt{6}$ از خط d قرار دارد. تصویر نقطهٔ A را تحت بازتاب نسبت به خط d، نقطهٔ $A'$ می‌نامیم. نقطهٔ A را حول نقطهٔ $A'$ به اندازهٔ ۱۲۰ درجه دوران می‌دهیم تا نقطهٔ $A''$ حاصل شود. طول پاره خط $AA''$ را محاسبه کنید. (تمرین ۶ صفحه ۴۵ کتاب)

☑ **مثال ۱۱:** نقطهٔ $A'$ تصویر نقطهٔ $A$ در بازتاب نسبت به خط $l$ است. اگر $AA'=۱۶$ و نقطهٔ $O$ روی خط $l$ و $OA=۱۰$ باشد، فاصلهٔ نقطهٔ $A$ از خط $OA'$ چقدر است؟ (تمرین ۷ صفحه ۴۵ کتاب)

☑ **تست ۱۲:** فرض کنید پاره‌خط $AB$ به طول ۱۰ با خط بازتاب $d$ نه موازی و نه متقاطع باشد و امتداد پاره‌خط $AB$ (از طرف $A$) خط $d$ را در نقطه $M$ با زاویه ۳۰ درجه قطع کند. اگر $T(A)=A'$ و $T(B)=B'$ و $BB'=۱۸$ باشد، نسبت $\frac{MA}{MB'}$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۹}$

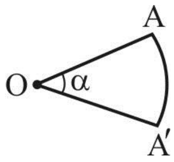
۲) $\frac{۳}{۸}$

۳) $\frac{۲}{۷}$

۴) $\frac{۱}{۳}$

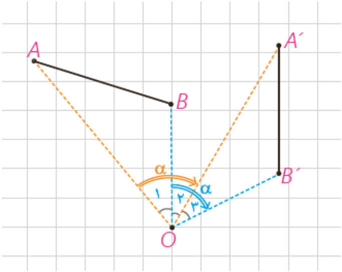
## ۳) دوران (Rotation)

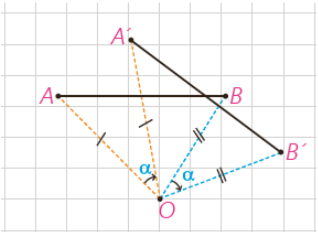
**تعریف:** نقطه‌ی $A'$ دوران یافته‌ی $A$ نسبت به نقطه‌ی $O$ و تحت زاویه‌ی $\alpha$ است، اگر: $\begin{cases} AO = A'O \\ A\hat{O}A' = \alpha \end{cases}$

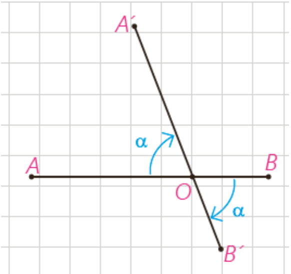


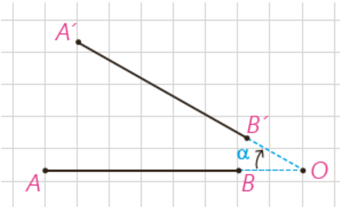

**نکته:** دوران، طولپاست.

**اثبات:**



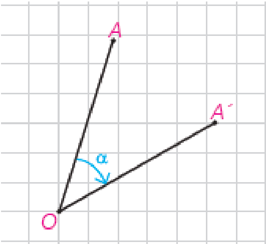



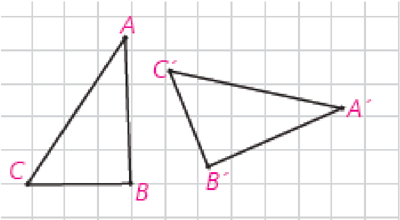



☑ **مثال ۱۳:** به سوالات زیر پاسخ دهید: (تمرین ۳ صفحه ۴۴ کتاب)

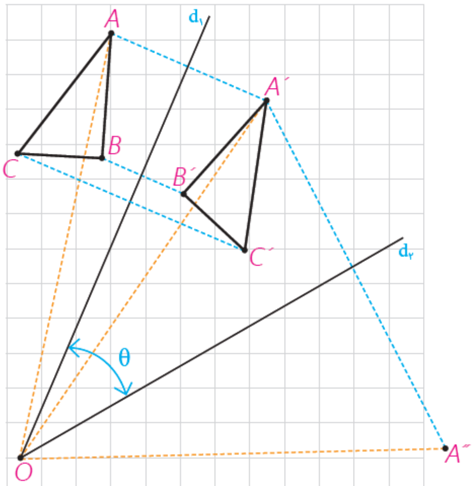
الف) در شکل مقابل، نقطهٔ $A'$ دوران یافته نقطهٔ $A$ در دوران به مرکز $O$ و زاویه $\alpha$ است. نشان دهید عمودمنصف $AA'$ از نقطهٔ $O$ می‌گذرد.




ب) اگر بدانیم $A'\overset{\Delta}{B'}C'$ دوران یافتهٔ $A\overset{\Delta}{B}C$ است، چگونه می‌توان مرکز دوران را مشخص کرد؟




☑ **مثال ۱۴:** در شکل مقابل، دو خط $d_1$ و $d_2$ با زاویه $\theta$ یکدیگر را قطع کرده‌اند. مثلث $A'B'C'$ بازتاب مثلث $ABC$ نسبت به خط $d_1$ است. بازتاب مثلث $A'B'C'$ را نسبت به خط $d_2$ رسم کنید و آن را $A''B''C''$ بنامید. (تمرین ۵ صفحه ۴۵ کتاب)




الف) نشان دهید: $A\hat{O}A'' = 2\theta$

ب) اندازه $C\hat{O}C''$ و $B\hat{O}B''$ چقدر است؟

پ) با چه تبدیلی می‌توان مثلث $A''B''C''$ را تصویر مثلث $ABC$ دانست؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

## ۴) تجانس (Dilation)

**تعریف:** نقطه‌ی $A'$ مجانس $A$ نسبت به نقطه‌ی $O$ و نسبت $k$ است اگر:

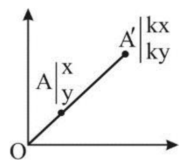
۱) $O$ و $A$ و $A'$ روی یک خط راست باشند.

۲) $OA' = |k|.OA$

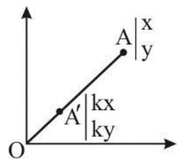
### * ضابطه‌ی نگاشت تجانس:

تجانس به مرکز $O(0,0)$ و نسبت $k$ به صورت مقابل است: $\boxed{D(x,y) = (kx,ky)}$

**نکته ۱:**




۱- اگر $|k|>1$ باشد، تجانس یک **انبساط** است.




۲- اگر $0<|k|<1$ باشد، تجانس یک **انقباض** است.

**نکته ۲:**

اگر $k>0$ باشد، تجانس **مستقیم** و اگر $k<0$ باشد، تجانس **معکوس** نام دارد:

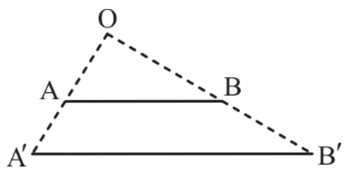
۱) $k>0 \leftarrow A$ و $A'$ در یک طرف $O$ هستند.

۲) $k<0 \leftarrow A$ و $A'$ در طرفین $O$ هستند.

**نکته ۳:** دو شکل مجانس با یکدیگر متشابه‌اند با نسبت $k$، لذا نسبت مساحت‌های دو شکل مجانس $k^2$ است.

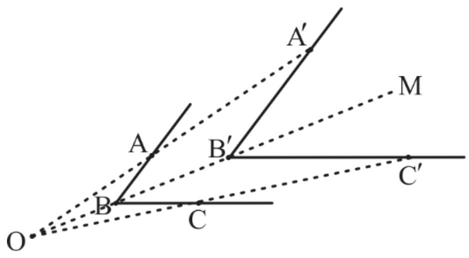
**نتیجه:** تجانس ایزومتری نیست. (مگر در حالت $|k|=1$)

☑ **مثال ۱۵: الف) نشان دهید تجانس شیب خط را حفظ می‌کند.**




**ب) نشان دهید:** $\dfrac{A'B'}{AB} = |k|$

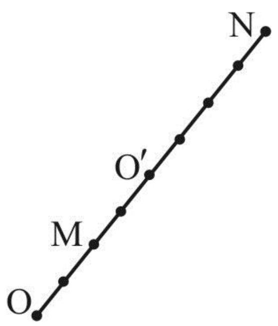
☑ مثال ۱۶: نشان دهید تجانس اندازه زاویه را حفظ می‌کند.




☑ مثال ۱۷: اگر nضلعی $A'_1A'_2...A'_n$ مجانس nضلعی $A_1A_2...A_n$ باشد، نشان دهید این دو nضلعی با هم متشابه‌اند.

☑ مثال ۱۸: نشان دهید دو شکل متشابه، الزاماً متجانس نیستند.

☑ تست ۱۹: در شکل مقابل ، فاصله‌ی بین نقاط، یک واحد است. کدام نادرست است؟




۱) M مجانس $O'$ است به مرکز N و نسبت $\frac{3}{2}$

۲) N مجانس O است به مرکز $O'$ و نسبت $(-1)$

۳) N مجانس M است به مرکز O و نسبت $\frac{1}{4}$

۴) O مجانس $O'$ است به مرکز M و نسبت $(-1)$

☑ مثال ۲۰: در تجانسی با نسبت $k>0$ و مرکز تجانس O نشان دهید: (تمرین ۱ صفحه ۵۰ کتاب)

الف) تجانس شیب خط را حفظ می‌کند.

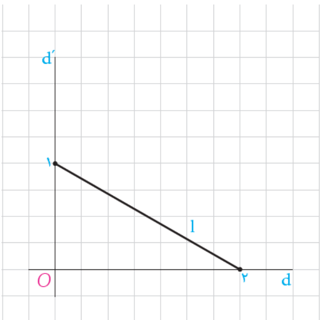
ب) تجانس زاویه بین خطوط را حفظ می‌کند.

☑ **مثال ۲۱:** دایره $C(O,R)$ و نقطه $M$ خارج این دایره مفروض است. مجانس این دایره را نسبت به نقطه‌ی $M$ در هر حالت رسم کنید: (تمرین ۲ صفحه ۵۰ کتاب)

الف) $k=2$ ب) $k=-2$ پ) $k=\frac{1}{2}$

☑ **مثال ۲۲:** یک مربع را در تجانسی با نسبت تجانس $\frac{2}{3}$ و به مرکز محل تلاقی قطرها تصویر کرده‌ایم. اگر مساحت بین مربع و تصویرش ۵ باشد محیط مربع اولیه را محاسبه کنید. (تمرین ۳ صفحه ۵۱ کتاب)

☑ **مثال ۲۳:** در شکل روبرو، اگر خط $l$ را در تجانس به مرکز $O$ و نسبت تجانس $\frac{7}{4}$ تصویر کنیم و آن را $l'$ بنامیم، مساحت بین خط $l$ و $l'$ و خطوط $d$ و $d'$ چقدر است؟ (تمرین ۴ صفحه ۵۱ کتاب)




**نکته:** تبدیلی که هر نقطه‌ی صفحه را به خود آن نقطه تصویر می‌کند، **تبدیل همانی** نامیده می‌شود: $T(A)=A$

انتقال، دوران و تجانس می‌توانند همانی باشند ولی بازتاب هیچگاه همانی نیست.

### ویژگی‌های تجانس

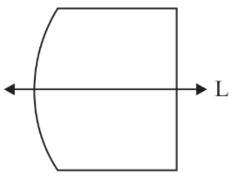
- تجانس طول یا مساحت را حفظ نمی‌کند (مگر در حالت $|k|=1$).
- تجانس شیب خط را حفظ می‌کند.
- تجانس اندازه زاویه را حفظ می‌کند.
- تجانس مرکز تجانس را ثابت نگه می‌دارد.
- خط‌هایی که نقطه‌های نظیر را به هم وصل می‌کنند، در مرکز تجانس همرسند.

**جمع بندی:** جدول زیر را تکمیل کنید:

| | طول پاره‌خط را حفظ می‌کند | اندازه زاویه را حفظ می‌کند | شیب خط را حفظ می‌کند | جهت شکل را حفظ می‌کند | مساحت شکل را حفظ می‌کند |
|---|---|---|---|---|---|
| بازتاب | | | | | |
| انتقال | | | | | |
| دوران | | | | | |
| تجانس | | | | | |

## * کاربرد تبدیل‌ها

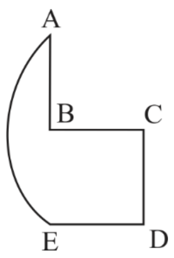
### کاربردهایی از بازتاب (قرینه یابی)



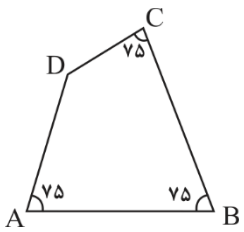

اگر شکلی مانند شکل مقابل را داشته باشیم به سادگی می‌توانیم به کمک خط L، آن را به دو نیمه‌ی مساوی تقسیم کنیم.

**☑ مثال ۲۴: در شکل‌های زیر به کمک بازتاب، شکل را به دو قسمت مساوی تقسیم کنید.**

**الف) BCDE مربع و AE کمانی از دایره.**



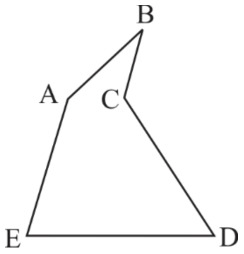

**ب)**



## هم‌پیرامونی یا هم‌محیطی

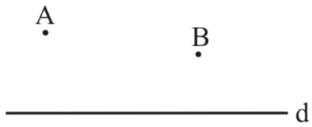
در این گونه مسائل هدف این است که بدون تغییر محیط یک چندضلعی، مساحت آن را تغییر دهیم.

☑ مثال ۲۵: **مطابق شکل، زمینی به شکل چندضلعی ABCDE داریم که دور آن را حصار کشیده‌ایم. حال می‌خواهیم با ثابت نگه داشتن محیط و ثابت نگه داشتن تعداد اضلاع چندضلعی، بدون اینکه اندازه حصارکشی تغییر کند مساحت زمین را افزایش دهیم. چگونه این کار را انجام دهیم؟**

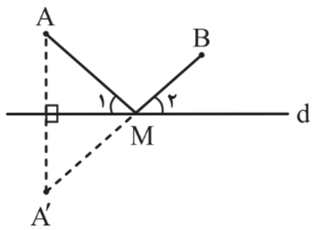



## یافتن کوتاه‌ترین مسیر

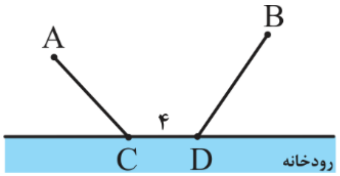
دو نقطه‌ی A و B در یک طرف خط d قرار دارند. می‌خواهیم نقطه‌ای مانند M روی خط d پیدا کنیم به طوری که $AM+MB$ کمترین مقدار ممکن باشد. برای این منظور:



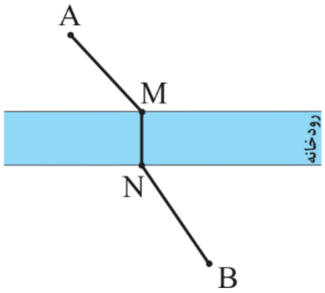

در مسئله‌ی فوق فرض کنید که d یک آینه‌ی تخت و A یک نقطه‌ی نورانی است. نشان دهید بازتاب شعاع نوری AM از نقطه‌ی B می‌گذرد. (به عبارتی نشان دهید که $\hat{M}_۱=\hat{M}_۲$)



☑ **مثال ۲۶:** دو شهر A و B مطابق شکل در یک طرف رودخانه‌ای واقع‌اند. می‌خواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم به طوری که ۴ کیلومتر از این جاده در ساحل رودخانه ساخته شود. این چهار کیلومتر را در چه قسمتی از رودخانه بسازیم تا مسیر ACDB کوتاه‌ترین مسیر ممکن باشد؟

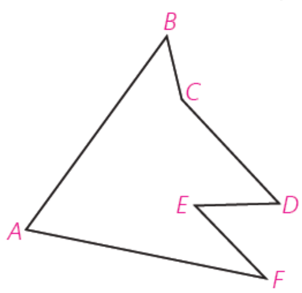



☑ **مثال ۲۷:** اگر دو شهر A و B مطابق شکل در دو طرف رودخانه باشند و بخواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم به طوری که پل MN بر راستای رودخانه عمود باشد، محل احداث پل را کجا در نظر بگیریم که مسیر AMNB کوتاه‌ترین مسیر ممکن باشد؟

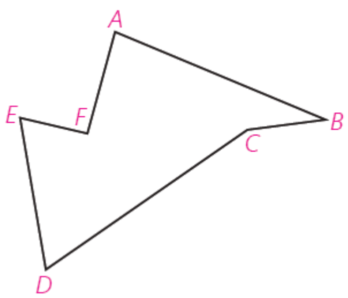



☑ **مثال ۲۸:** دور زمینه‌هایی مطابق شکل حصارکشی شده است. چطور می‌توان بدون کم و زیاد کردن حصارها مساحت زمین را افزایش داد؟ (تمرین ۱ صفحه ۵۶ کتاب)

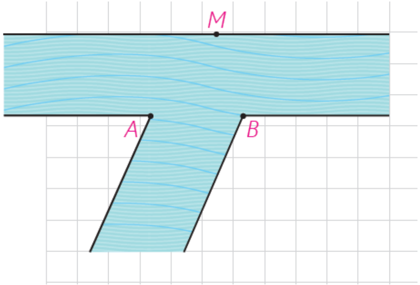
الف)



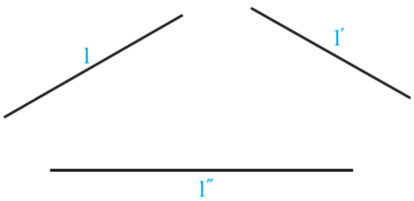

ب)



☑ مثال ۲۹: میخواهیم کنار رودخانه‌ها ۳ اسکله بسازیم. جای دو اسکلهٔ $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ مطابق شکل مشخص است. اسکلهٔ $\mathbf{M}$ را در چه نقطه ای از ساحل رودخانه بسازیم که قایق‌ها هنگام طی مسیر $\mathbf{MABM}$ کوتاه‌ترین مسیر را طی کنند؟ (تمرین ۲ صفحه ۵۶ کتاب)




☑ مثال ۳۰: سه خط دوبه‌دو ناموازی $\mathbf{l}$ و $\mathbf{l'}$ و $\mathbf{l''}$ در صفحه مفروض‌اند. پاره‌خطی به طول ۵ سانتی‌متر رسم کنید که دو سر آن روی $\mathbf{l}$ و $\mathbf{l'}$ و موازی $\mathbf{l''}$ باشد. (تمرین ۳ صفحه ۵۶ کتاب)




☑ مثال ۳۱: فرض کنید $\mathbf{G}$ محل برخورد میانه‌های مثلث $\mathbf{ABC}$ (مرکز ثقل آن) باشد و مثلث $\mathbf{A'B'C'}$ مجانس مثلث $\mathbf{ABC}$ در تجانس به مرکز $\mathbf{G}$ و نسبت $\mathbf{k=-\frac{1}{2}}$ باشد: (تمرین ۴ صفحه ۵۶ کتاب)

الف) جایگاه رأس‌های $\mathbf{A'}$ و $\mathbf{B'}$ و $\mathbf{C'}$ نسبت به مثلث $\mathbf{ABC}$ کجاست؟

ب) مساحت مثلث $\mathbf{A'B'C'}$ چه کسری از مساحت مثلث $\mathbf{ABC}$ است؟

☑ **مثال ۳۲**: **دو زمین به شکل زیر داریم. می‌خواهیم بدون آنکه محیط این دو زمین تغییر کند، مساحت آن‌ها را افزایش دهیم. در هر مورد میزان افزایش مساحت را حساب کنید. (تمرین ۵ صفحه ۵۶ کتاب)**